

## Espacios con métrica indefinida

### Indefinite metric spaces

Boris Lora

*Grupo de Matemáticas Aplicadas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*

*borislora@mail.uniatlanco.edu.co*

Carlos Salcedo

*I. E. T. A. de Puerto Giraldo, Atlántico-Colombia*

*casa238@gmail.com*

Willian Vides

*Universidad de la Guajira, Riohacha- Colombia*

*wvides@uniguajira.edu.co*

---

---

#### Resumen

Se hace un recorrido histórico - conceptual por algunos momentos de la teoría de los espacios de métrica indefinida, resaltando aspectos básicos de la geometría de los espacios de Krein y Pontryagin .

**Palabras claves:** Espacios de Hilbert, métrica indefinida, espacios de Krein, espacios de Pontryagin, Operadores lineales.

#### Abstract

A conceptual historical overview around some moments of indefinite inner product spaces emphasizing basic aspects of the geometry of Krein and Pontryagin spaces is made.

*Keywords:* Hilbert space, indefinite metric, Pontryagin spaces, Krein spaces, linear operators.

---

---

## 1. Introducción

Los espacios de Hilbert son esencialmente espacios vectoriales en los cuales se introduce un producto interno según el cual todo vector tiene cuadrado no negativo y el único vector con cuadrado cero es el vector nulo -además el espacio es completo con respecto a la topología inducida por la norma que a su vez es inducida por el producto interno-. Cuando la condición de no negatividad de los cuadrados en el producto es retirada, surgen los espacios con métrica indefinida.

El inicio del estudio sistemático de los operadores en espacios con métrica indefinida se remonta a la década de los años cuarenta del siglo XX. Pontryagin [12] publica en 1944 un artículo en el cual se consideran operadores lineales hermíticos en espacios con producto interno donde existen vectores no nulos cuyos cuadrados son cero. En las décadas siguientes muchos matemáticos se interesan por el tema: Iohvidov [4] muestra la primera aplicación al caso infinito-dimensional de la transformada de Cayley, Krein [6] aplica el principio de punto fijo a operadores lineales en espacios con métrica indefinida. En un principio los estudios sobre estos temas fueron realizados por matemáticos de la antigua URSS, concentrados esencialmente en las escuelas de Odessa, dirigida por Krein, la escuela de Moscú, por Naimark y un poco después la de Voronezh, por Iokhvidov; pero pronto matemáticos de otros países se interesaron en los espacios con métrica indefinida y sus aplicaciones: en Finlandia, Nevanlinna, Pesonen y Louhivaara, [11], en Alemania, Langer [9, 8]; En Francia, de Brange y Schwarz [7, 13]. Pronto en Europa muchos nombres de matemáticos se anexan a la lista de los interesados en estos temas, entre ellos mencionamos a Bogner, Ginzburg, Potapov, Azizov, Shmulyan [4, 5, 13]. Atravesando los mares, en tiempos más recientes, matemáticos americanos se han sumado a la exploración de estas teorías. Son notables y de gran importancia teórica, los trabajos de Rovnyak y Dritschel [3] en particular sobre operadores contráctiles y bicontráctiles en espacios de Pontryagin y de Krein.

En Latinoamérica el interés en los espacios de métrica indefinida se concentra especialmente en Argentina y Venezuela. En Venezuela un grupo de matemáticos, liderados inicialmente por Cotlar, Arocena y Sadovski, entre los cuales se puede mencionar a Marcantognini, Bruzual, Dominguez, León entre otros, siguiendo el ambicioso programa de extender al máximo los alcances de ciertas generalizaciones del teorema de Bchner, han ampliado y generalizado algunos aspectos de esta teoría. Desde hace algún tiempo uno de los miembros fundadores de la escuela de Voronezh, Vladimir Strauss, aporta sus conocimientos y estudios en territorio suramericano. Varios artículos y tesis de doctorado y maestría sobre estos temas han salido de las universidades gauchas, especialmente de la Universidad Nacional de la Plata, donde se destacan los nombres de Alejandra Maestriperi y Demetrio Stojanoff.

El incipiente, pero creciente interés por estos temas en el ámbito local colombiano ha motivado la intención de publicar una serie de artículos con el objetivo de dar a conocer aspectos básicos de la teoría de los espacios de métrica indefinida, en especial la de los espacios de Krein y de Pontryagin. En este artículo la atención se centra en los aspectos geométricos básicos de estos espacios.

El artículo está estructurado en dos secciones, además de la introducción y una breve conclusión: en la primera sección se consideran algunos-muy pocos, por cuanto se presume el conocimiento de ellos-conceptos básicos sobre producto interno y espacios de Hilbert, en la siguiente sección se tratan los conceptos que se han considerado relevantes en la geometría de los espacios de métrica indefinida en especial la de los espacios de Krein y de Pontryagin. Se hacen muy pocas demostraciones toda vez que éstas pueden encontrarse en la bibliografía muy particularmente en los libros de Bogner ([1]) y las notas de Bruzual ([2]).

## 2. Preliminares

### 2.1. Espacios con producto interno

**Definición 1.** Sea  $\mathfrak{F}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Un producto interno en  $\mathfrak{F}$ , es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:

1.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{F}$
2.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  para todo  $x, y \in \mathfrak{F}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  para todo  $x, y \in \mathfrak{F}$

Al par  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se le llama espacio con producto interno.

Nótese que en esta definición no se exige que el producto de un vector por si mismo sea no-negativo.

**Definición 2.** Sea  $\mathfrak{F}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$  es un producto interno tal que para cada  $x \in \mathfrak{F}$  se satisface:

4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
5.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Entonces se dice que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto escalar.

Si 1, 2, 3 se cumplen, entonces puede ocurrir:

- a)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{F}$ , en este caso el producto es semi-definido positivo.
- b)  $\langle x, x \rangle \leq 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{F}$ , en este caso el producto es semi-definido negativo.
- c) Si se cumplen 1, 2, 3, 4 y 5, el producto es definido positivo. Si 1, 2, 3, 5, tiene lugar y  $\langle x, x \rangle \leq 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{F}$ , el producto es definido negativo.
- d) Si existe  $x$  y  $y \in \mathfrak{F}$  tal que  $\langle x, x \rangle > 0$  y  $\langle y, y \rangle < 0$ , en este caso el producto es indefinido.

**Ejemplo 1.** Sea  $\mathfrak{F} = \{ \{x_n\} \in \mathbb{C} / \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$ . Si  $x = \{x_n\}$  y  $y = \{y_n\}$  son elementos de  $\mathfrak{F}$  y definimos:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=3}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \quad (1)$$

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{n=3}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \quad (2)$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \quad (3)$$

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \quad (4)$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n \bar{y}_n \quad (5)$$

Se tiene que (1) define un producto semidefinido positivo, (2) define uno semidefinido negativo. En estos dos productos los vectores con ceros en todas las entradas, a partir de la tercera son neutros. (3) Es un producto definido positivo, (4) es definido negativo y (5) es indefinido

**Observación 1.** Si  $x$  es positivo, es decir  $\langle x, x \rangle > 0$ , entonces  $\lambda x$  también es positivo,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ . En efecto,  $\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle > 0$ .

Si  $x$  es negativo, de forma similar, se establece que  $\lambda x$  es negativo.

Un espacio con producto interno que cumple 1, 2, 3, 4, 5 se dice que es un espacio pre-Hilbert.

Todo espacio pre-Hilbert es en particular normado, donde la norma asociada se define como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , y por tanto es también métrico, con la métrica asociada  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ .

**Lema 1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.[2]** Si  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio con producto interno semi-definido, entonces se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

para todo  $x, y \in \mathfrak{H}$ . La igualdad tiene lugar si  $x, y$  son linealmente dependientes.

## 2.2. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert surgieron en los trabajos de índole geométrica de Grassmann y los trabajos sobre ecuaciones diferenciales de Euler y Lagrange. Grassmann introduce un producto interno asociado a lo que él denominó “expresiones extensivas” en los espacios de dimensión finita que posteriormente se denominarían “euclidianos” mientras que por el lado de las ecuaciones diferenciales Cauchy formula la definición de independencia lineal de funciones y Sturm y Liouville generalizan este concepto a espacios de funciones más amplios, sobre los cuales Hilbert introduce una generalización del producto interno de Grassmann dando origen al concepto de Espacio de Hilbert. El nombre de espacios de Hilbert es acuñado por Von Neumann en 1929.

**Definición 3.** Un espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo (con respecto a la métrica inducida por el producto interno). Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interno coherente con la norma del espacio, en el sentido de que  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ , para todo  $x$  del espacio.

En los espacios de Hilbert tiene lugar el importante Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1 (Representación de Riesz).** Un funcional  $f : X \rightarrow E$  sobre un espacio de Hilbert es lineal y acotado si y sólo si existe un único  $y \in X$  tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$ ,  $\forall x \in X$ . además  $\|f\| = \|y\|$ .

## 2.3. Espacios con Métrica Indefinida

**Definición 4.** Sea  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Se dice que  $x \in \mathfrak{H}$  es:

- Positivo, si  $\langle x, x \rangle > 0$

- *Negativo*, si  $\langle x, x \rangle < 0$
- *Neutro*, si  $\langle x, x \rangle = 0$

Ésta definición conlleva a distinguir los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^0 &= \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x \rangle = 0\} \\ \mathfrak{B}^{00} &= \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x \rangle = 0, x \neq 0\} \\ \mathfrak{B}^+ &= \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x \rangle \geq 0\} \\ \mathfrak{B}^{++} &= \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x \rangle > 0, o x = 0\} \\ \mathfrak{B}^- &= \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x \rangle \leq 0\} \\ \mathfrak{B}^{--} &= \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x \rangle < 0, o x = 0\} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.** Sea  $\mathfrak{F} = \{\{x_n\} \subset \mathbb{C} / \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ . Si  $x = \{x_n\}$  y  $y = \{y_n\}$  son elementos de  $\mathfrak{F}$  definase el producto como en (5). Es facil ver que (5) define un producto interno.

En  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$   $x = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots\}$  es un vector positivo,  $y = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots\}$  es un vector negativo y  $z = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$  es un vector neutro.

**Definición 5.** Sea  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Si éste posee elementos positivos y negativos, se dice entonces que  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio con producto interno indefinido o un espacio con métrica indefinida.

El espacio  $\mathfrak{F}$  del Ejemplo (2) con el producto interno dado por la fórmula (5) es un espacio con producto indefinido.

Un interesante resultado, debido a Krein y Shmulyan permite deducir que los conjuntos  $\mathfrak{B}^+$ ,  $\mathfrak{B}^{++}$ ,  $\mathfrak{B}^-$ ,  $\mathfrak{B}^{--}$  no son subespacios lineales.

**Teorema 2.** Sea  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Si existe  $x \in \mathfrak{R}$  tal que  $x$  es positivo, entonces todo vector del espacio se puede representar como la suma de dos vectores positivos.

Ver demostración en [1].

Una de las dificultades que existen al trabajar con espacios que tienen métrica indefinida es la existencia de vectores que no siendo el vector nulo, se comportan como tal:

**Definición 6.** Sea  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno indefinido y sea  $\mathfrak{Q}$  un subespacio lineal de  $\mathfrak{F}$ . Decimos que el vector  $x \in \mathfrak{Q}$  es un vector isotrópico para  $\mathfrak{Q}$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ , para todo  $y \in \mathfrak{Q}$ . Un vector es isotrópico si lo es para  $\mathfrak{F}$ .

Más adelante se dará un ejemplo de un espacio en el cual existen vectores neutros que no son isotrópicos. Sin embargo en espacios semidefinidos (positivos o negativos) debido, por ejemplo a la desigualdad de Cauchy-Schwarz (lema 1), todo vector neutro es isotrópico.

En los espacios de Hilbert el único vector isotrópico es el vector nulo. En los espacios con métrica indefinida esto no es necesariamente cierto. Esto motiva la introducción de la siguiente clasificación de espacios:

**Definición 7.** Un espacio es degenerado si tiene otro vector isotrópico además del vector nulo y es no-degenerado en caso contrario.

**Ejemplo 3.** En el espacio  $\mathfrak{F}$  del Ejemplo (1) con el producto dado por la fórmula (1) el vector  $\{1, 2, 0, 0, \dots\}$  es isotrópico. Como no es nulo, entonces el espacio es degenerado. Si el producto se da por la fórmula (5) el espacio es no degenerado.

Puede ocurrir que un espacio con métrica indefinida tenga vectores isotrópicos para un subespacio y el espacio sea no-degenerado.

Considérese el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.** Se introduce en el conjunto de parejas ordenadas de números complejos ( $\mathbb{C}^2$ ) un producto interno mediante la fórmula

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} - x_2 \overline{y_2}, \quad (6)$$

donde  $x = (x_1, x_2)$  y  $y = (y_1, y_2)$ . Sea  $\mathfrak{L} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 / x_1 = x_2\}$ . Entonces se puede notar que todo vector de  $\mathfrak{L}$  es neutro e isotrópico para el mismo  $\mathfrak{L}$  y sin embargo, el único vector isotrópico para el espacio es el vector  $(0, 0)$ .

Este ejemplo muestra además la existencia de espacios en los cuales existen vectores neutros que no son isotrópicos y también que el conjunto de todos los vectores ortogonales a un subespacio no necesariamente forman un subespacio complementario en cuanto que su suma con aquel subespacio no es igual a todo el espacio. Por esta razón la expresión "complemento ortogonal" no es adecuada.

**Definición 8.** Sea  $\mathfrak{M}$  un subconjunto de un espacio con métrica indefinida  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , llamamos compañero ortogonal de  $\mathfrak{M}$  al conjunto

$$\mathfrak{M}^\perp = \{x \in \mathfrak{F} / \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in \mathfrak{M}\}$$

En el ejemplo dado, el compañero ortogonal del subespacio  $\mathfrak{L}$  es él mismo.

**Definición 9.** Dos conjuntos  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  en  $\mathfrak{F}$  son ortogonales ( $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ ) si  $\langle x, y \rangle = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{M}$  y para todo  $y \in \mathfrak{N}$ . Decimos que un subespacio  $\mathfrak{L}$  es la suma ortogonal de los subespacios  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  si  $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  y además  $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ . Si la suma es directa escribiremos  $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$

**Definición 10.** Un espacio con producto interno indefinido  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es descomponible, si admite una descomposición en la forma  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^- \oplus \mathfrak{F}^0$  donde  $\mathfrak{F}^+ \in \mathfrak{B}^{++}$ ,  $\mathfrak{F}^- \in \mathfrak{B}^{--}$ ,  $\mathfrak{F}^0 \in \mathfrak{B}^0$ . Tal descomposición recibe el nombre de Descomposición Fundamental.

El conjunto  $\mathbb{C}$  del ejemplo anterior es descomponible. En efecto  $\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} / z = \lambda(1, 0)\} \oplus \{z \in \mathbb{C} / z = \lambda(0, 1)\}$

Si  $\mathfrak{F}$  es no-degenerado, la descomposición fundamental tiene la forma

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^- \quad (7)$$

donde  $\mathfrak{F}^+$  y  $\mathfrak{F}^-$  son como arriba.

**Observación 2.** Si  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  admite una Descomposición Fundamental (7), entonces todo  $x \in \mathfrak{F}$  se puede escribir de manera única en la forma

$$x = x^+ + x^-, \quad x^+ \in \mathfrak{F}^+, \quad x^- \in \mathfrak{F}^-.$$

#### 2.4. Espacios de Krein

Entre los espacios de métrica indefinida se destacan por sus múltiples aplicaciones los espacios de los espacios de Krein y Pontryagin que son una generalización de los espacios de Hilbert.

**Definición 11.** Un espacio con producto interior  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  que admite una descomposición fundamental de la forma (7) donde  $(\mathfrak{H}^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\mathfrak{H}^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$  son espacios de Hilbert recibe el nombre de espacio de Krein.

En adelante usaremos la notación  $\mathfrak{K}$  para los espacios de Krein y  $\mathfrak{K}^+$ ,  $\mathfrak{K}^-$  para los subespacios positivos y negativos de la descomposición fundamental, es decir :

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^- \quad (8)$$

**Ejemplo 5.** Sea  $\mathfrak{K} = l_2$  con el producto interno siguiente:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k \overline{y_k}, \text{ donde } x = \{x_k\} \text{ y } y = \{y_k\}$$

Este espacio admite la descomposición fundamental:  $l_2 = l_i \oplus l_p$ , donde  $l_p$  es el espacio generado por la familia de sucesiones que constan de 1 en una única posición par y 0 en las demás, mientras que  $l_i$  es generado por la familia de sucesiones con 1 en alguna posición impar y 0 en las demás posiciones.

Nótese que los vectores de  $l_i$  son positivos con respecto al producto interno dado y los vectores de  $l_p$  son negativos. El único vector isotrópico es el vector nulo (la sucesión formada por ceros). Además  $l_i$  y  $l_p$  son subespacios ortogonales que tienen al vector nulo como único vector común.

Por otro lado si  $\mathfrak{U}$  es el subespacio formado por todos los vectores que tienen 1 en las primeras  $k$  posiciones y 0 en las demás posiciones, donde  $k \leq n$  es un número natural par y  $n$  es un natural fijo, entonces el compañero ortogonal de  $\mathfrak{U}$  es el mismo.

Una descomposición fundamental de  $\mathfrak{K}$  permite definir un producto interno sobre todo el espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  mediante la siguiente fórmula:

$$[x, y] = \langle x^+, y^+ \rangle - \langle x^-, y^- \rangle, \text{ siendo } x = x^+ + x^-, y = y^+ + y^- \in \mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-.$$

**Definición 12.** Dado un espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  con descomposición fundamental (8), denotaremos  $|\mathfrak{K}|$  al espacio de Hilbert obtenido al reemplazar  $\mathfrak{K}^-$  por su antiespacio  $-\mathfrak{K}^-$ :

$$|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}^+ \oplus -\mathfrak{K}^-, \quad (9)$$

donde la suma directa considerada es la suma directa ortogonal entre espacios de Hilbert. Nótese que  $[\cdot, \cdot] = \langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathfrak{K}|}$ .

**Ejemplo 6.** Sea  $\mathfrak{H}$  el espacio del Ejemplo (1) con el producto dado por la fórmula (5). Una descomposición fundamental  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+ \oplus \mathfrak{H}^-$  donde  $\mathfrak{H}^-$  es el espacio generado por la colección enumerable de vectores  $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2n}, \dots\}$  y  $\mathfrak{H}^+$  es generado por  $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2n-1}, \dots\}$  donde  $e_i = \{0, 0, \dots, 1, 0, \dots\}$  el vector que tiene 1 en la  $i$ -ésima entrada y 0 en todas las demás ( $i = 1, 2, \dots$ ). Entonces  $|\mathfrak{H}| = l_2$

**Observación 3.** Dado un espacio de Krein  $\mathfrak{K}$ , la suma en (7) también es ortogonal con respecto al producto interior del espacio de Hilbert asociado (9).

En efecto, si  $x^+ \in \mathfrak{K}^+$  y  $x^- \in \mathfrak{K}^-$ , entonces  $x^+ = x^+ + 0$ ,  $x^- = x^- + 0$ , por lo que

$$\langle x^+, x^- \rangle_{|\mathfrak{K}|} = \langle x^+, 0 \rangle_{\mathfrak{K}} - \langle 0, x^- \rangle_{\mathfrak{K}} + \langle 0, 0 \rangle_{\mathfrak{K}} + \langle x^-, x^- \rangle_{\mathfrak{K}} = 0.$$

En esa igualdad los sub-índices indican cuál producto se está considerando en cada situación y se ha considerado el hecho de que  $\langle x^+, x^- \rangle_{\mathfrak{K}} = 0$ .

**Definición 13.** Sea  $\mathfrak{K}$  un espacio de Krein con descomposición fundamental  $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , considérense los operadores  $P^+ : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}^+, P^- : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}^-; J : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$  dados por

$$P^+(x^+ + x^-) = x^+, P^-(x^+ + x^-) = x^-, J(x^+ + x^-) = x^+ - x^- \quad (10)$$

Los operadores  $P^+, P^-$  se llaman *Proyectores Fundamentales* y el operador  $J$  se llama *Simetría Fundamental* asociados a la descomposición (7).

**Definición 14.** Sea  $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Krein, considérese la siguiente forma sesquilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\langle x, y \rangle_J := \langle Jx, y \rangle$$

A esta se le llama *J-producto interno* y a la norma inducida por  $\|\cdot\|_J = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_J}$  se le llama *J-norma*.

**Ejemplo 7.** En el Ejemplo (6), se tiene que el *J-producto* coincide con el producto de  $l_2$

**Definición 15.** Sea  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$  y  $x, y \in \mathfrak{K}$ . Se dice que  $x$  es *ortogonal* a  $y$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$  y es denotado por  $x \perp y$ .

$x$  es *J-ortogonal* a  $y$  si  $\langle x, y \rangle_J = 0$  y se denota por  $x \perp_J y$  o  $x(\perp)y$ .

**Observación 4.** La *Simetría Fundamental* y el producto interno indefinido satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $J^2 = Id, J = J^{-1}$ , donde  $Id$  es el operador identidad.
2.  $P^+ = \frac{J+Id}{2}$ , en forma similar  $P^- = \frac{Id-J}{2}$
3.  $\langle x, x \rangle_J \geq 0, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_J \|y\|_J$ .

**Lema 2.** Si  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$  es una descomposición fundamental del espacio no-degenerado  $\mathfrak{K}$  y  $J$  es la correspondiente simetría fundamental, entonces  $\mathfrak{K}^+$  es *J-ortogonal* a  $\mathfrak{K}^-$ .

**Definición 16.** El sistema  $\{e_j\}_{j \in A}$  en  $\mathfrak{K}$ , donde  $A$  es cualquier conjunto arbitrario de índices, es llamado *J-ortonormal* si  $\langle e_j, e_i \rangle = \pm \delta_{ji}$ , donde  $\delta_{ji}$  es la delta Kronecker.

**Definición 17.** Un sistema *J-ortonormal*  $\{e_j\}_{j \in A}$  en  $\mathfrak{K}$ , se dice *maximal* si no hay otro sistema *J-ortonormal* que lo contenga, y se dice ser *J-completo* si no hay un vector *J-ortogonal* a este sistema.

El siguiente teorema muestra una importante propiedad de los espacios de Krein que nos permite clasificarlos de acuerdo a las dimensiones de los subespacios positivos y negativos de una descomposición fundamental:

**Teorema 3.** Sea  $\mathfrak{K}$  un espacio de Krein y sean

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \mathfrak{K}_1^+ \oplus \mathfrak{K}_1^-, \mathfrak{K}_1^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}_1^- \subseteq \mathfrak{B}^{--} \\ \mathfrak{K} &= \mathfrak{K}_2^+ \oplus \mathfrak{K}_2^-, \mathfrak{K}_2^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}_2^- \subseteq \mathfrak{B}^{--} \end{aligned}$$

dos descomposiciones fundamentales de  $\mathfrak{K}$ . Entonces:

1. La dimensión de  $\mathfrak{K}_1^+$  es igual a la dimensión de  $\mathfrak{K}_2^+$ .
2. La dimensión de  $|\mathfrak{K}_1^-|$  es igual a la dimensión de  $|\mathfrak{K}_2^-|$ .



Sea  $\mathfrak{K}$  un espacio de Krein, con descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

De acuerdo a este teorema se puede definir el rango de positividad (o índice positivo) de un espacio de Krein como la dimensión de  $\mathfrak{K}^+$  y el rango de negatividad (o índice negativo) de un espacio de Krein como la dimensión de  $|\mathfrak{K}^-| = -\mathfrak{K}^-$ .

Vimos arriba ejemplos de subespacios tales que  $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^\perp \neq \mathfrak{K}$ . Esto motiva la siguiente diferenciación de subespacios:

**Definición 18.** *Un subespacio  $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$  es ortocomplementado si  $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^\perp = \mathfrak{K}$ .*

**Ejemplo 8.** *En el espacio  $\mathfrak{F}$  del Ejemplo (1) con el producto (1) el espacio generado por  $\{1, 0, 0, 0, \dots\}$  y  $\{0, 1, 0, 0, \dots\}$  no es ortocomplementado. Mientras que el espacio generado por  $\{e_5, e_6, \dots, e_n, \dots\}$  si lo es.*

Los siguientes teoremas nos dan algunas caracterizaciones de los subespacios ortocomplementados:

**Teorema 4.** *Un subespacio  $\mathfrak{L}$  del espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  es ortocomplementado si y sólo si:*

1.  $\mathfrak{L}$  es cerrado y
2.  $\mathfrak{L}$  es un espacio de Krein.

**Teorema 5.** *Un subespacio  $\mathfrak{L}$  del espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  es ortocomplementado si y sólo si:*

1.  $\mathfrak{L}$  es cerrado,
2.  $\mathfrak{L}$  es no-degenerado, y
3. para cualquier descomposición

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+ \oplus \mathfrak{L}^-; \mathfrak{L}^+ \subset \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{L}^- \subset \mathfrak{B}^{--} \tag{11}$$

de  $\mathfrak{L}$ , una descomposición

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-; \mathfrak{K}^+ \subset \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}^- \subset \mathfrak{B}^{--} \tag{12}$$

de  $\mathfrak{K}$  se puede encontrar, así que

$$\mathfrak{L}^+ \subset \mathfrak{K}^+ \quad \mathfrak{L}^- \subset \mathfrak{K}^- \tag{13}$$

**Definición 19.** *Un subespacio  $\mathfrak{L}$  de  $\mathfrak{K}$  es uniformemente positivo si  $\langle x, x \rangle \geq \alpha \|x\|_J^2$ ,  $x \in \mathfrak{L}$  y uniformemente negativo si  $\langle x, x \rangle \leq -\beta \|x\|_J^2$ ,  $x \in \mathfrak{L}$ , para  $\alpha$  y  $\beta$  números positivos que dependen de  $\mathfrak{L}$ .  $\mathfrak{L}$  es uniformemente definido si es uniformemente positivo o uniformemente negativo.*

**Ejemplo 9.** *Sea  $\mathfrak{F}$  como en el Ejemplo (1) y la fórmula (5). Sea  $\mathfrak{L}$  la variedad lineal (subespacio) cuyos vectores tienen la forma:  $\{\alpha, 0, \alpha, 0, x_5, 0, x_7, \dots\} \in \mathfrak{F}$  con ceros en las entradas pares y  $\alpha \geq 1$ . Entonces si  $x \in \mathfrak{L}$  tendremos que  $\langle x, x \rangle = 2\alpha^2 + \sum_{n=5}^{+\infty} |x_n|^2 \geq \frac{1}{2} [2\alpha^2 + \sum_{\substack{n=5 \\ n\text{-impar}}}^{+\infty} |x_n|^2] = \frac{1}{2} \|x\|_J^2$*

**Teorema 6.** *Un subespacio semi-definido de  $\mathfrak{K}$  es ortocomplementado si y sólo si es cerrado y uniformemente definido.*

Para un subespacio posiblemente indefinido  $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$  se tiene:

**Teorema 7.** *Un subespacio  $\mathfrak{L}$  del espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  es ortocomplementado si y sólo si  $\mathfrak{L}$  es la suma directa ortogonal de un subespacio cerrado uniformemente positivo y un subespacio cerrado uniformemente negativo.*

**Lema 3.** *Un subespacio de  $\mathfrak{K}$  es uniformemente positivo (uniformemente negativo) si y sólo si su clausura también lo es.*

Recuérdese que si  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$  es una descomposición fundamental y  $J$  es la simetría fundamental asociada a esa descomposición, entonces se induce sobre  $\mathfrak{K}$  una topología mediante la norma  $\|x\|_J^2 = \langle Jx, x \rangle$ . A esta topología se le llama topología fuerte y, como se verá más adelante, es independiente de  $J$ .

El siguiente teorema extiende el teorema de representación de Riesz a espacios de Krein.

**Teorema 8.** *Sea  $f : \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal y continuo. Entonces existe un único vector  $y \in \mathfrak{K}$  tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x \in \mathfrak{K}.$$

*Demostración.* Conforme a la topología definida en  $\mathfrak{K}$  se tiene que  $f : |\mathfrak{K}| \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional lineal y continuo.

Por el Teorema (1) existe  $z \in \mathfrak{K}$  tal que  $f(x) = \langle x, z \rangle_J$  para todo  $x \in \mathfrak{K}$ . Como  $\langle x, z \rangle_J = \langle x, Jz \rangle$ , tomando  $y = Jz$  se tiene la existencia. Para verificar la unicidad se utiliza el hecho de que  $\mathfrak{K}$  es no-degenerado.  $\square$

## 2.5. Espacios de Pontryagin

**Definición 20.** *un espacio de Pontryagin es un espacio de Krein con uno de sus índices finito.*

Por lo tanto un espacio de Pontryagin es un espacio de Krein  $\mathfrak{K}$  con descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

tal que la dimensión de  $\mathfrak{K}^+$  o la dimensión de  $\mathfrak{K}^-$  es finita.

**Ejemplo 10.** *Sea  $\mathfrak{F}$  el espacio del Ejemplo (1) y  $x = \{x_n\}$ ,  $y = \{y_n\}$  elementos de  $\mathfrak{F}$ . Defínase*

$$\langle x, y \rangle = -x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2 - x_3\bar{y}_3 + \sum_{n=4}^{+\infty} x_n\bar{y}_n$$

*Este es un espacio de Pontryagin con descomposición fundamental  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^-$  donde  $\mathfrak{F}^+$  es el subespacio generado por los vectores  $\{e_4, e_5, \dots\}$  y  $\mathfrak{F}^-$  es generado por  $\{e_1, e_2, e_3\}$  como  $\dim \mathfrak{F}^- = 3 < +\infty$ , entonces  $(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Pontryagin*

Por definición todo espacio de Pontryagin es un espacio de Krein, todo espacio de Hilbert es un espacio de Pontryagin y todo espacio con producto interno no degenerado y de dimensión finita es un espacio de Pontryagin.

Al hablar de espacio de Pontryagin se supondrá que el índice finito es el negativo. Este índice finito se suele denotar por  $\kappa$  y el símbolo  $\Pi_\kappa$  denotará un espacio de Pontryagin de índice  $\kappa$ .

Algunos aspectos de la geometría de los espacios de Pontryagin son considerados en los siguientes teoremas:

**Teorema 9.**

1. Si  $\mathcal{Q}$  es una variedad lineal definida negativa de un espacio  $\Pi_\kappa$  entonces  $\dim(\mathcal{Q}) \leq \kappa$ .
2. Si  $\mathcal{Q}$  es una variedad lineal definida negativa de un espacio  $\Pi_\kappa$  entonces  $\mathcal{Q}$  es maximal definida negativa si y sólo si  $\dim(\mathcal{Q}) = \kappa$ .
3. Si  $\mathcal{Q}$  es una variedad lineal  $\kappa$ -dimensional y definida negativa de un espacio  $\Pi_\kappa$  entonces existe una descomposición fundamental

$$\Pi_\kappa = \Pi^+ \oplus \Pi^-, \Pi^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}$$

tal que  $\Pi^- = \mathcal{Q}$ .

*Espacios pre-Pontryagin*

**Definición 21.** Sea  $\kappa$  un entero no negativo. Un espacio pre- $\Pi_\kappa$  es un espacio  $\mathfrak{F}$  con producto interno no-degenerado, que contiene una variedad lineal maximal definida negativa de dimensión  $\kappa$ .

**Ejemplo 11.** Sea  $\mathfrak{F}$  el espacio de las sucesiones que tienen a lo sumo una cantidad finita de términos no-nulos. Sean  $x = \{x_n\}$  y  $y = \{y_n\}$  elementos de este espacio. Defínase

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{\kappa=1}^{10} x_n \bar{y}_n + \sum_{\kappa=11}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$$

$(\mathfrak{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio pre- $\Pi_{10}$ .

Un espacio pre-Pontryagin es un espacio  $\mathfrak{F}$  con producto interno tal que  $\mathfrak{F}$  o su antiespacio es un espacio pre- $\Pi_\kappa$ .

**Observación 5.** (Una fórmula para las  $J$ -normas). Sea  $\mathfrak{F}$  un espacio pre- $\Pi_\kappa$ , sea  $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{F}$  una variedad lineal definida negativa de dimensión  $\kappa$ . Entonces  $\mathcal{N}^\perp$  es un espacio pre-Hilbert y además

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp.$$

Sea  $J$  la simetría fundamental asociada a esta descomposición y sea  $\|\cdot\|_J$  la norma correspondiente. Sea  $\{e_1, \dots, e_\kappa\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{N}$ . Si  $x \in \mathfrak{F}$  entonces  $x = x^+ + x^-$  ( $x^- \in \mathcal{N}$ ,  $x^+ \in \mathcal{N}^\perp$ ), donde

$$x^- = - \sum_{j=1}^{\kappa} \langle x, e_j \rangle e_j,$$

entonces

$$\|x\|_J^2 = \langle x^+, x^+ \rangle - \langle x^-, x^- \rangle = \langle x^+ + x^-, x^+ + x^- \rangle - 2 \langle x^-, x^- \rangle = \langle x, x \rangle - 2 \langle x^-, x^- \rangle,$$

de donde se deduce que

$$\|x\|_J^2 = \langle x, x \rangle + 2 \sum_{j=1}^{\kappa} |\langle x, e_j \rangle|^2. \tag{14}$$

Un poderoso resultado establece que a pesar de que las  $J$ -normas son diferentes en  $\mathfrak{R}$ , porque cada una de ellas depende de la descomposición fundamental correspondiente, y que el valor de  $\|x\|_J$  para un  $x$  fijo en  $\mathfrak{R}$  puede recorrer un rango amplio de valores al variar la descomposición fundamental [10], todas las  $J$ -normas son equivalentes y por ello inducen la misma topología denominada topología fuerte en  $\mathfrak{R}$ . Es con respecto a esta topología que se definen los conceptos topológicos de continuidad, acotación, etc. Pero eso será eventualmente tema de un próximo artículo.

### **3. Conclusión**

Para concluir este primer artículo sobre espacios de Krein, cuyo propósito principal es el de generar entre los lectores de esta revista la curiosidad por el estudio de estos espacios, se debe comentar que el estudio de los espacios de Krein ha encontrado mucha aceptación en el mundo matemático contemporáneo y son ya innumerables los autores que han puesto su grano de arena en esta hermosa teoría.

Los resultados van desde detalles geométricos pasando por las aplicaciones en la mecánica cuántica, las ecuaciones diferenciales, la teoría espectral de operadores, etc., y recientemente, la teoría de marcos.

## Referencias

- [1] Bognár, J.: *Indefinite Inner Product space*. Berlin-New York: Springer-Verlag 1974.
- [2] Bruzual, R.: *Espacios con métrica indefinida*. Laboratorio de Formas en Grupos, Centro de Análisis, Escuela de Matemáticas, Universidad Central de Venezuela, Septiembre 2007.
- [3] Dritschel M., Rovnyak J., *Theorems for Contraction operators on Krein Spaces, Operator Theory. Advances and Applications*. Vol.47, Birkhauser Verlag, Basel, 1990.
- [4] Iohvidov, I.S.: *Unitary operators in a space with an indefinite metric*. Zap. Mat. Otd. Fiz-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obsc. (4) 21, 79-86 (1949) [Russian]
- [5] Iohvidov, I.S., Krein, M.G.: *Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric*. I. Trudy Moskov. Mat. Obsc. 5. 367-432 (1957) [Russian]
- [6] Krein, M.G.: *An application of the fixed-point principle in the theory of linear transformations of spaces with an indefinite metric*. Upehi Mat. Nauk 5, no. 2, 180-190 (1950) [Russian]
- [7] L. de Branges: *Complementation in Krein spaces*. Trans. American Math Soc. 305 (1988), 277-291.
- [8] Langer, H.: *On J-hermitian operators*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 134, 263-266 (1960) [Russian].
- [9] Langer, H.: *Invariante Teilräume definisierbarer J-selbstadjungierter operatoren*. Ann. Akad. Sci. Fenn. Ser. A.I, no. 475 (1971).
- [10] Langer M., Luger A.: *Operator theory: advances and applications*. On norms indefinite in inner product spaces. Vol 198, Birkhäuser verlag, Basel, pags. 259-264 (2009) [Suiza]
- [11] Pesonen, E.: *Über die spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Raumen mit indefiniter Metrik*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, no. 227 (1956)
- [12] Pontryagin, L.S.: *Hermitian operators in spaces with indefinite metric*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 8, 243-280 (1944) [Russian]
- [13] Schwarz.: *Sous-espaces hilbertiens despaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)* J. Analyse Math. 13 (1964), 115-256 .

Para citar este artículo: Boris Lora et al. 2016, Espacios con métrica indefinida. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>

## Estabilidad de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas

### Stability of certain Systems of Impulsive Differential Equations

Romina Cardo<sup>1</sup> & Alvaro Corvalán<sup>2</sup>

*Pedro Morán 3831 2º C, C.A.B.A., Argentina, C1419HKS*

<sup>1</sup>*rcardo@ungs.edu.ar*, <sup>2</sup>*acorvala@ungs.edu.ar*

---

---

#### Resumen

Los criterios suficientes usuales que garantizan la estabilidad de un sistema diferencial lineal impulsivo requieren condiciones muy particulares sobre las matrices que definen el sistema, que raramente se satisfacen al usar estos modelos para problemas aplicados reales. Aquí presentamos un criterio sencillo que no requiere que las matrices tengan una forma especial, o que tengan alguna relación particular entre ellas.

*Palabras claves:*

Sistemas Impulsivos, estabilidad, Descomposición en Valores Singulares

#### Abstract

The usual sufficient criteria to ensure the stability of an impulsive linear differential system require very particular conditions on the matrices that define the system, which are rarely satisfied when using these models to realistic applied problems. Here we present a simple approach that does not require nor a special form for the matrices neither a particular relationship between them.

*Keywords:*

Impulsive Systems, Stability, Singular Value Decomposition

---

---

#### 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones diferenciales impulsivas, como los descritos abajo, están regidos en ciertos intervalos de tiempo, por una ecuación diferencial, pero en una sucesión de instantes de tiempo, se perturba el valor de la solución en ese instante, con un impulso puntual, y el valor así obtenido pasa a ser el valor

inicial para el intervalo temporal siguiente en que vuelve a obtenerse la solución de la ecuación diferencial en ese intervalo.

Estas ecuaciones impulsivas han sido usadas exitosamente para modelizar la evolución temporal de poblaciones de especies ictícolas, marítimas o lacustres, donde suelen haber impulsos puntuales consistentes en capturas masivas o siembras de alevines en períodos puntuales (véase por ejemplo las referencias [2] y [7] para la relación con los modelos impulsivos y [3] y [4] para las consideraciones biológicas)

En este trabajo, consideramos la estabilidad de casos lineales de ciertos problemas de ecuaciones diferenciales impulsivas.

## 2. MODELOS IMPULSIVOS:

Estas ecuaciones impulsivas en general se pueden describir como

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \text{ si } t \neq \tau_k \\ X(\tau_k) = g(\tau_k, X(\tau_k^-)) \text{ si } t = \tau_k \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$  son los tiempos de impulso. La dependencia de  $g(\tau_k, X(\tau_k^-))$  de los valores de  $X$  por la izquierda permite en algunos trabajos (por ejemplo [7]) usar como criterio de impulso el valor de algunos operadores maximales laterales como la función maximal de Hardy-Littlewood a izquierda  $M^-$ , o el operador de Hardy (ver [5], [8] y [9] para definiciones y propiedades).

Si bien nos interesan problemas con  $f(t, X(t))$  generales, podemos considerar en una primera aproximación funciones lineales, autónomas respecto de  $t$ , es decir, con  $AX(t)$  en lugar de  $f(t, X(t))$ , interpretando dichas ecuaciones como la situación estacionaria para  $f$  a partir de ciertos valores de  $t$ , en adelante, - asumiendo que  $f(t, \cdot)$  se comporte en forma casi lineal «a largo plazo»-. También supondremos  $g \approx BX$ .

Es decir, trabajaremos con sistemas de la forma

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \text{ si } t \neq \tau_k \\ X(\tau_k) = BX(\tau_k^-) \text{ si } t = \tau_k \end{cases} \quad (2)$$

Vale la pena mencionar que en el caso general (1), solo puede encararse la cuestión de la estabilidad de manera empírica, ya que no se conocen criterios generales.

Consideramos a continuación algunos criterios para el Caso Lineal (2):

## 3. CRITERIOS:

Si bien se conocen algunos criterios para los sistemas de la forma (2), veremos que suelen tener condiciones muy restrictivas acerca de  $A$  o  $B$ , que están asociadas a hipótesis necesarias para las demostraciones, pero que no parecen necesariamente asociadas a la estabilidad de los sistemas.

Una cuestión que sí tiene influencia en la estabilidad de los sistemas, es la distribución de los tiempos de impulsos. Para ello definamos lo siguiente:

**Definición:** Decimos que se cumple la condición de tiempos de *Impulso Aproximadamente Lineales (IAL)* si  $\exists p, k$  tales que:

$$|i((s, t]) - p \cdot (t - s)| \leq k \text{ si } s < t \quad (3)$$

donde la función  $i$  cuenta los tiempos de impulso, o sea, notamos:  $i((s, t]) = \#\{\tau_k / s < \tau_k \leq t\}$ .

Es decir que la condición (3) dice esencialmente que la cantidad de impulsos entre  $s$  y  $t$ , es igual a una función lineal de  $(t - s)$  ( es decir:  $p \cdot (t - s)$  ) salvo un error de  $\pm k$ , acotado.

Si bien en un caso puramente continuo (sin impulsos), se requiere que  $A$  sea *ordinariamente estable*:  $Re(\lambda) < 0, \forall \lambda$  (o sea, las partes reales de los autovalores de  $A$  son negativas); y en el caso discreto ( $X_{k+1} = BX_k$ ) se requiere que  $B$  sea *discretamente estable*:  $|\mu| < 1$  (o sea, los módulos de los autovalores de  $B$  son menores que 1), y tales condiciones son suficientes en los casos puramente continuo o puramente discreto, respectivamente, en el caso impulsivo puede pasar que  $A$  sea ordinariamente estable y  $B$  sea discretamente estable, pero que sin embargo el sistema [2] no sea estable para cierta distribución de tiempos de impulso ( confrontar con los resultados de la referencia [11]).

Una condición que suele considerarse asintóticamente estable en el caso impulsivo es que  $Re(\lambda) < 0$ , para  $\lambda$  los autovalores de  $A + p \cdot \ln(B)$  donde  $p$  es la constante mencionada en [3] y  $\ln(B)$  se define a partir de un desarrollo en serie correspondiente para un cálculo funcional de matrices.

Un par de criterios que se pueden mencionar son:

· **Teorema 1** ( BAINOV & SIMEONOV [12]) : Si vale:

- a) la condición [3] para los tiempos de impulso
- b)  $A$  y  $B$  conmutan
- c)  $B$  es inversible

Entonces la condición siguiente: d)  $Re(\lambda) < 0$ , para todos los autovalores  $\lambda$  de  $A + p \cdot \ln(B)$  es necesaria y suficiente para que el sistema (2) sea asintóticamente estable.

**Teorema 2** (NAULIN & TAPIA [11]): Si se cumplen las condiciones a), c) y d) del Teorema 1 anterior, y si vale b')  $A$  y  $B$  son matrices triangulares superiores, entonces el sistema (2) es asintóticamente estable. (Nótese que la condición es suficiente, aunque podría no ser necesaria).

Tanto la condición b) del Teorema 1, como la condición b') del Teorema 2, son más bien artificiales y no suceden en general en las situaciones que nos ocupan (ver bibliografía) en las aplicaciones ( ni siquiera como situación estacionaria «a largo plazo»).

Proponemos en cambio, un criterio diferente:

Notemos primero que en cada intervalo  $[\tau_k, \tau_{k+1})$  la ecuación es ordinaria, de la forma:  $\begin{cases} X' = AX \\ X(\tau_k) = X_k \end{cases}$  y la solución es por lo tanto  $X(t) = e^{A(t-\tau_k)} X_0$  (ver por ejemplo la referencia [6]); por lo tanto, para un tiempo  $t$  cualquiera, con  $t > \tau_N > \tau_{N-1} > \dots > \tau_0$  y  $\tau_{N+1} \geq t$ , la solución de (2) es:

$$X(t) = e^{A(t-\tau_N)} B e^{A(\tau_N-\tau_{N-1})} B e^{A(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})} B \dots e^{A(\tau_2-\tau_1)} B e^{A(\tau_1-\tau_0)}$$

$$\text{Llamemos: } M_{N+1} = e^{A(t-\tau_N)}$$

$$M_N = e^{A(\tau_N-\tau_{N-1})}$$

$$M_{N-1} = e^{A(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})}$$

·

·

·

$$M_k = e^{A(\tau_k-\tau_{k-1})}$$

Entonces:

$$X(t) = M_{N+1} B M_N B M_{N-1} B \dots M_2 B M_1 X_0 \text{ (donde } X_0 = X(\tau_0) \text{ ) si } t \neq \tau_{N+1}$$

(en el caso  $t = \tau_{N+1}$  es  $X(t) = B M_{N+1} B M_N B M_{N-1} B \dots M_2 B M_1 X_0$  y el análisis es similar agregando el factor  $B$  de la izquierda).



Consideramos entonces la descomposición en valores singulares (s.v.d.) de  $B$  y de cada matriz  $M_k = e^{A(\tau_k - \tau_{k-1})}$ .

Si los valores singulares de las matrices  $M_k$  (que son función solamente de  $A$  y de los intervalos  $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ ) son tales que la productoria del mayor valor singular de cada  $M_k$  por la potencia  $n$ -ésima del mayor valor singular de  $B$ , es menor o igual que 1, entonces el sistema (2) es estable.

En efecto, si escribimos  $B = USV^t$  y  $M_k = U_k S_k V_k^t$  sus respectivas descomposiciones en valores singulares, entonces:

$\|X(t)\| = \|U_{N+1} S_{N+1} V_{N+1}^t U S V^t U_N S_N V_N^t U S V^t \dots U S V^t U_1 S_1 V_1^t X_0\|$ , pero aunque las matrices  $U, U_k, V$  y  $V_k^t$  no conmutan en general, como son ortogonales y tenemos que si  $O$  es ortogonal  $\|OX\| = \|X\|$  entonces los factores  $U, U_k, V$  y  $V_k^t$  conservan la norma de los vectores que multiplican; y las matrices  $S$  y  $S_k$  son

diagonales, y si  $D$  es diagonal,  $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & d_{NN} \end{pmatrix}$  cumple que  $D \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} X_1 \\ \dots \\ d_{nn} X_n \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ , y, por lo

tanto,  $\|DX\| \leq \max(d_{jj}) \|X\| = d(1, 1) \|X\|$  si  $d_{11} \geq \dots \geq d_{NN}$ , ya que se suele considerar (ordenados) los valores singulares (la diagonal de  $S$  o de  $S_k$ ).

Entonces:  $\|X(t)\| \leq 1 \cdot S_{N+1}(1, 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot S(1, 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot S_N(1, 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot S(1, 1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot S(1, 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot S_1(1, 1) \cdot \|X_0\|$  donde  $S(1, 1)$  y  $S_k(1, 1)$  son los mayores valores singulares de  $B$  y de  $M_k$  respectivamente.

Por lo tanto, si  $\left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1, 1)\right) \cdot (S(1, 1))^N \leq 1$  tenemos que:  $\|X(t)\| \leq \|X_0\|$  para todo  $t$ , luego el sistema es estable.

Cuando además pueda asegurarse que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1, 1)\right) \cdot (S(1, 1))^N = 0$  tendremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$  y la estabilidad será asintótica.

#### 4. CONSIDERACIONES FINALES y EJEMPLOS:

Nótese que el criterio que presentamos no requiere una relación específica entre  $A$  y  $B$  (como que conmuten) ni que tengan una forma particular.

Si bien el criterio es suficiente, pero no necesario, en caso de que

$\left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1, 1)\right) \cdot (S(1, 1))^N$  no esté acotado cuando  $N \rightarrow \infty$ , y si  $X_0$  y  $A$  son tales que  $e^{A(t-\tau_k)} X$  pase arbitrariamente cerca de la dirección del primer vector propio de  $B$ , entonces el sistema no será estable.

Por otra parte cuando pueda asegurarse que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1, 1)\right) \cdot (S(1, 1))^N = 0$  tendremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$  y la estabilidad será asintótica. Esto equivale a que diverja a  $-\infty$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(S(1, 1) \cdot S_k(1, 1)) =$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{N+1} S(1, 1) \cdot S_k(1, 1)\right)$ . Esto ocurre, por ejemplo, si existe  $K < 1$  tal que  $S_k(1, 1) \cdot S(1, 1) \leq K < 1$ , de modo que  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(S(1, 1) \cdot S_k(1, 1)) = -\infty$  y entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$

En los gráficos finales presentamos ejemplos de la evolución de sistemas que cumplen nuestro criterio, tanto para tiempos de impulso equidistantes como para tiempos de impulso variables sorteados aleatoriamente.

ALGUNOS EJEMPLOS:

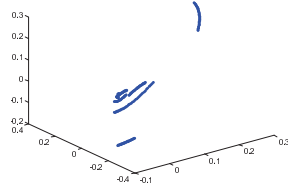


Figura 1. TIEMPOS DE IMPULSO EQUIDISTANTES

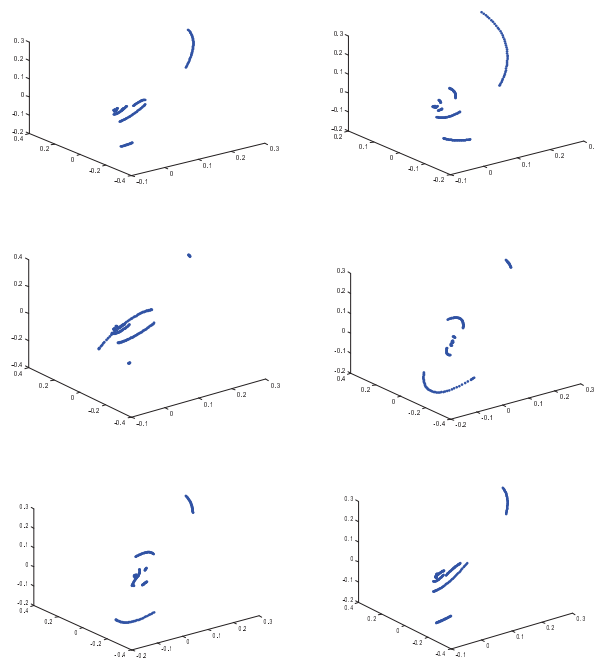


Figura 2. EJEMPLOS CON TIEMPOS DE IMPULSOS ALEATORIOS

AGRADECIMIENTOS: A Dios por todas sus bendiciones. Al anónimo referee por sus valiosas sugerencias que nos permitieron mejorar el texto y el formato de este trabajo.

## Referencias

- [1] Abramson, Guillermo. «La matemática de los sistemas biológicos», UNC (CNEA). 2013.
- [2] Córdova Lepe, F., Del Valle, R. Robledo, G. «A pulse fishery model with closures as function of the catch: Conditions for Sustainability.», *Mathematical Biosciences*. Vol. 239, Issue 1, 2012.
- [3] Bayo, Rodrigo E. «Comienzos de la truchicultura en la Provincia de Tierra del Fuego», Asociación Argentina de Acuicultura, 2013.
- [4] Municipalidad distrital de Ragash, Publicaciones del Centro de Estudios para el desarrollo y la participación. «Manual de Crianza de Truchas» 2009.
- [5] Duoandikoetxea Zuazo, J. «Fourier Analysis», Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2001.
- [6] E.A. Coddington and N. Levinson, «Theory of ordinary differential equations», (McGraw-Hill, 1955).
- [7] Cardo, R. & Corvalán, A , «Regulación de especies competitivas bajo modelos impulsivos de pesca-siembra regidos por operadores maximales», arXiv:1504.03345.
- [8] Berkovits, L. «Parabolic Muckenhoupt weights in the Euclidean space», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 379, Issue 2, 15 July 2011, Pages 524–537.
- [9] Ombrosi, S. «Weak weighted inequalities for a dyadic one-sided maximal function in  $\mathbb{R}^n$ .» *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133 (2005), pp. 1769–1775.
- [10] Corvalán, A. «Some topics on multidimensional one-sided Maximal operators». En preparación.
- [11] Naulin, R.M. y Tapia, C.R., «Estabilidad de Sistemas Lineales Impulsivos», *Revista Colombiana de Matemáticas*, Vol. 29 (1995), págs 103-111.
- [12] Bainov, D.D. & Simeonov, P.S., «Systems with Impulse Effect (Stability, Theory and Applications)», Ellis Horwood and Jhon Wiley, New York, 1989.

Para citar este artículo: Romina Cardo & Alvaro Corval 2016, “Estabilidad de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>

## Sobre funciones $C^2$ -convexas y dinámica discreta

### On $C^2$ -convex functions and discrete dynamic

N. Romero

*Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Departamento de Matemática. Decanato de Ciencias y Tecnología. Apartado Postal 400. Barquisimeto, Venezuela.*

*nromero@ucla.edu.ve*

---

---

#### Resumen

En este artículo reportamos varios conocidos resultados sobre la dinámica dada por la interacción de endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  en los que al menos una de sus funciones coordenadas tiene cierto tipo de convexidad ( $C^2$ -convexidad). Expondremos las propiedades básicas (analíticas y geométricas) de esta clase de funciones convexas que tienen importante influencia en los fenómenos dinámicos que son discutidos; también presentaremos algunos problemas que consideramos interesantes abordar.

*Palabras claves:* Funciones  $C^2$ -convexas, Dinámica discreta, Endomorfismo de  $\mathbb{R}^n$

#### Abstract

In this paper we review several known results on the dynamics given by the iteration of endomorphisms on  $\mathbb{R}^n$  in which at least one of the coordinate functions has certain type of convexity ( $C^2$ -convexity). We will expose the basic properties (analytical and geometric) of this kind of functions which have important influence in the discussed dynamics phenomena. We will also present some problems that we consider interesting to approach.

*Keywords:*

$C^2$ -convex functions, Discrete dynamic, endomorphism's of  $\mathbb{R}^n$ .

---

---

#### 1. Funciones $C^2$ -convexas

La convexidad tiene un destacado papel en importantes problemas de diversas áreas de la matemática y otras ciencias. En esta sección presentaremos una clase especial de funciones convexas, incluyendo algunas de sus propiedades analíticas y geométricas que consideramos útiles para abordar el estudio de sistemas dinámicos discretos provenientes de la iteración de endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  para los cuales al menos una de

sus funciones componentes pertenece a esa clase especial. Gran parte de ello puede encontrarse, por ejemplo, en [27], [28] y [30].

Recordemos que un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice *convexo* si para todo  $x, y \in K$  y cada  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ . Una función  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K$  convexo, es dicha *convexa* siempre que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{1}$$

para todo  $x, y \in K$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . La convexidad de  $f$  es denominada estricta si la desigualdad en (1) es estricta para todos los valores de  $\lambda$  diferentes de 0 y 1. Es bien conocido, ver Theorem 2.33 en [12] o Corollary 3.9.5 en [25], que si  $K$  es además abierto y  $f$  de clase  $C^2$ , entonces la convexidad de  $f$  equivale a  $\langle H_f(x)v, v \rangle \geq 0$  para todo  $x \in K$  y cada  $v \in \mathbb{R}^n$ , donde  $H_f(x)$  es la matriz Hessiana de  $f$  en  $x$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar euclidiano de  $\mathbb{R}^n$ ; así que la convexidad de cualquier función de clase  $C^2$  en un abierto convexo equivale a que su matriz Hessiana sea no negativa en cada punto  $x \in K$ .

**Definición 1.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $C^2$ -convexa si es de clase  $C^2$  y existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$\langle H_f(x)v, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2, \tag{2}$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma asociada al producto euclidiano.

Obviamente toda función  $C^2$ -convexa  $f$  es convexa, su matriz Hessiana  $H_f(x)$  es uniformemente positiva definida: para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  y cualquier valor propio  $\lambda$  de  $H_f(x)$  se tiene  $\lambda \geq \alpha$ , siendo que  $\alpha$  es una constante positiva como en (2).

**Ejemplo 1.** En  $\mathbb{R}$  las funciones  $C^2$ -convexas son aquellas funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  para las cuales  $f''(x) \geq \alpha$ , cualquiera sea  $x \in \mathbb{R}$  y donde  $\alpha$  es una constante positiva independiente de  $x \in \mathbb{R}$ . Note que  $f(t) \geq \frac{\alpha}{2}t^2 + f'(0)t + f(0)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , luego existe  $r > 0$  tal que  $f(t) > f(0)$  para todo  $|t| \geq r$ . Esto implica que el valor mínimo de  $f$  en  $[-r, r]$  se alcanza en un punto  $c \in (-r, r)$ . Es claro que  $f'(c) = 0$ ; además, como  $f'' \geq \alpha$ , sigue que  $f$  es estrictamente creciente (resp. decreciente) en  $[c, +\infty)$  (resp.  $(-\infty, c]$ ). Consecuencia de esto se tiene que para todo  $\beta > f(c)$ , existen únicos valores  $t_\beta^- < c < t_\beta^+$  tales que  $f(t_\beta^\pm) = \beta$ . La gráfica de  $f$  es, por tanto, como una parábola con un valor mínimo absoluto. Observe que si  $\text{mín } f$  es suficientemente negativo, entonces  $f$  tiene exactamente dos puntos fijos, los cuales se ubican a diferentes lados de  $c$ .

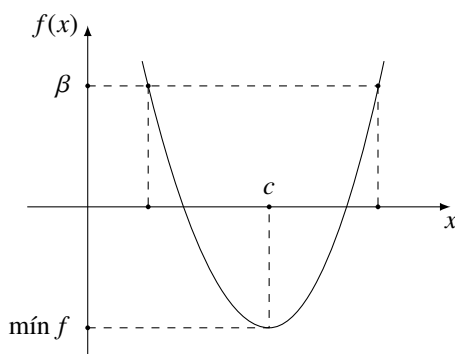


Figura 1. Gráfica de una función  $C^2$ -convexa en  $\mathbb{R}$

**Ejemplo 2.** En  $\mathbb{R}^2$ , una función cuadrática

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + \alpha x + \beta y + \delta,$$

es  $C^2$ -convexa si, y solo si,  $4ab - c^2 > 0$ . En este caso su gráfico

$$\text{graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un paraboloides elíptico con valor mínimo y toda sección transversal a  $\text{graph}(f)$  por planos horizontales  $z = d$  ( $d > \min f$ ) es descrita por la elipse de ecuación  $ax^2 + by^2 + cxy + \alpha x + \beta y + \delta = d$

**Observación 1.** La noción gemela a la convexidad de funciones es la concavidad, la cual se refiere al caso en que la función  $f$ , como en (1), satisfaga

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para todo  $x, y$  en un conjunto convexo  $K$  y todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Por su parte, la noción dual a la  $C^2$ -convexidad es la  $C^2$ -concavidad, que es cuando la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  cumpla con  $\langle H_f(x)v, v \rangle \leq \alpha \|v\|^2$ , donde  $\alpha$  es una constante negativa. Para los efectos de los asuntos dinámicos que trataremos, no tiene importancia considerar funciones  $C^2$ -convexas o  $C^2$ -concavas; por ello consideraremos solo funciones de la primera clase; es decir,  $C^2$ -convexas.

### 1.1. Propiedades de funciones $C^2$ -convexas

En este apartado recordaremos algunas propiedades bien conocidas de las funciones  $C^2$ -convexas, en especial aquellas que tienen incidencia importante en la descripción de algunos asuntos de la dinámica de endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ . Para cualquier función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  denotaremos por  $\nabla f(x)$ ,  $\partial_i f(x)$  y  $\partial_{ij} f(x)$  al gradiente de  $f$  en  $x$  y sus derivadas parciales de primero y segundo orden en  $x$ :  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$  y  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ , respectivamente.

**Proposición 1.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^2$ -convexa, entonces se cumplen cada una de las siguientes propiedades:

(a) Si  $\alpha$  es la constante dada por la definición de  $C^2$ -convexidad, entonces para todo  $0 < \alpha' < \alpha/2$  existe  $r > 0$  tal que

$$f(x) \geq \alpha' \|x\|^2 \text{ para todo } \|x\| \geq r. \tag{3}$$

(b) La función  $f$  tiene un único punto crítico; además, en ese punto la función  $f$  alcanza su valor mínimo.

(c) Si  $\beta > \min f$  y  $n \geq 2$ , entonces  $f^{-1}(\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \beta\}$  (conjunto de nivel  $\beta$ ) es una hipersuperficie compacta difeomorfa a la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* (a) Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $\|x\| = 1$  sea  $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $\varphi_x(t) = f(tx)$ . Note que  $\varphi_x$  es de clase  $C^2$ , un simple cálculo muestra que  $\varphi_x''(t) = \langle H_f(tx)x, x \rangle$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto al integrar dos veces consecutivas entre 0 y  $t$  se obtiene

$$\varphi_x(t) \geq \frac{\alpha}{2} t^2 + \langle \nabla f(0), x \rangle t + f(0), \text{ cualquiera sea } t \in \mathbb{R}.$$

Dado que  $\langle \nabla f(0), x \rangle$  está acotada cuando  $x$  varía en la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^n$ , si  $\alpha'$  es cualquier número positivo menor que  $\alpha/2$  se tiene que

$$(\alpha/2 - \alpha')t^2 + \langle \nabla f(0), x \rangle t + f(0) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } |t| \rightarrow +\infty.$$

Por tanto podemos escoger  $r > 0$  tal que  $\varphi_x(t) \geq \alpha' t^2$  siempre que  $|t| \geq r$ . Al tomar cualquier  $x$  con  $\|x\| \geq r$ , haciendo  $y = x/\|x\|$  sigue que  $\varphi_y(\|x\|) = f(x) \geq \alpha' \|x\|^2$ .

(b) Sea  $r > 0$  tal que  $f(x) \geq \frac{\alpha}{3} \|x\|^2$  si  $\|x\| \geq r$ . Consideremos la bola cerrada (por tanto compacta)  $\overline{B}_r(0)$  de radio  $r$  y centrada en el origen. Es bien conocido que existe  $x_0 \in \overline{B}_r(0)$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in \overline{B}_r(0)$ . Veamos que  $\nabla f(x_0) = 0$ ; es decir,  $x_0$  es punto crítico de  $f$ . Sea  $\delta > 0$  de forma que la bola abierta  $B_\delta(x_0)$  de centro en  $x_0$  y radio  $\delta$  está contenida en  $\overline{B}_r(0)$ . Para cada  $x \in B_\delta(x_0)$  definimos la función  $\psi_x : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\psi_x(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ , cualquiera sea  $t \in (-1, 1)$ . Como  $x_0 + t(x - x_0) \in B_\delta(x_0)$  para todo  $t \in (-1, 1)$  y  $\psi_x(0) = f(x_0)$ , sigue inmediatamente que  $\psi_x(0) \leq \psi_x(t)$  para todo  $t \in (-1, 1)$ ; es decir,  $\psi_x$  tiene un valor mínimo en  $t = 0$ , por tanto  $\psi'_x(0) = 0$ . Siendo así,

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = 0 \text{ para todo } x \in B_\delta(x_0),$$

de donde  $\nabla f(x_0) = 0$ . Veamos que  $f(y) > f(x_0)$  para todo  $y \neq x_0$ . Tomemos cualquier  $y \neq x_0$  y consideremos  $x = x_0 + \frac{1}{\|y-x_0\|}(y - x_0)$ . En vista que

$$\psi_x(t) \geq \frac{\alpha}{2} t^2 + f(x_0) \text{ y } \psi_x(\|y - x_0\|) = f(y),$$

la conclusión sigue claramente:  $f(y) > f(x_0)$  para todo  $y \neq x_0$ .

(c) Dado que  $f$  es propia y cada  $\beta > \text{mín } f$  es un valor regular de  $f$ , sigue que  $f^{-1}(\beta)$  es una hipersuperficie compacta de  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $x_0$  el punto crítico de  $f$  y  $S = \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta - x_0\| = 1\}$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$  centrada en  $x_0$ .

Para cada  $\theta \in S$  y  $t \in \mathbb{R}$  definimos  $h_\theta(t) = f(x_0 + t(\theta - x_0))$ . Como antes,  $h_\theta$  es  $C^2$ -convexa con  $h_\theta(0) = \text{mín } f$ ,  $h'_\theta(0) = 0$  y  $h''_\theta(t) \geq \alpha$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; así que  $h_\theta(t) \geq \text{mín } f + \frac{\alpha}{2} t^2$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . De acá que exista un único  $t(\theta) > 0$  tal que  $h_\theta(t(\theta)) = \beta$ , o equivalentemente  $x_0 + t(\theta)(\theta - x_0) \in f^{-1}(\beta)$ . Haciendo uso del Teorema de la función implícita en la función  $H : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $H(\theta, t) = h_\theta(t)$ , sigue que  $\theta \mapsto t(\theta)$  es de clase  $C^2$ ; por tanto la función  $\varphi : S \rightarrow f^{-1}(\beta)$ , con  $\varphi(\theta) = x_0 + t(\theta)(\theta - x_0)$  para cada  $\theta \in S$ , es también  $C^2$ . Ahora tomemos cualquier  $y \in f^{-1}(\beta)$  y hagamos  $T(y) = \frac{1}{\|y-x_0\|}$ . Note que  $y \mapsto T(y)$  es continuamente diferenciable siempre que  $y \neq x_0$ ; además,  $\theta = x_0 + T(y)(y - x_0) \in S$ ,  $t(\theta) = \frac{1}{T(y)}$  y  $\varphi(\theta) = y$ . Sigue en consecuencia que  $\varphi$  es un difeomorfismo de clase  $C^2$ .  $\square$

Consecuencias inmediatas de esta proposición son las siguientes:

- a) Cualquier función  $C^2$ -convexa es *propia*; es decir, preimágenes de conjuntos compactos son conjuntos compactos.
- b) Para cada  $\beta > \text{mín } f$ , la hipersuperficie  $f^{-1}(\beta)$  separa  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) es dos componentes: la componente acotada es el conjunto convexo  $i(f^{-1}(\beta)) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \beta\}$  que contiene al punto crítico de  $f$ ; la componente no acotada del complemento de  $f^{-1}(\beta)$  la denotaremos por  $e(f^{-1}(\beta))$ . Adicionalmente,  $f^{-1}(\beta)$  tiene exactamente dos puntos de tangencia con hiperplanos  $x_i = \text{constante}$ , cualquiera sea  $i = 1, \dots, n$ .
- c) Cualesquiera sean  $\beta, \lambda > \text{mín } f$ , la hipersuperficie  $f^{-1}(\lambda)$  está contenida propiamente en  $i(f^{-1}(\beta))$  si, y solo si,  $\beta > \lambda$ .
- d) La familia de hipersuperficies  $\{f^{-1}(\beta)\}_{\beta > \text{mín } f}$  es una foliación de  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ .

Observe que los lugares donde ocurren las tangencias de las hipersuperficies  $f^{-1}(\beta)$ ,  $\beta > \text{mín } f$ , con los hiperplanos  $x_i = \text{constante}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) es dado por el conjunto

$$\ell_i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_j f(x) = 0 \text{ para cada } j \neq i\},$$

los cuales llamaremos *líneas críticas de  $f$* .

**Proposición 2.** Para cada  $i = 1, \dots, n$ , el conjunto  $\ell_i(f)$  es una curva de clase  $C^1$ ; de hecho, existe  $\tilde{x}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  de clase  $C^1$  tal que  $(x_1, \dots, x_n) \in \ell_i(f)$  si, y solo si,  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \tilde{x}_i(x_i)$ . Es decir,  $\ell_i(f)$  es el gráfico de una función de clase  $C^1$  definida en el  $i$ -ésimo eje coordenado.

*Demostración.* Consideraremos solo el caso cuando  $i = n$ . Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  definida por  $g(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_{n-1} f(x))$  para cada  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Es simple verificar que si  $x = (\tilde{x}, x_n)$ , con  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , entonces la derivada parcial  $\partial_{\tilde{x}} g(x)$  en la variable  $\tilde{x}$  es la matriz  $H_f^{nn}(x)$  obtenida de  $H_f(x)$  al retirar su fila y columna  $n$ . Aunque puede mostrarse directamente que  $H_f^{nn}(x)$  es invertible, emplearemos para ello un clásico resultado del Álgebra lineal, ver [5], el cual establece que si  $A$  es una matriz simétrica,  $B$  es una submatriz principal de  $A$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  son los valores propios de  $A$  y  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$  son los valores propios de  $B$ , entonces  $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$  para cada  $i = 1, \dots, m$  ( $m$  es el orden de  $B$ ); este resultado es conocido como *Teorema de interlazado de Cauchy para autovalores*, ver por ejemplo [13] y [16]. Así, los valores propios de  $H_f^{nn}(x)$  son todos mayores o iguales a la constante  $\alpha$  en (2), por tanto esta matriz es invertible. En vista que  $g(x_0) = 0$ ,  $x_0$  punto crítico de  $f$ , el Teorema de la función implícita garantiza que existen una vecindad  $V$  de  $x_n^0$  (última componente de  $x_0$ ) y una única función  $\tilde{x}_n : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  de clase  $C^1$  tales que en  $g(V) \times V$  los únicos puntos que anulan a la función  $g$  son  $(\tilde{x}_n(x_n), x_n)$  con  $x_n \in V$ . Debe notarse que  $(\tilde{x}_n(x_n^0), x_n^0) = x_0$  y además

$$H_f^{nn}(\tilde{x}_n(x_n), x_n) \tilde{x}_n'(x_n) = -\widehat{\nabla} \partial_n f(\tilde{x}_n(x_n), x_n) \quad (4)$$

cualquiera sea  $x_n \in V$ , siendo que  $\widehat{\nabla} \partial_n f = (\partial_{1n} f, \dots, \partial_{(n-1)n} f)$ . Finalmente, como  $\ell_n(f)$  es el conjunto de puntos donde las hipersuperficies  $f^{-1}(\beta)$  son tangentes a hiperplanos  $x_n = \text{constante}$ , sigue que el dominio de  $\tilde{x}_n$  se extiende a todo  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Cerramos esta sección con una importante propiedad para familias uniparamétricas de funciones  $C^2$ -convexas.

**Proposición 3.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2$ -convexa y  $f_\mu = f - \mu$  con  $\mu \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $\mu > \mu_0$  y cada  $i = 1, \dots, n$  están definidas funciones  $\mu \rightarrow s_i(\mu)$  y  $\mu \rightarrow \tilde{s}_i(\mu)$  de forma que:

(a) La hipersuperficie  $f_\mu^{-1}(s_i(\mu))$  es tangente a  $x_i = s_i(\mu)$  y  $x_i = \tilde{s}_i(\mu)$ ;  $s_i(\mu) \rightarrow +\infty$ ,  $\tilde{s}_i(\mu) \rightarrow -\infty$ ,  $\frac{s_i(\mu)}{\mu} \rightarrow 0$  y  $\frac{\tilde{s}_i(\mu)}{\mu} \rightarrow 0$  si  $\mu \rightarrow +\infty$ .

(b) Si  $\beta > s_i(\mu)$  y  $x_i = h_i^+(\beta)$ ,  $x_i = h_i^-(\beta)$  ( $h_i^+(\beta) > h_i^-(\beta)$ ) definen hiperplanos tangentes a  $f_\mu^{-1}(\beta)$ , entonces

$$h_i^-(\beta) < \tilde{s}_i(\mu) \text{ y } s_i(\mu) < h_i^+(\beta).$$

*Demostración.* Como antes, solo trataremos el caso  $i = n$ . Definamos  $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi_\mu(t) = f_\mu(\tilde{x}_n(t), t)$ , donde  $\tilde{x}_n$  es la función obtenida en la proposición anterior, la cual es independiente del parámetro  $\mu$ . Afirmando que la función  $\varphi_\mu$  es  $C^2$ -convexa, de hecho  $\varphi_\mu''(t) \geq \alpha$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha$  como en (2). Observe que  $\varphi_\mu'(t) = \partial_n f(\tilde{x}_n(t), t)$  y  $\varphi_\mu'(t) = 0$  si, y solo si,  $t = x_n^0$ . Luego

$$\varphi_\mu''(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{in} f(\tilde{x}_n(t), t) u_i'(t) + \partial_{nn} f(\tilde{x}_n(t), t), \quad (5)$$



donde  $u'_i$  es la derivada de la componente  $i$ -ésima de la función  $\tilde{x}_n$ . Haciendo uso de la regla de Cramer y (4) tenemos que

$$u'_i(t) \det(H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)) = -\det(A_i(t)), \tag{6}$$

siendo  $A_i(t)$  la matriz obtenida de  $H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)$  al reemplazar la columna  $i$  por el vector  $\widehat{\nabla} \partial_n f(\tilde{x}_n(t), t)$ . Por otra parte, es claro que

$$\det(H_f(\tilde{x}_n(t), t)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \partial_{in} f(\tilde{x}_n(t), t) \det(B_i(t)), \tag{7}$$

donde  $B_i(t)$  es la matriz obtenida de  $H_f(\tilde{x}_n(t), t)$  al retirar su fila  $n$  y columna  $i$ ; además,  $B_n(t) = H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)$  y  $B_i(t)$  ( $i \neq n$ ) es igual a  $A_i(t)$  excepto que sus columnas  $i$  y  $n - 1$  están intercambiadas. Consecuentemente de (5), (6) y (7) se tiene

$$\det(H_f(\tilde{x}_n(t), t)) = \det(H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)) \varphi''_\mu(t);$$

luego la anterior afirmación sigue de la propiedad de interlazado de los valores propios de matrices simétricas.

Note que para cualquier  $\beta > \text{mín } \varphi_\mu$ , la preimagen  $\varphi_\mu^{-1}(\beta)$  está constituida por dos puntos  $h_n^-(\beta) < h_n^+(\beta)$  dispuestos a diferentes lados del punto crítico  $x_n^0$  de  $\varphi_\mu$ ; además,  $\{x_i = h_n^-(\beta)\}$  y  $\{x_i = h_n^+(\beta)\}$  son hiperplanos tangentes a  $f_\mu^{-1}(\beta)$ . Por la convexidad de  $\varphi_\mu$  también podemos escoger  $\mu_0$  tal que para todo  $\mu > \mu_0$  la función  $\varphi_\mu$  tiene dos puntos fijos con diferentes signos y ubicados a diferentes lados de  $x_n^0$ . Denotemos por  $s_n(\mu)$  su punto fijo positivo y sea  $\tilde{s}_n(\mu) < x_n^0$  tal que  $\varphi_\mu(\tilde{s}_n(\mu)) = s_n(\mu)$ ; de acá que si hacemos  $\varphi_\mu = \varphi - \mu$ , entonces para todo  $\mu > \mu_0$  se tiene

$$\varphi(\tilde{s}_n(\mu)) - s_n(\mu) = \mu = \varphi(s_n(\mu)) - s_n(\mu),$$

lo que junto a la convexidad implican la parte (a) de la proposición. La parte (b) sigue fácilmente de la propia definición de  $\varphi_\mu^{-1}(\beta)$  y el hecho que  $s_n(\mu)$  es punto fijo de  $\varphi_\mu$ . □

**Observación 2.** *La demostración de la proposición anterior la hemos hecho para  $i = n$ , con los restantes casos se procede de la misma forma. Note además que si  $\mu$  es suficientemente grande, entonces para todo  $i = 1, \dots, n$  y cualquier  $\beta > s_i(\mu)$  no solo se tiene*

$$h_i^-(\beta) < \tilde{s}_i(\mu) < x_i^0 < s_i(\mu) < h_i^+(\beta),$$

sino que además  $-\beta < h_i^-(\beta)$  y  $h_i^+(\beta) < \beta$ .

### 1.2. $\mathbb{C}^2$ -convexidad e infinito como atractor

Al estudiar la dinámica discreta proporcionada por la iteración de endomorfismos en espacios no acotados es indispensable analizar el conjunto de puntos con órbita acotada, que es por supuesto el conjunto donde se concentran los comportamientos límites de la dinámica y es, obviamente, el complemento del conjunto de puntos cuyas órbitas crecen ilimitadamente en norma. Como parte del análisis a realizar es conveniente considerar la posibilidad de que existan conjuntos abiertos cuyos puntos tienen órbita no acotada, en estos casos de habla del infinito como un atractor.

**Definición 2.** *Todo subconjunto  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  que sea complemento de un conjunto compacto es llamado vecindad de  $\infty$ . Un endomorfismo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que tiene a  $\infty$  como atractor si existe una vecindad  $W$  de  $\infty$  que sea  $F$ -invariante ( $F(W) \subset W$ ) y  $\|F^k(p)\| \rightarrow +\infty$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ , cualquiera sea  $p \in W$ .*

Si  $F$  tiene a  $\infty$  como atractor y  $W$  es como arriba, entonces al conjunto

$$B_\infty(F) = \{p \in \mathbb{R}^n : \|F^k(p)\| \rightarrow +\infty \text{ cuando } k \rightarrow +\infty\}$$

se le llama *cuenca de atracción* de  $\infty$ . Note que si  $F$  es continuo, entonces  $B_\infty(F)$  es un conjunto abierto y  $B_\infty(F) = \bigcup_{k \geq 0} F^{-k}(W)$ .

**Proposición 4.** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua con  $F = (f_1, \dots, f_n)$ . Si para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$  la función  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^2$ -convexa, entonces  $F$  tiene a  $\infty$  como atractor.

*Demostración.* Por la parte (a) de la Proposición 1 podemos escoger constantes positivas  $\beta$  y  $r$  tales que  $|f_i(x)| \geq \beta\|x\|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $\|x\| \geq r$ . Sean  $\lambda > 1$  y  $R = \max\{r, \beta^{-1}\lambda\}$ , luego es claro que

$$|f_i(x)| \geq \lambda\|x\|, \text{ si } \|x\| \geq R.$$

Como  $\|F(x)\| \geq |f_i(x)|$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , sigue que  $W = \{x : \|x\| > R\}$  es una vecindad de  $\infty$ ,  $F$ -invariante y además  $\|F^k(x)\| \rightarrow +\infty$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ , para cada  $x \in W$ .  $\square$

Consideremos  $F$  y  $f_1, \dots, f_n$  como en el enunciado de la proposición anterior. Sean  $\nu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $F_\nu = (f_{\mu_1}, \dots, f_{\mu_n})$ , donde  $f_{\mu_j} = f_j - \mu_j$ , cualquiera sea  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dado que la  $i$ -ésima componente  $f_i$  de  $F$  es  $C^2$ -convexa, podemos escoger  $\mu_i^* \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu_i > \mu_i^*$  están definidas funciones  $\mu_i \rightarrow s_i(\mu_i)$  y  $\mu_i \rightarrow \tilde{s}_i(\mu_i)$  como en la Proposición 3. Para cada  $\nu \in \mathbb{R}^n$  con  $\mu_i > \mu_i^*$  definimos

$$C_{\mu_i} = \bigcup_{\beta \in I_i} f_{\mu_i}^{-1}(\beta), \text{ con } I_i = [\tilde{s}_i(\mu_i), s_i(\mu_i)].$$

Obviamente  $\mathbb{R}^n \setminus C_{\mu_i}$  es una vecindad de  $\infty$ ; observe que en  $\mathbb{R}^2$  el compacto  $C_{\mu_i}$  es un anillo cuyos bordes son como elipses. En general,  $C_{\mu_i}$  es justamente la clausura de  $i(f_{\mu_i}^{-1}(s_i(\mu_i))) \cap e(f_{\mu_i}^{-1}(\tilde{s}_i(\mu_i)))$ . De la Proposición 3 sigue que si  $x \in f_{\mu_i}^{-1}(\delta)$  para algún  $\delta \notin I_i$ , entonces  $F_\nu(x) \in f_{\mu_i}^{-1}(\beta)$  para un único  $\beta > |\delta|$ ; por tanto  $\mathbb{R}^n \setminus C_{\mu_i}$  es  $F_\nu$ -invariante, o equivalentemente  $F_\nu^{-1}(C_{\mu_i}) \subset C_{\mu_i}$ . Observe que  $\|F_\nu^k(x)\| \rightarrow +\infty$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ , de lo contrario podemos escoger una sucesión  $k_j \nearrow +\infty$  de forma que los puntos  $F_\nu^{k_j}(x)$ ,  $j \geq 1$ , quedan atrapados en un compacto. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $F_\nu^{k_j}(x) \rightarrow q$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ . Para cada  $j \geq 1$  sea  $\beta_j$  tal que  $F_\nu^{k_j}(x) \in f_{\mu_i}^{-1}(\beta_j)$ ; de lo anterior es claro que

$$\beta_{j+1} > \beta_j > |\delta| > \max\{|\tilde{s}_i(\mu_i)|, s_i(\mu_i)\}.$$

Luego la hipersuperficie  $f_{\mu_i}^{-1}(\eta)$  que contiene a  $q$  es tal que  $i(f_{\mu_i}^{-1}(\eta))$  contiene a  $C_{\mu_i}$ , por lo que  $q \notin C_{\mu_i}$  y  $f_{\mu_i}(F_\nu(q)) > \eta$ . Sin embargo, como  $f_{\mu_i}(F_\nu^{k_{j+1}}(x)) \leq f_{\mu_i}(F_\nu^{k_j}(x))$ , la continuidad de  $F$  implica que  $f_{\mu_i}(F_\nu(q)) \leq \eta$ . De esta manera hemos demostrado:

**Proposición 5.** Si  $F$ ,  $f_1, \dots, f_n$  y  $\mu_i^*$  son como antes, entonces para cada  $\nu \in \mathbb{R}^n$  con  $\mu_i > \mu_i^*$ , el conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus C_{\mu_i}$  es una vecindad de  $\infty$ ,  $F_\nu$ -invariante y contenida en  $B_\infty(F_\nu)$ .

Como consecuencia de esta proposición, el conjunto de puntos con órbita positiva acotada es dado por  $\bigcap_{k \geq 0} F_\nu^{-k}(C_{\mu_i})$ . Note también que si además de  $f_i$  el endomorfismo  $F$  tiene otras componentes  $C^2$ -convexas, entonces la vecindad de  $\infty$  puede expresarse más finamente; por ejemplo, si todas las funciones componentes de  $F$  son  $C^2$ -convexas, entonces para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  podemos considerar  $C_{\mu_j}$  (como se hizo con la componente  $i$ ), definir  $C_\nu = \bigcap_{j=1}^n C_{\mu_j}$  y obtener como cuenca de atracción de  $\infty$  al conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k \geq 0} F_\nu^{-k}(C_\nu)$ .

La demostración que hemos presentado para la Proposición 5 contiene, en esencia, el siguiente criterio mediante el cual se asegura que una vecindad de  $\infty$  está contenida en su cuenca de atracción. Una función como en el enunciado de la siguiente proposición es conocida como *función de Lyapunov*.

**Proposición 6.** Sean  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y  $W \subset \mathbb{R}^n$  una vecindad de  $\infty$  que es  $F$ -invariante. Si existe una función continua  $L$  de la clausura  $\overline{W}$  de  $W$  en  $\mathbb{R}$  tal que la diferencia orbital  $\Delta L = L \circ F - L$  es positiva para cada  $p \in \overline{W}$ , entonces  $\infty$  es un atractor de  $F$  y  $W \subset B_\infty(F)$ .

## 2. Endomorfismos $C^2$ -convexos: una visión general

Un endomorfismo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F = (f_1, \dots, f_n)$ , se dice  $C^2$ -convexo si cada una de las funciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) es  $C^2$ -convexa. Con el objeto de relatar algunas de las propiedades dinámicas de endomorfismos  $C^2$ -convexos expuestas en [27] introducimos las siguientes notaciones. Sea  $\mathcal{H}_0$  la colección de todos los  $C^1$  endomorfismos  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen:

- (a)  $F$  tiene a  $\infty$  como un atractor.
- (b) El conjunto no errante  $\Omega(F)$  de  $F$  es vacío, o bien es un conjunto de Cantor que coincide con el complemento de  $B_\infty(F)$ , y la restricción de  $F$  a  $\Omega(F)$  es expansora: existen constantes  $K > 0$  y  $\lambda > 1$  tales que, para todo  $p \in \Omega(F)$ ,  $n \geq 1$  y cada  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se tiene  $\|D_p F^n(v)\| \geq K\lambda^n \|v\|$ .

Debido a Mañé y Pugh [23] y Przytycki [26] todos los endomorfismos en  $\mathcal{H}_0$  son Axioma A y estructuralmente estables.

Para cada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un endomorfismo  $C^2$ -convexo y  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , se denota por  $F_\mu = F - \mu v$  la familia parametrizada por  $\mu \in \mathbb{R}$  y por  $\mathcal{G}_v$  el conjunto de todos los endomorfismos  $F$  de clase  $C^2$  para los cuales existe  $\mu^* > 0$  tal que para todo  $|\mu| > \mu^*$ , el endomorfismo  $F_\mu \in \mathcal{H}_0$ . En [27] es demostrado que la intersección del conjunto  $\mathcal{G}_v$  con el espacio de endomorfismos  $C^2$ -convexos es abierto en la topología  $C^2$ -Whitney; allí se construye un endomorfismo  $F \in \mathcal{G}_v$ , no  $C^2$ -convexo, que no es punto interior de  $\mathcal{G}_v$  en la topología  $C^2$ -Whitney. También se introduce la siguiente noción de transversalidad.

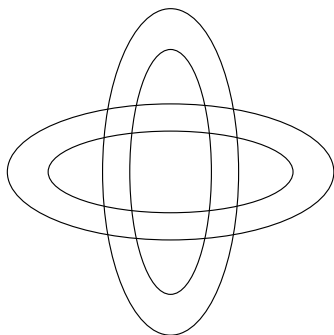
**Definición 3.** Dadas hipersuperficies regulares  $S_1, \dots, S_n$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $0 < \epsilon < 1$ , se dice que  $S_1, \dots, S_n$  son  $\epsilon$ -transversales si en cada punto de  $\bigcap_{i=1}^n S_i$  el conjunto de vectores normales  $v_1, \dots, v_n$  a  $S_1, \dots, S_n$ , respectivamente, son tales que para todo  $i = 1, \dots, n$  vale  $\|P_{V_i}^\perp(v_i)\| \geq \epsilon \|v_i\|$ , donde  $V_i$  es el subespacio vectorial generado por  $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$  y  $P_{V_i}^\perp$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre el complemento ortogonal a  $V_i$ .

Esta noción de transversalidad ofrece condiciones suficientes sobre la geometría de las superficies de nivel de las funciones componentes de los endomorfismos  $C^2$ -convexos para que estos pertenezcan a  $\mathcal{H}_0$ ; más precisamente se demuestra el siguiente resultado:

**Teorema 1** (Proposition 1, [27]). Sea  $F_\mu = (f_1 - \mu v_1, \dots, f_n - \mu v_n)$  un endomorfismo  $C^2$ -convexo, con  $v_i > 0$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Si dado  $0 < \epsilon < 1$ , existe  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu > \mu_0$  las hipersuperficies  $f_i^{-1}(\mu v_i + s)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son  $\epsilon$ -transversales para todo  $s \in [\overline{s}_i(\mu v_i), s_i(\mu v_i)]$ , entonces  $F_\mu \in \mathcal{H}_0$  para todo  $\mu$  suficientemente grande.

juntos  $C_\mu$  lucirían como en la figura; por lo que las curvas de nivel  $f_i^{-1}(\mu + s)$ , con  $s \in [\overline{s}_i(\mu), s_i(\mu)]$  ( $i = 1, 2$ ) son suficientemente transversales como para usar el resultado anterior y garantizar que  $F_\mu \in \mathcal{H}_0$  si  $\mu$  es suficientemente grande. Un mapa  $F$  como el descrito es conocido como *autómata celular real*; ver sección 3.

El siguiente ejemplo, también tomado de [27], muestra un endomorfismo  $C^2$ -convexo (del tipo autómata celular real) tal que las curvas de nivel no tienen suficiente transversalidad para obtener expansión; por tanto, toda pequeña perturbación  $C^2$  induce una familia a un parámetro la cual es no expansora para todo valor suficientemente del parámetro. Esto es una notable diferencia, como comentaremos más adelante, en el caso que las funciones componentes sean cuadráticas.



Es interesante intentar mostrar que si  $F = (f_1, f_2)$  es un endomorfismo  $C^2$ -convexo de  $\mathbb{R}^2$  tal que sus funciones componentes satisfacen (para  $i \neq j$ ) la condición  $\inf_x \partial_{ii} f_i(x)$  es suficientemente mayor que  $\sup_x \partial_{jj} f_j(x)$  y  $\sup_x |\partial_{ij} f_i(x)|$ , entonces la familia a un parámetro

$$F_\mu = (f_1 - \mu v_1, f_2 - \mu v_2)$$

cumple con las condiciones del enunciado anterior. Esto es ciertamente factible cuando  $f_2$  es definida como  $f_2(x, y) = f_1(y, x)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y  $v = (1, 1)$ , ello es debido a que los respectivos con-

**Ejemplo 3.** Sea  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la única función de clase  $C^2$  tal que:

$$1) b(0) = b'(0) = 0, \text{ y } 2) b''(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x| + \frac{1}{2}, & \text{si } |x| \in [1, \frac{3}{2}] \\ 2 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases} ;$$

de hecho puede verificarse que la función  $b$  es dada por:

$$b(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2, & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6}|x|^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{6}, & \text{si } |x| \in [1, \frac{3}{2}] \\ x^2 - \frac{5}{8}|x| + \frac{19}{48}, & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases} .$$

Consideremos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ , siendo que  $f(x, y) = x^2 + b(y)$  y  $g(x, y) = f(y, x)$ . Dado que  $b''(\mathbb{R}) = [\frac{3}{2}, 2]$ , sigue inmediatamente que  $f$  y  $g$  son funciones  $C^2$ -convexas. El único punto crítico de  $f$  (resp.  $g$ ) es el origen, su valor mínimo es  $f(0, 0) = 0$ . Note además que las tangencias verticales (resp. horizontales) de  $f^{-1}(\beta)$  (resp.  $g^{-1}(\beta)$ ), con  $\beta > 0$ , ocurren sobre el eje  $x$  (resp. eje  $y$ ); por tanto las funciones  $\mu \rightarrow \bar{s}_1(\mu)$  y  $\mu \rightarrow s_1(\mu)$  (resp.  $\mu \rightarrow \bar{s}_2(\mu)$  y  $\mu \rightarrow s_2(\mu)$ ) son dadas por

$$s_1(\mu) = s_2(\mu) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\mu}) \text{ y } \bar{s}_1(\mu) = \bar{s}_2(\mu) = -s_1(\mu),$$

las cuales están definidas para todo  $\mu > -\frac{1}{4}$ . También es claro que para todo  $\beta > \mu > -\frac{1}{4}$  se tiene

$$\begin{cases} f_\mu^{-1}(\beta) = f^{-1}(\mu + \beta) = \{(x, y) : x^2 + b(y) = \mu + \beta\} \\ g_\mu^{-1}(\beta) = g^{-1}(\mu + \beta) = \{(x, y) : y^2 + b(x) = \mu + \beta\} \end{cases} .$$

Las tangencias verticales de  $f_\mu^{-1}(\beta)$  ocurren en  $x = \pm \sqrt{\mu + \beta}$ , por lo que  $\frac{|x|}{\sqrt{\mu}} \sim 1$  para valores grandes de  $\mu$ . Por otra parte, las tangencias horizontales de  $f_\mu^{-1}(\beta)$  ocurren en los valores de  $y$  para los cuales  $b(y) = \mu + \beta$ . Sin dificultad se muestra que para esos valores de  $y$  se tiene:  $|y| > \sqrt{\mu + \beta}$  y  $\frac{|y|}{\sqrt{\mu}} \sim 1$  para valores grandes de  $\mu$ . Esto significa que las curvas de nivel (similares a elipses)  $f_\mu^{-1}(\beta)$  (resp.  $g_\mu^{-1}(\beta)$ ) son más alargadas en la vertical (resp. horizontal) que en la horizontal (resp. vertical), pero valores grandes de  $\mu$  esas curvas de nivel se asemejan a circunferencias. Sean:

$$C_\mu(f) = \bigcup_{\beta \in I_\mu} f_\mu^{-1}(\beta) \text{ y } C_\mu(g) = \bigcup_{\beta \in I_\mu} g_\mu^{-1}(\beta), \text{ donde } I_\mu = [\bar{s}_1(\mu), s_1(\mu)].$$

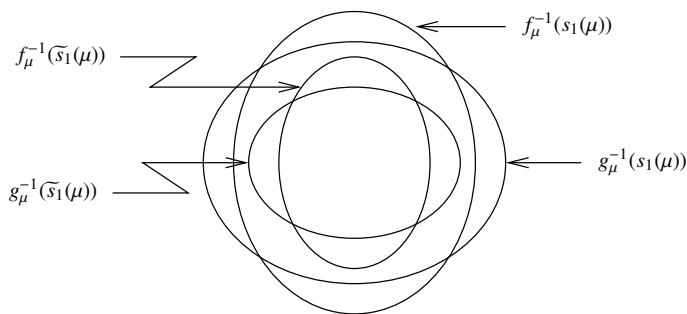


Figura 2. Disposición geométrica de los sectores  $C_\mu(f)$  y  $C_\mu(g)$  cuando las funciones  $f$  y  $g$  son como en el Ejemplo 3

Una situación interesante que debe destacarse es la siguiente. Las tangencias verticales de  $f_\mu(\bar{s}_1(\mu))$  son, en valor absoluto, menores que las tangencias verticales de  $g_\mu(s_1(\mu))$ , aunque asintóticamente con  $\mu$  son del mismo orden; ello hace que las regiones  $C_\mu(f)$  y  $C_\mu(g)$  luzcan como en la Figura 2. A diferencia del diseño anterior, en este caso el conjunto  $C_\mu(f) \cap C_\mu(g)$  es conexo. Dado que para todo  $\mu \geq 0$  la gráfica de  $f_\mu$  interseca la diagonal de  $\mathbb{R}^3$  en dos puntos, el mapa  $F_\mu$  tiene un punto fijo  $P_\mu = (x_\mu, x_\mu)$  con  $x_\mu > 0$  y  $x_\mu \rightarrow +\infty$  cuando  $\mu \rightarrow +\infty$ . Es claro que  $P_\mu \in f_\mu^{-1}(x_\mu) \cap g_\mu^{-1}(x_\mu)$ ; también es simple chequear que los valores propios de  $D_{P_\mu}F_\mu$  son  $\lambda_1 = 2x_\mu + b'(x_\mu)$  y  $\lambda_2 = 2x_\mu - b'(x_\mu)$ , por lo que debido al rango de  $b''$  se concluye que  $P_\mu$  es un punto fijo hiperbólico del tipo silla. Además, las curvas  $f_\mu^{-1}(x_\mu)$  y  $g_\mu^{-1}(x_\mu)$  son  $\epsilon$ -transversales si, y solo si,  $\epsilon < \frac{4x_\mu^2 - (b'(x_\mu))^2}{4x_\mu^2 + (b'(x_\mu))^2}$ . Nuevamente, por la forma que tiene la función  $b$  sigue que  $\frac{4x_\mu^2 - (b'(x_\mu))^2}{4x_\mu^2 + (b'(x_\mu))^2} \leq \lambda < 1$  para un cierto valor de  $\lambda$ , lo cual indica que esas curvas son transversales en  $P_\mu$ , pero con una cota superior en el grado de transversalidad.

Cuando se consideran endomorfismos  $F = (f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  en el que las funciones componentes son del tipo cuadrático:

$$f_i(x) = \langle A_i x, x \rangle + \langle v_i, x \rangle + a_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

donde cada  $A_i$  es una matriz simétrica definida positiva, el fenómeno de transversalidad se torna bastante más amplio. En el espacio de endomorfismos del tipo cuadrático es más apropiado emplear la topología débil (compacta-abierta) dado que la topología fuerte es discreta en este espacio; de hecho la topología débil coincide con la topología de los coeficientes de las matrices simétricas. Con esta topología se demuestra en [27] el siguiente resultado de genericidad.

**Teorema 2.** Para cada  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , el conjunto  $\mathcal{G}_v$  es abierto y denso en el espacio de endomorfismos del tipo cuadrático de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Autómatas celulares reales $C^2$ -convexos

Imitando la caracterización de G. Hedlund [14] para los autómatas celulares clásicos en retículos discretos, en [7] se introduce la noción de *autómata celular real* en  $\mathbb{R}^n$  como aquellas transformaciones  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  que conmutan con el *shift circular*  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ ; ello equivale a que exista una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que para cada  $w \in \mathbb{R}^n$  se cumpla

$$F(w) = (f(w), f(\sigma^{-1}(w)), \dots, f(\sigma^{-n+1}(w)));$$

esta función  $f$  es llamada *función bloque* de  $F$ . Es bien conocido, ver Theorem 1 en [7], que si la función  $\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \sigma^{-i}$  es estrictamente convexa y el autómata celular real  $F$  dado por  $f$  no tiene puntos fijos, entonces el  $\omega$ -límite de todo punto es vacío; este es una versión del resultado enunciado en el Teorema 3 más adelante. Obviamente si la función bloque es  $C^2$ -convexa, la condición de convexidad estricta de  $\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \sigma^{-i}$  es satisfecha. También es claro que para cada autómata celular real cuyas funciones componentes sean funciones cuadráticas existen una única transformación lineal simétrica  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , un único funcional lineal  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  y una única constante  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que ese autómata celular real se escribe de la forma

$$F_\mu(w) = (f_\mu(w), f_\mu(\sigma^{-1}(w)), \dots, f_\mu(\sigma^{-n+1}(w))) \quad (8)$$

siendo que

$$f_\mu(w) = f(w) - \mu = \langle A(w), w \rangle + L(w) - \mu,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ . Denotemos por  $\mathcal{S}(n)$  el espacio de las transformaciones lineales simétricas de  $\mathbb{R}^n$  y por  $\mathcal{L}(n)$  el espacio dual de  $\mathbb{R}^n$ . En [7] es mostrado que existe un conjunto abierto y denso  $\mathcal{S}'(n)$  de  $\mathcal{S}(n)$  tal que, para cada  $A \in \mathcal{S}'(n)$  y todo  $L \in \mathcal{L}(n)$  existen constantes  $\mu_1 < \mu_2$  cumpliendo:

- (a) Para cada  $\mu < \mu_1$ , el autómata celular real  $F_\mu$  como en (8) tiene dinámica trivial: el conjunto  $\omega$ -límite de todo punto es vacío.
- (b) Para todo  $\mu > \mu_2$ ,  $\infty$  es un atractor de  $F_\mu$  y el complemento de su cuenca de atracción es un conjunto hiperbólico expansor.

Con herramientas similares a las utilizadas en [7] podría procurarse un resultado para autómatas celulares reales con función bloque  $C^2$ -convexa, y que en cierta forma extienda la propiedad arriba descrita para los autómatas celulares reales cuadráticos; más precisamente, creemos posible un resultado del tipo:

*Existe un abierto no vacío  $\mathcal{U}$  en el espacio de las funciones  $C^2$ -convexas con la topología  $C^2$  de Whitney de forma que, para cada  $f \in \mathcal{U}$  existe  $\mu^* \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu > \mu^*$  el autómata celular real con función bloque  $f_\mu = f - \mu$  tiene a la cuenca de atracción de  $\infty$  como un conjunto hiperbólico repulsor.*

Dos clases especiales de autómatas celulares reales han ganado una considerable atención debido a su empleo para modelar discretizaciones de ecuaciones diferenciales, así como para el estudio de ciertas propiedades dinámicas observadas en fenómenos físicos tales como la dinámica de fluidos, y en general para estudiar los denominados sistemas espacialmente distribuidos; ver [3]. Estas dos clases de autómatas celulares reales son las siguientes:

### 3.1. Acople difusivo del mapa logístico

Se trata de un modelo particular de sistemas dinámicos en retículos con dos nodos, este se expresa mediante el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{cases} x_n = (1 - \epsilon)f_\mu(x_{n-1}) + \epsilon f_\mu(y_{n-1}) \\ y_n = (1 - \epsilon)f_\mu(y_{n-1}) + \epsilon f_\mu(x_{n-1}) \end{cases}, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

donde  $\epsilon \in (0, 1)$  y  $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ , con  $\mu > 1$  y  $x \in \mathbb{R}$ , es el conocido *mapa logístico*. Observe que las soluciones de (9) están en correspondencia biunívoca con las órbitas del endomorfismo biparamétrico del plano:

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = ((1 - \epsilon)f_\mu(x) + \epsilon f_\mu(y), (1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon f_\mu(x)); \quad (10)$$

además, el comportamiento asintótico de las soluciones es (9) es descrito mediante la dinámica de  $F_{\mu,\epsilon}$ .

El acoplamiento del mapa logístico (9), y por lo tanto del endomorfismo  $F_{\mu,\epsilon}$ , con  $\mu \in (1, 4)$  y  $\epsilon \in [0, 1]$ , ha sido objeto de estudio en varias investigaciones en las que se describen algunas de sus propiedades dinámicas y ergódicas. Por ejemplo en [9] y [10] se hacen estimaciones para la determinación del conjunto de órbitas acotadas de  $F_{\mu,\epsilon}$ , también se obtienen regiones del espacio fase en la cual existen atractores; en [19] y [20] se estudian algunas propiedades elementales sobre la sincronización de las órbitas de  $F_{\mu,\epsilon}$ ; en [11] es empleado un contexto que incluye el mapa logístico para algunos de los valores de los parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$ , allí se estudian propiedades relativas a la existencia de órbitas asintóticamente periódicas. Previamente en [17] se hace un análisis numérico referente a algunas propiedades ergódicas y a la existencia de atractores. En [31] y [35] se ha mostrado la existencia de variedades invariantes mediante las cuales se describe la cuenca de atracción del atractor en el  $\infty$ ; esto permite una descripción de la frontera de tal cuenca. Por otra parte, dado que preimágenes de estas variedades invariantes limitan al conjunto de puntos con órbitas acotadas, ellas son empleadas como una efectiva herramienta para estudiar uno de los fenómenos fundamentales de sistemas físicos espacio-temporales con homogeneidad: la sincronización. Los resultados en [31] y [35] son bastante más amplios que los similares en [9], [10], [19] y [20]; además de ser más precisos en la determinación de la frontera del conjunto de puntos con órbita acotada, el parámetro  $\mu$  varía en  $(1, +\infty)$  y el espacio fase es todo  $\mathbb{R}^2$ ; hipótesis que debido a interpretaciones físicas, estos rangos son considerados en la literatura tradicional sobre el tema en el intervalo  $(1, 4)$  y en el cuadrado  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ . Más recientemente, ver [32], los resultados en [31] y [35] son complementados para valores de parámetro de acople  $\epsilon > 1$ ; allí se mantiene la amplitud del rango para  $\mu$  y el espacio fase. En ese artículo, son mostrados algunos fenómenos dinámicos no presentes en el marco considerado en [31] y [35].

### 3.2. Acople logístico con influencia lineal

Esta clase de acoplamiento es definido por el sistema bidimensional de ecuaciones en diferencia:

$$\begin{cases} x_n = (1 - \epsilon)f_\mu(x_{n-1}) + \epsilon y_{n-1} \\ y_n = (1 - \epsilon)f_\mu(y_{n-1}) + \epsilon x_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 1), \quad (11)$$

donde  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $f_\mu$  son como arriba. La descripción asintótica de sus soluciones se realiza mediante la familia de endomorfismos de plano  $F_{\mu,\epsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = ((1 - \epsilon)f_\mu(x) + \epsilon y, (1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon x). \quad (12)$$

Este acoplamiento también ha sido objeto de diversas investigaciones, aunque no tan amplias y difundidas como el acoplamiento difusivo de la misma familia unidimensional  $f_\mu$ , quizá ello se deba a la complejidad del conjunto de puntos críticos de (12), su imagen y preimagen; lo cual es un elemento de relevancia para emprender el estudio de su dinámica; aprovechamos para destacar que en [8] se hace una completa descripción geométrica de esas imágenes y preimágenes para endomorfismos cuadráticos del plano cuyo conjunto crítico es una hipérbola con un único punto crítico del tipo cusp, que es justamente el tipo que conjunto crítico que despliega el acople (12). Conviene mencionarse que para esta familia de endomorfismos, y similares con otro tipo de influencia lineal, se han estudiados propiedades relativas a: la estructura de ciertos diagramas de bifurcaciones globales, la aparición y apariencia de cuencas de atracción mediante experimentación numérica, determinación en el espacio de parámetros de regiones donde los denominados exponentes transversales de Lyapunov son negativos y su relación con a estructura fractal de las cuencas de atracción detectadas; citamos por ejemplo [15], [21], [22] y [36], donde se encontrará con mayor precisión algunas de las propiedades estudiadas y mencionadas arriba. Se desconoce la existencia de curvas invariantes como las que aparecen en el acoplamiento difusivo de la familia logística.

#### 4. Endomorfismos con retardo $C^2$ -convexos

En el estudio de importantes problemas en distintas áreas del conocimiento, véase por ejemplo [1], [2] y [4], es frecuente el uso de modelos matemáticos expresados mediante ecuaciones del tipo

$$x_{k+n} = f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}), \quad k \geq 0 \tag{13}$$

donde  $f$  es una función a valores reales definida en algún subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ; estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones en diferencia con retardo de orden  $n$* , o simplemente, *ecuaciones en diferencia con retardo  $n$ -dimensional*. Note que a partir de  $n$  datos iniciales  $x_0, \dots, x_{n-1}$ , la ecuación (13) genera la sucesión

$$x_n = f(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n), \quad \dots$$

que es la *solución* de esa ecuación con datos iniciales  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . El problema fundamental de las ecuaciones en diferencia con retardo es describir el comportamiento asintótico de sus soluciones. Paul Montel en [24] consideró el endomorfismo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$F(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_0, \dots, x_{n-1})) \tag{14}$$

para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de (13) en las proximidades de una solución *estacionaria*; esto es, una solución  $(x_k)_{k \geq 0}$  donde  $x_k = \alpha$  para todo  $k \geq 0$ . Al mapa  $F$  se le denomina *endomorfismo con retardo asociado a  $f$* . Es simple verificar que  $(x_k)_{k \geq 0}$  es solución de (13) si, y solo si, el conjunto  $\{(x_k, \dots, x_{k+n-1}) : k \geq 0\}$  es la  $F$ -órbita positiva del punto  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ ,  $F^k(x) = (x_k, \dots, x_{k+n-1})$  para todo  $k \geq 0$ . Así, las soluciones de (13) están en correspondencia biunívoca con las órbitas positivas del endomorfismo con retardo  $F$ ; además, la dinámica que describen las órbitas de puntos por  $F$  se corresponde con el comportamiento límite de las soluciones de (13). Observe que  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  es punto fijo de  $F$  si, y solo si,

$$x_0 = \dots = x_{n-1} = x = f(x, \dots, x);$$

esto equivalente a que el gráfico de  $f$  corte la diagonal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en el punto  $(x, x, \dots, x)$ ; note que la sucesión constante  $x$  es solución estacionaria de (13). Luego es claro que  $F$  tiene tantos puntos fijos como intersecciones tenga el gráfico de  $f$  con la diagonal de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En particular, si  $f$  es  $C^2$ -convexa, el endomorfismo  $F$  tiene a lo más dos puntos fijos.

En apariencia el conjunto de los endomorfismos con retardo de clase  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) en  $\mathbb{R}^n$  luce pequeño, no obstante esto no es del todo cierto. En [29] (ver Theorem 3.1) se muestra que al considerar la topología  $C^r$ -fuerte de Whitney en el conjunto de todos los endomorfismos de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ , la proyección de los endomorfismos con retardo es un conjunto abierto en el espacio cociente de las clases de equivalencias por conjugaciones topológicas.

El objetivo de esta sección es doble; en primer lugar relataremos algunos conocidos resultados para la dinámica de los endomorfismos con retardos en familias uniparamétricas en los que la función asociada al endomorfismo es  $C^2$ -convexa, en particular describiremos las características dinámicas para valores extremos del parámetro, con lo cual se extienden propiedades de la paradigmática familia cuadrática  $f_\mu(x) = x^2 - \mu$ : para todo valor de  $\mu$  suficientemente negativo, la cuenca de atracción de  $\infty$  es todo  $\mathbb{R}$ , mientras que para valores suficientemente positivos de  $\mu$  el conjunto de puntos con órbita acotada para  $f_\mu$  es un conjunto de Cantor restringido al cual la función  $f_\mu$  es topológicamente conjugada al shift unilateral en dos símbolos; ver [18]. Por otra parte, propondremos algunos problemas que se enmarcan en este contexto de endomorfismos  $C^2$ -convexos con retardo.



Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$ -convexa y  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el endomorfismo con retardo asociado a  $f$ :  $F(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ , cualquiera sea  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Para cada  $\mu \in \mathbb{R}$ , sean  $f_\mu = f - \mu$  y su correspondiente endomorfismo con retardo  $F_\mu$ . Observe que el gráfico  $graph(f_\mu)$  de  $f_\mu$  es la traslación vertical del gráfico de  $f$ , existe por tanto  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu < \mu_1$ ,  $graph(f_\mu)$  no corta la diagonal de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; por tanto  $F_\mu$ , con  $\mu < \mu_1$ , no tiene puntos fijos. En ausencia de puntos fijos la dinámica del endomorfismo  $C^2$ -convexo con retardo es trivial, esta propiedad fue demostrada por Rovella y Vilamajó en [34], también puede verse en [28]. Más precisamente:

**Teorema 3** ([34], [28]). *Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$ -convexa y  $F$  su endomorfismo con retardo asociado. Si  $F$  no tiene puntos fijos, entonces el  $\omega$ -límite de todo punto es vacío; de hecho  $B_\infty(F) = \mathbb{R}^n$ .*

La demostración de este resultado está basada en la construcción de una especial función de Lyapunov con dominio en  $\mathbb{R}^n$ , su consecuencia se obtiene de la Proposición 6. Es importante señalar que la conclusión del teorema deja de ser cierta sin la hipótesis de la  $C^2$ -convexidad: el gráfico de la función cuadrática dada por  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4xy + 1$  no corta la diagonal de  $\mathbb{R}^3$ , sin embargo el endomorfismo con retardo asociado tiene puntos periódicos de período 2. Variaciones de este teorema han sido mostradas en contextos diferente al de endomorfismos con retardo; ver [6], [7] y [30].

#### 4.1. Endomorfismos con retardos horizontales y verticales.

Rovella y Vilamajó consideran en [34] familias uniparamétricas de endomorfismos con retardo  $C^2$ -convexo en el plano:  $F_\mu(x, y) = (y, f_\mu(x, y))$ ,  $f_\mu = f - \mu$ . En ese artículo se muestran interesantes propiedades para este tipo de familias; de hecho, al considerar la topología  $C^2$ -fuerte de Whitney en el conjunto  $C^2(\mathbb{R}^2)$  de funciones de clase  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  se muestra la existencia de un conjunto abierto no vacío  $\mathcal{U}$  en  $C^2(\mathbb{R}^2)$  de forma que para toda  $f \in \mathcal{U}$  existe un valor  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  tal que, para cada  $\mu > \mu_1$  valen las siguientes propiedades:

- (a) *El mapa  $F_\mu$  tiene dos puntos fijos hiperbólicos del tipo silla.*
- (b) *La clausura  $\overline{W_\mu^s}$  la variedad estable  $W_\mu^s$  de uno de esos puntos fijos es difeomorfa al producto de un conjunto de Cantor y una circunferencia; más aun, esa clausura es el complemento de la cuenca de atracción de  $\infty$ .*

Esencialmente el conjunto  $\mathcal{U}$  es constituido por las funciones  $C^2$ -convexas  $f$  para las que el infimo de las derivadas de segundo orden  $\partial_{22}f(x, y)$  es suficientemente grande respecto de los valores absolutos de las restantes derivadas de segundo orden de  $f$ . Esto hace que las curvas de nivel de  $f_\mu$  sean curvas cerradas (tipo elipses) más alargadas en la dirección horizontal que en la vertical. Haciendo uso del conjunto  $C_\mu$  introducido en la Proposición 4 anterior se verifica que

$$\bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu) = \overline{W_\mu^s} = \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty(F_\mu).$$

Aunque los puntos en el conjunto  $\overline{W_\mu^s}$  tienen órbita acotada, este conjunto contiene puntos errantes. En [34] también se muestra que el conjunto no errante  $\Omega_\mu$  de  $F_\mu$ , para valores de  $\mu$  suficientemente grandes, es dado por  $\Omega_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^n(\overline{W_\mu^s})$  y la restricción de  $F_\mu$  a  $\Omega_\mu$  es topológicamente conjugado a un shift unilateral en dos símbolos. Posteriormente en [28], en el contexto cuadrático y  $C^2$ -convexo:

$$f_\mu(x, y) = f(x, y) - \mu = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu, \quad a > 0 \text{ y } 4ab - c^2 > 0$$

se recrean los resultados de [34]; esto es, cuando el coeficiente  $b$  es suficientemente grande respecto de los coeficientes  $a$  y  $|c|$ . Adicionalmente se hace un análisis de la dinámica del endomorfismo con retardo  $F_\mu$  asociado a  $f_\mu$  en el caso que las curvas de nivel de la función  $f$  sean más verticales que horizontales, analíticamente ello significa que  $a$  es suficientemente mayor que  $b$  y  $|c|$ . En esas condiciones es mostrado en [28] el siguiente resultado

**Teorema 4.** *Existe  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu > \mu_1$ , el conjunto no errante  $\Omega_\mu$  de  $F_\mu$  coincide con el complemento de la cuenca de atracción de  $\infty$  y  $F_\mu$  restricto a  $\Omega_\mu$  es expansor y topológicamente conjugado al shift unilateral en dos símbolos.*

Este teorema fue extendido en [30] a una clase especial de endomorfismos con retardo en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), allí se introduce la noción de funciones verticales  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como aquellas de clase  $C^2$  para las cuales se cumple

$$\inf_x \partial_{11} f(x) > \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \sup_x |\partial_{ij} f(x)|.$$

Al considerar la topología  $C^2$  de Whitney en el conjunto  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  de funciones verticales, se demuestra en [30] que hay un conjunto abierto no vacío  $\mathcal{U}$  en  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  de manera que para toda  $f \in \mathcal{U}$  el enunciado anterior es válido. Cabe mencionar que las funciones verticales no son necesariamente  $C^2$ -convexas, sin embargo para toda  $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  existen constantes  $a_1, \dots, a_n$  tales que la función  $g$  dada por

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2$$

sí lo es. Ello es una adecuada herramienta para lograr una demostración de los principales resultados en [30]. Es importante mencionar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es del tipo vertical, entonces para todo  $\mu$  suficientemente grande, el conjunto  $C_\mu$  está contenido en el interior del epigrafo de la función  $C^2$ -convexa  $g_\mu = g - \mu$ , donde  $g$  es como arriba. En este caso cada punto en  $C_\mu$  tiene exactamente dos preimágenes contenidas en el epigrafo mencionado y ubicadas a diferentes lados del conjunto crítico del endomorfismo con retardo asociado a  $f_\mu = f - \mu$ .

En [33] se recurre a las ideas desarrolladas en [28] para introducir una noción de funciones del tipo *horizontal* en el contexto de funciones cuadráticas  $C^2$ -convexas de  $\mathbb{R}^3$ ; básicamente esta noción se refiere a funciones  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cuadráticas y  $C^2$ -convexas tales que para todo  $\mu$  suficientemente grande, la intersección de  $C_\mu$  con el paraboloido imagen del conjunto crítico  $\ell$  del endomorfismo con retardo  $F_\mu$  asociado a  $f_\mu = f - \mu$  es la unión disjunta de dos anillos dispuestos a diferentes lados de  $\ell$ . En este contexto son demostrados resultados análogos a los presentados en [34]. Si bien esta extensión de la horizontalidad es restricta a  $\mathbb{R}^3$  y al mundo cuadrático, las ideas y técnicas expuestas en [33] contienen el germen de la generalidad para un análisis similar cuando la función cuadrática sea sustituida por una función  $C^2$ -convexa  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en la que  $\inf_{w \in \mathbb{R}^3} \partial_{22} f(w)$  es lo suficientemente grande respecto de  $\sup_{w \in \mathbb{R}^3} |\partial_{ij} f(w)|$  con  $(i, j) \neq (2, 2)$ , en tal caso luce factible la veracidad de:

*Existe  $\mu^* \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu > \mu^*$ , el endomorfismo con retardo  $F_\mu$  asociado a  $f_\mu$  cumple con las siguientes propiedades:*

- (a) *El complemento de la cuenca de infinito de  $F_\mu$  es homeomorfo al producto de una circunferencia y un conjunto de Cantor en el plano, y es la clausura de la variedad estable de cualquiera de los dos puntos fijos de  $F_\mu$ .*
- (b) *El conjunto no errante  $\Omega_\mu$  de  $F_\mu$  es igual a  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_\mu^n(C_\mu)$ , es hiperbólico del tipo silla con variedades estables de dimensión uno y la dinámica de  $F_\mu$  a  $\Omega_\mu$  es topológicamente conjugada a la del shift unilateral en dos símbolos.*

Resaltamos que dar el paso de extender la horizontalidad de  $\mathbb{R}^3$  a dimensiones mayores requiere un poco más de atención, incluso en el caso cuadrático; por supuesto pensando en la búsqueda de un resultado como el de arriba esperado. Para funciones  $C^2$ -convexas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n > 3$ ), una condición del tipo  $\inf_{w \in \mathbb{R}^n} \partial_{22} f(w)$  suficientemente grande respecto de  $\sup_{w \in \mathbb{R}^n} |\partial_{ij} f(w)|$ ,  $(i, j) \neq (2, 2)$ , no garantiza ni siquiera que  $C_\mu \cap F_\mu(\ell)$  sea un conjunto que extienda la naturaleza de esa misma intersección en el caso que  $n = 3$  y  $f$  sea cuadrática  $C^2$ -convexa.

*Agradecimiento.* El autor agradece el apoyo financiero del Consejo de Desarrollo Humanístico, Científico y Tecnológico de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado a través del proyecto 011-CT-2012; también desea expresar su gratitud a la Universidad del Atlántico (Barranquilla, Colombia), donde parte de este trabajo fue escrito, por la invitación y hospitalidad.

## Referencias

- [1] E. Allman and J. Rhodes, *Mathematical Models in Biology: An Introduction*. Cambridge University Press (2004).
- [2] J. Banasiak, *Mathematical Models in One Dimension: An Introduction via Difference and Differential Equations*. Cambridge University Press (2013).
- [3] L. A. Bunimovich. Coupled Map Lattices: at the age of Maturity. *Lect. Notes Phys.* **671**, 9–32 (2005).
- [4] F. Brauer and C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Populations Biology and Epidemiology*. Texts in Applied Mathematics, 40. Springer-Verlag, New York (2001).
- [5] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics I*. Interscience Publishers, Inc. NY (1953).
- [6] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Bounded solutions of quadratic circulant difference equations. *J. Difference Equ. Appl.* Vol. **11**, No. **10**, 897 – 907 (2005).
- [7] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Hyperbolic real quadratic cellular automata. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* Vol. **12**, 795 – 809 (2005).
- [8] J. Delgado, J. Garrido, N. Romero, A. Rovella, F. Vilamajó. *On the Geometry of Quadratic Maps of the Plane*. Publ. Mat. Urug, **14**, 108–123 (2013)
- [9] V. Dobrynskiy. On properties of coupled quadratic mappings. *Nonlinear Analysis*. **35**, 247–267 (1999).
- [10] V. Dobrynskiy. Critical sets and properties of endomorphisms built by coupling of two identical quadratic mappings. *J. Dynam. Control Systems*. **5**, 227–254 (1999).
- [11] B. Fernandez and M. Jiang. Coupling two unimodal mapas with simple kneading sequences. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24**, 107–125 (2004).
- [12] M. Giaquinta and G. Modica. *Mathematical Analysis: Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*. Birkhäuser (2012).
- [13] W. H. Haemers. Interlacing eigenvalues and graphs. *Linear Algebra Appl.* Vol. **227-228**, 593 – 616 (1995).

- [14] G. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems, *Mathematical Systems Theory* **3**, 320 – 375 (1969).
- [15] S. Hidetsugu and T. Kazuhisa. Bifurcations of the Coupled Logistic Map. *Progr. Theoret. Phys.* **78 (2)**, 305–315 (1987).
- [16] Suk-Geun Hwang. Cauchy’s Interlace Theorem for Eigenvalues of Hermitian Matrices. *Amer. Math. Monthly*. Vol. **111**, No. **2**, 157 – 159 (2004).
- [17] K. Kaneko. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos. *Physica D*. **34**, 1–41 (1989).
- [18] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**. Cambridge University Press (1995).
- [19] W. W. Lin, C. C. Peng and C. S. Wang. Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *Internat. J. Bifur. and Chaos* **9 (8)**, 1635–1652 (1999).
- [20] W. W. Lin and Y. Q. Wang. Chaotic Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *SIAM J. Applied Dynamical Systems* **1**, 175–189 (2002).
- [21] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich and E. Mosekilde. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps. *Phys. Rev. E*. **57 (3)**, 2713–2724 (1998).
- [22] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich and E. Mosekilde. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps. *Phys. Rev. E*. **60 (3)**, 2817–2830 (1999).
- [23] R. Mañé and C. Pugh. Stability of endomorphisms. *Lecture Notes in Math*. Vol. **468**, 175–184. Springer-Verlag, New York (1975).
- [24] P. Montel. *Leçons sur les Récurrences et leurs Applications*. Gauthier Vilars, (1957).
- [25] Constantin Niculescu and Lars-Erik Persson. *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York (2006).
- [26] F. Przytycki. On  $\Omega$ -stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A, *Studia Math.* **60** (1977), 61–77.
- [27] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. On the Dynamics fo  $n$ -Dimensional Quadratic Endomorphisms. *Commun. Math. Phys.* Vol. **195**, 295 – 308 (1998).
- [28] N. Romero, A. Rovella y F. Vilamajó. *Endomorfismos convexos con retardo en  $\mathbb{R}^2$ : la dinámica de los cuadráticos*. XI Escuela Venezolana de Matemática. Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados – Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (1998).
- [29] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Invariant manifolds for delay endomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Vol. **7**, No. **1**, 35 – 50 (2001).
- [30] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Dynamics of vertical delay endomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. Vol. **3**, No. **3**, 409 – 422 (2003).
- [31] N. Romero, A. Rovella and R. Vivas. Invariant Manifolds and Synchronization for Coupled Logistic Mappings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics Sciences*, **4 (1)**. 39 – 57 (2007).

- [32] N. Romero, J. Silva and R. Vivas. On a coupled logistic map with large strength. *J. Math. Anal. Appl.* **415**, 346–357 (2014).
- [33] N. Romero, J. Silva, R. Vivas. *On bounded solutions of a third order difference equations*. Preprint. Sometido a publicación (2015).
- [34] A. Rovella and F: Vilamajó. Convex Delay Endomorphisms. *Commun. Math. Phys.* Vol. **174**, 393 – 407 (1995).
- [35] R. A. Vivas. *Variedades invariantes para la aplicación logística acoplada*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. (2007).
- [36] J. Weitkämper. A Study of Bifurcations in a Circular Real Cellular Automaton. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **3 (2)**, 293–321 (1993).

Para citar este artículo: N. Romero. 2016, “Sobre funciones  $C^2$ -convexas y dinámica discreta”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# Integrales de Darboux para un caso particular del Circuito de Chua

## Darboux integrals for a particular case Chua Circuit

Angélica Arroyo Cabrera <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla-Colombia*  
*angelicarroyo1020@gmail.com*

Jorge Rodríguez Contreras<sup>2</sup>

<sup>2</sup> *Universidad del Norte, Barranquilla-Colombia*  
*jorge.jrodri@gmail.com*

---

---

### Resumen

En este artículo se estudia la integrabilidad de un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento del Circuito de Chua ( Ver 1), para  $\beta > 0$  caracterizamos todas las integrales primeras racionales generalizadas de tipo Darboux y se muestra que el número de integrales primeras racionales generalizadas linealmente independientes del sistema mencionado es como máximo la dimensión del subespacio vectorial mínimo de  $\mathbb{R}^3$  que contiene el conjunto:

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

Es decir, el número de integrales primeras racionales generalizadas del sistema son sólo las calculadas, no hay otras.

**Palabras claves:** Integrabilidad de Darboux, Factor exponencial, polinomios de Darboux, Sistema de Chua, Integrales primeras racionales generalizadas.

### Abstract

In this paper we study the integrability of a particular case of the system of differential equations describing the behavior of the circuit Chua (See 1), for  $\beta > 0$  we characterize all its generalized rational first integrals, which contains the Darboux type first integrals and it is shown that the number of functionally independent generalized rational first integrals of system is at most the dimension of the minimal vector subspace of  $\mathbb{R}^3$  containing the set

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

That is, the number of first integrals of system are only calculated, no other.

**Keywords:** Darboux integrability; exponential factor; Darboux polynomials; Chua system; generalized, rational first integrals.

---

---

### 1. Introducción

El Método de Darboux es un método para construir integrales primeras de campos vectoriales polinomiales utilizando sus curvas invariantes algebraicas. Ésto a través de la construcción de una función (denominada función tipo Darboux) que juega el papel de factor integrante del sistema.

En este artículo se estudia la integrabilidad de un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento del Circuito de Chua, el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y \end{aligned} \quad h(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ cx & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (1)$$

### 2. Marco teórico o Fundamentos teóricos

**Definición 1.** Sea  $\mathbb{C}[x, y, z]$  el anillo de todos los polinomios con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$  es un polinomio Darboux del campo vectorial  $\mathbb{X}$  si existe un polinomio  $K \in \mathbb{C}[x, y, z]$  tal que  $\mathbb{X}f = Kf$ .

**Definición 2.** El polinomio  $K = K(x, y, z)$  se denomina cofactor de  $f$ .

En nuestro caso trabajaremos con polinomios complejos de Darboux en sistemas diferenciales reales, ya que con frecuencia la estructura compleja garantiza la existencia de integrales primeras reales y a veces si sólo se utilizan números reales no es posible hallar todas las integrales primeras reales.

**Definición 3.** Si  $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$  es un polinomio Darboux, entonces  $f(x, y, z) = 0$  es una superficie algebraica invariante para el sistema de diferencial (1), es decir, si una órbita tiene un punto de la superficie  $f(x, y, z) = 0$  toda la órbita está contenida en ella.

**Definición 4.** Un factor exponencial  $F(x, y, z)$  del campo vectorial  $\mathbb{X}$  es una función exponencial de la forma  $\exp(g/h)$  con  $g$  y  $h$  polinomios en  $\mathbb{C}[x, y, z]$  y satisfacen  $\mathbb{X}F = \mathbb{L}F$  para algunos  $\mathbb{L} \in \mathbb{C}[x, y, z]$  con un grado a lo sumo 2.

Los factores exponenciales aparecen cuando algunos polinomios de Darboux tienen multiplicidad mayor que uno.

**Definición 5.** Una primera integral del sistema (1) se llama tipo Darboux si es una primera integral de la forma:

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}$$

donde  $f_1, \dots, f_p$  son polinomios de Darboux y  $F_1, \dots, F_q$  son factores exponenciales.

**Definición 6.** Sea  $U$  un subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbb{R}^3 \setminus U$  tiene medida de Lebesgue cero. Se dice que una función real no constante  $H = H(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una integral primera si  $H(x(t), y(t), z(t))$  es constante para todos los valores de una solución  $(x(t), y(t), z(t))$  de  $\mathbb{X}$  contenido en  $U$ , esto es  $\mathbb{X}H|_U = 0$ .

La existencia de una primera integral de un sistema diferencial en  $\mathbb{R}^3$  permite reducir su estudio en una dimensión. Ésta es la principal razón para buscar integrales primeras.

**Definición 7.** Dos funciones  $f_1(x, y, z)$  y  $f_2(x, y, z)$  se dice que son independientes si sus gradientes son vectores linealmente independientes para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  excepto tal vez para un conjunto de medida de Lebesgue cero. Si el Campo de vectores  $\mathbb{X}$  tiene dos integrales primeras independientes  $H_1$  y  $H_2$ , se puede decir que es completamente integrable. En este caso, las orbitas de  $\mathbb{X}$  están contenidas en las curvas  $\{H_1(x, y, z) = h_1\} \cap \{H_2(x, y, z) = h_2\}$  donde  $h_1, h_2$  varían en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 8.** Se define una función racional generalizada como el cociente de dos funciones analíticas.

**3. Análisis de resultados o Resultados y análisis**

**3.1. Integrales Primeras de Tipo Darboux**

Se define el espacio de vectores  $\mathbb{X}$  asociado a (1) como:

$$\mathbb{X} = [\alpha(y - h(x)) \frac{\partial}{\partial x} + (x - y + z) \frac{\partial}{\partial y} - \beta y \frac{\partial}{\partial z}]$$

Lo que sigue es nuestro resultado principal para el sistema (1) con  $\beta > 0$

**Teorema 1.** La única integral primera racional generalizada del sistema (1) se calcula teniendo en cuenta:

i) Si  $\beta < 1/4$ , son funciones en las variables

$$|z + x| \left[ \frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]^{\left( \frac{\beta}{r_1 - r_2} \right)}$$

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces reales distintas de  $\beta s^2 - s + 1$ .

ii) Si  $\beta = 1/4$ , son funciones en las variables

$$\left[ \frac{1}{\frac{y}{z+x} - r} \right]^\beta |z + x| E \left[ \frac{\beta r}{y/(z+x) - r} \right]$$

Donde  $r$  es una raíz real doble de  $\beta s^2 - s + 1$ .

iii) Si  $\beta > 1/4$ , son funciones en las variables

$$\left| \left( \frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1 \right|^{1/2} (z + x) E \left[ \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan \left( \frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right) \right]$$

**Nota :**  $e^x = E(x)$

**Demostración**

Consideremos el sistema (1) con  $\beta > 0$ , es decir:  $\dot{x} = \alpha(y - h(x)), \dot{y} = x - y + z, \dot{z} = -\beta y$

podemos expresar  $\dot{y}$  como  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt} = -\beta y$ , entonces

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\beta y}{x - y + z}$$

$$(x - y + z)dz + \beta y dy = 0 \tag{2}$$



La ecuación diferencial (2) se puede convertir en homogénea a través de las sustituciones:

$$\begin{aligned} z &= u - x \\ y &= v \end{aligned}$$

Que se obtienen teniendo en cuenta la solución del sistema

$$\begin{cases} z &= y - x \\ y &= 0 \end{cases}$$

en el punto  $(0, -x)$

Luego, (2) queda:

$$(-v + u)du + \beta vdv = 0 \tag{3}$$

Sea  $v = su$ , entonces  $dv = uds + sdu$ . Entonces (3) queda convertida en:

$$(-su + u)du + \beta su(uds + sdu) = 0$$

separando variables se obtiene:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds \tag{4}$$

La integral del miembro izquierdo de (4) se resuelve teniendo en cuenta lo siguiente:

- i) Si  $\beta < 1/4$ ,  $\beta s^2 - s + 1$  tiene dos raíces reales  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4\beta}}{2\beta}$  y  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4\beta}}{2\beta}$ .  
La ecuación (4) queda:

$$\ln |z + x| = -\frac{\beta}{r_1 - r_2} \ln \left[ \frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]$$

Entonces,

$$H = \frac{\beta}{r_1 - r_2} \ln \left[ \frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right] + \ln |z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (1). Por lo tanto

$$K = E(H) = |z + x| \left[ \frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]^{\left( \frac{-\beta}{r_1 - r_2} \right)}$$

- ii) Si  $\beta = 1/4$ ,  $\beta s^2 - s + 1$  tiene una raíz doble  $r \in \mathbb{R}, r = \frac{1}{2\beta}$ .  
Aquí, la ecuación (4) queda:

$$\ln |u| = -\beta \ln \left| \frac{y}{z+x} - r \right| + \frac{\beta r}{\left[ \frac{y}{z+x} - r \right]}$$

Entonces,

$$H = \beta \ln \left| \frac{y}{z+x} - r \right| - \frac{\beta r}{\left[ \frac{y}{z+x} - r \right]} + \ln |z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (1). Por lo tanto

$$K = E(H) = \left| \frac{y}{z+x} - r \right|^\beta |z+x| E \left[ \frac{\beta r}{y/(z+x) - r} \right]$$

iii) Si  $\beta > 1/4$ .

En este caso, las raíces  $r_1$  y  $r_2$  del polinomio  $\beta s^2 - s + 1$  son complejas, entonces, la integral  $\int \frac{\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds$  la resolveremos así:

$$\begin{aligned} \int \frac{\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds &= \int \frac{\beta s}{\beta \left[ \left( s - \frac{1}{2\beta} \right)^2 + \frac{4\beta-1}{4\beta^2} \right]} ds \\ &= \int \frac{\frac{4\beta^2}{4\beta-1} s}{\left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1} ds \\ &= \frac{2\beta}{\sqrt{4\beta-1}} \int \frac{\frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}}}{\left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1} ds + \frac{2\beta}{\sqrt{4\beta-1}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{4\beta-1}}}{\left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1} ds \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \arctan \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando ahora en (4):

$$\ln |z+x| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \arctan \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)$$

Entonces

$$H = \frac{1}{2} \ln \left| \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \arctan \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right) + \ln |z+x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (1). Por lo tanto :

$$K = E(H) = \left| \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right)^2 + 1 \right|^{1/2} (z+x) E \left[ \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \arctan \left( \frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}} \right) \right]$$

**Teorema 2.** Supongamos que el sistema diferencial (1) tiene a  $p$  como un punto singular y sean  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  los valores propios de la parte lineal del sistema (1) en  $p$ . Entonces el número de integrales primeras racionales generalizadas linealmente independientes del sistema (1) es como máximo la dimensión del subespacio vectorial mínimo de  $\mathbb{R}^3$  que contiene el conjunto:

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

**Demostración**

Este teorema sirve para mostrar que el número de integrales primeras racionales generalizadas son sólo las calculadas en el teorema anterior, no hay otras.

En primer lugar observemos que el punto singular del sistema (1) es  $(0, 0, 0)$ . Los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  de la matriz jacobiana del sistema (1) en el punto singular se relacionan a través del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha c + 1)\lambda^2 + (\alpha c - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta c$$

de donde:

- Si  $\alpha = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}}{2}$$

Por lo tanto  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0$  es equivalente a

$$k_2(-1 + \sqrt{1 - 4\beta}) + k_3(-1 - \sqrt{1 - 4\beta}) = 0$$

O en otras palabras:

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{-1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{-1 + \sqrt{1 - 4\beta}} \quad (5)$$

Es evidente que el lado izquierdo de (5) es un número racional (una vez que  $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ ) y que la elección de  $\beta$  de una manera conveniente el lado derecho de (5) es irracional. Por lo tanto (5) no puede sostenerse para esta elección conveniente de  $\beta$ . Por tanto, para este punto singular  $(0, 0, 0)$ , la dimensión del subespacio vectorial mínimo de  $\mathbb{R}^3$  que contiene el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

es claramente uno, generado por  $(k_1, 0, 0)$ . Así se deduce de este teorema que el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y \end{aligned}$$

puede tener solo una integral primera racional generalizada, que debe ser una función de  $H$ .

- Si  $c = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}}{2}$$

Por lo tanto  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0$  es equivalente a

$$k_2(-1 + \sqrt{1 - 4\beta}) + k_3(-1 - \sqrt{1 - 4\beta}) = 0$$

O en otras palabras:

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{-1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{-1 + \sqrt{1 - 4\beta}} \quad (6)$$

Es evidente que el lado izquierdo de (6) es un número racional (una vez que  $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ ) y que la elección de  $\beta$  de una manera conveniente el lado derecho de (6) es irracional. Por lo tanto (6) no puede sostenerse para esta elección conveniente de  $\beta$ . Por tanto, para este punto singular  $(0, 0, 0)$ , la dimensión del subespacio vectorial mínimo de  $\mathbb{R}^3$  que contiene el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

es claramente uno, generado por  $(k_1, 0, 0)$ . Así se deduce de este teorema que el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z & h(x) &= \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y \end{aligned}$$

puede tener solo una integral primera racional generalizada, que debe ser una función de  $H$ . Con ésto se completa la demostración del teorema anterior.

#### 4. Conclusión

En este artículo se muestra que la única integral primera racional generalizada de tipo Darboux del sistema (1) se calcula teniendo en cuenta:

i) Si  $\beta < 1/4$ , son funciones en las variables

$$|z + x| \left[ \frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]^{\left( \frac{\beta}{r_1 - r_2} \right)}$$

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces reales distintas de  $\beta s^2 - s + 1$ .

ii) Si  $\beta = 1/4$ , son funciones en las variables

$$\left[ \frac{1}{\frac{y}{z+x} - r} \right]^\beta |z + x| E \left[ \frac{\beta r}{y/(z+x) - r} \right]$$

Donde  $r$  es una raíz real doble de  $\beta s^2 - s + 1$ .

iii) Si  $\beta > 1/4$ , son funciones en las variables

$$\left| \left( \frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1 \right|^{1/2} (z + x) E \left[ \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan \left( \frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right) \right]$$

Y se muestra que el número de integrales primeras racionales generalizadas linealmente independientes del sistema mencionado es como máximo la dimensión del subespacio vectorial mínimo de  $\mathbb{R}^3$  que contiene el conjunto:

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

Es decir, el número de integrales primeras racionales generalizadas del sistema son sólo las calculadas, no hay otras.

#### Referencias

- [1] J.Ginoux, C.Letellier and L.O. Chua, Topological analysis of chaotic solution of a three-element memristive circuit, *Int.J.Bifurcation Chaos* **20** (2010) 3819-3827.
- [2] J.Llibre and X.Zhang, Darboux theory of the integrability in  $\mathbb{C}^n$  taking into account the multiplicity, *J. Differential Equations* **246** (2009) 541-551
- [3] J.Llibre and X.Zhang, Darboux theory of the integrability for polynomial vector fields in  $\mathbb{R}^n$  taking into account the multiplicity at infinity, *Bull. Sci. Math.* **133** (2009) 765-778
- [4] B.Muthuswamy and L.O. Chua, Simplest chaotic circuit, *Int.J.Bifurcation Chaos* **20** (2010) 1567-1580
- [5] J.Llibre and C. Valls, On the integrability of de Muthuswamy-Chua System, *Int.J.Bifurcation Chaos* (2012) 477-488

[6] C. Pantazi, El Método de Darboux, *Notas del primer Seminario de Integrabilidad de la Universitat de Catalunya*(Marzo 2005) 61-72

Para citar este artículo: Angélica Arroyo Cabrera et al. 2016, Integrales de Darboux para un caso particular del Circuito de Chua. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>

## Sobre una propiedad equivalente a la condición de pesos $A_p$ para el operador maximal de Hardy-Littlewood

## About a property equivalent to $A_p$ weight condition for the Hardy-Littlewood maximal operator

Alvaro Corvalán

*Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina*

*acorvala@ungs.edu.ar*

---

---

### Resumen

Recientemente se ha observado que para un peso  $w$  la desigualdad puntual para operadores de Hardy-Littlewood  $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$ , que es consecuencia del tipo débil  $(p, p)$  respecto de un peso  $w$  en realidad es equivalente a la acotación débil  $(p, p)$ . Aquí proporcionamos una demostración nueva y elemental de dicha equivalencia que, a diferencia de las demostraciones existentes, no requiere apoyarse en resultados de cubrimientos.

*Palabras claves:* Hardy-Littlewood Maximal Operator  $A_p$  Classes Weight Functions

### Abstract

The inequality  $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$ , for a weight function  $w$ , is a consequence of the weak type  $(p, p)$  for the Hardy-Littlewood maximal operator from  $L^p(w)$ . A recent result shows that the inequality also implies the weak type  $(p, p)$  so, in fact, both conditions are equivalent. Here we give a new an elementary proof of the equivalence that, unlike existing demonstrations, it requires no covering properties.

*Keywords:* Operator Maximal de Hardy-Littlewood clases  $A_p$  funciones de pesos

---

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los pesos que cumplen las condiciones  $A_p$  tienen muchas propiedades interesantes relacionadas con la acotación de operadores, y dichas clases tienen una rica estructura que en particular habilitan importantes resultados de extrapolación para distintas familias de operadores y clases de pares de funciones.

Aquí entenderemos por cubos siempre a cubos de  $\mathbb{R}^n$  con lados paralelos a los ejes coordenados (es decir que serán el producto cartesiano de  $n$  intervalos de  $\mathbb{R}$  de la misma longitud. Y notaremos  $|Q|$  al volumen de dichos cubos.

Comenzamos por algunas definiciones:

Entendemos por un peso  $w$  una función medible, no negativa y localmente integrable  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Como es de uso frecuente, dado un conjunto medible  $E$ , a veces denotaremos  $w(E) = \int_E w(x) dx$ . Para evitar casos triviales asumiremos que  $w$  es no nula en algún conjunto de medida positiva -de lo contrario  $w$  sería nula para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Notaremos  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , o a veces sencillamente  $L^1_{loc}$ , a las funciones medibles Lebesgue tales que para todo conjunto  $E$  de medida finita vale  $\int_E f(x) dx < \infty$  -funciones localmente integrables-.

El estudio de los pesos, y en general de los pesos  $A_p$  -que enseguida definiremos- está ligada fuertemente al estudio de la acotación del operador de Hardy-Littlewood  $M$  que se define de la siguiente manera.

**Definición 1.** Dada una función  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , definimos

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \tag{1}$$

**Definición 2.** Dada una función  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , definimos

$$M^c f(x) = \sup_{Q \in Q_x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \tag{2}$$

donde  $Q_x$  es la familia de cubos cuyo centro es  $x$ .

**Observación 3.** En distintos textos -e incluso en distintos apartados de un mismo texto (confrontar, por ej. [9])- se llama función maximal de Hardy-Littlewood a  $Mf$  o a  $M^c f$  (o a operadores análogos reemplazando los cubos por bolas de  $\mathbb{R}^n$ ), y de hecho en diversos artículos se denota  $Mf$  lo que aquí llamamos  $M^c f$ . Sin embargo, para las cuestiones que nos ocupan aquí ambos operadores son esencialmente intercambiables debido a que son puntualmente equivalentes:  $T_1$  y  $T_2$  se dicen puntualmente equivalentes si existen constantes positivas  $A$  y  $B$  -que no dependen de  $x$  ni de  $f$ , solo de la dimensión  $n$ - tales que  $\forall f \in L^1_{loc}$  y  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A \cdot T_2 f(x) \leq T_1 f(x) \leq B \cdot T_2 f(x)$$

En tal caso escribiremos  $T_1 \approx T_2$ . Claramente  $\approx$  es una relación de equivalencia. De hecho con  $M$  y  $M^c$  esto sucede para  $A = 1$  y  $B = 2^n$ , en efecto, que  $M^c f(x) \leq Mf(x)$  es evidente ya que los cubos centrados en  $x$  es una subfamilia de todos los cubos a los que  $x$  pertenece, de modo que

$$\sup_{Q \in Q_x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

, por otra parte, dado  $x$  y un cubo cualquiera  $Q$  con  $x \in Q$ , si tomamos  $\tilde{Q}_x$  el cubo centrado cuyo lado es el doble del lado del cubo  $Q$  está claro que  $Q \subset \tilde{Q}_x$  y que  $|\tilde{Q}_x| = 2^n |Q|$  de modo que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq 2^n \frac{1}{|\tilde{Q}_x|} \int_{\tilde{Q}_x} |f(y)| dy \leq 2^n M^c f(x)$$



. Como esto vale para todo  $Q \ni x$  tenemos que  $Mf(x) \leq M^c f(x)$ . Es decir

$$M^c f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n \cdot M^c f(x) \quad (3)$$

, por lo tanto  $M \approx M^c$ .

**Observación 4.** El operador  $M$ , lo mismo que  $M^c$  y varios otros operadores similares, aunque no es lineal, es un operador sublineal: Un operador  $T$  que va de un espacio vectorial de funciones medibles en otro espacio de funciones medibles a valores complejos reales-, diremos que es sublineal si para cada par de funciones  $f$  y  $g$  en el dominio de  $T$  vale que  $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$ , y vale que  $|T(\alpha f)| = |\alpha| |Tf|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

## 2. LA ACOTACIÓN DEL OPERADOR M

Dada una medida  $\mu$  se trata de determinar para cuales espacios  $L^p(\mu)$  el operador  $f \mapsto Mf$  está acotado o al menos satisface una condición similar pero más débil. Definamos más formalmente estas cuestiones:

**Definición 5.** Si  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  son espacios de medida, un operador  $T$  que va de  $L^p(\mu)$  en  $L^q(\nu)$  se dirá que es de tipo fuerte  $(p, q)$  si es un operador acotado de  $L^p(\mu)$  en  $L^q(\mu)$ , es decir si para toda  $f \in L^p(\mu)$  resulta que  $Tf \in L^q(\nu)$  y existe una constante positiva  $C$  tal que

$$\|Tf\|_{L^q(\nu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)} \quad (4)$$

para toda  $f \in L^p(\mu)$ . La menor de tales constantes  $C$  es llamada la norma de operadores de  $T$ .

**Observación 6.** Si  $q < \infty$  la desigualdad (4) queda así:

$$\left( \int_Y |Tf(y)|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5)$$

Puede verse entonces que como para todo  $\lambda > 0$  vale que

$$\lambda \nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} = (\lambda^q \nu(\{y \in Y : |Tf(y)|^q > \lambda^q\}))^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_{\{y: |Tf(y)|^q > \lambda^q\}} \lambda^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_{\{y: |Tf(y)|^q > \lambda^q\}} |Tf(y)|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_Y |Tf(y)|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}}$$

entonces si  $T$  es de tipo fuerte  $(p, q)$  con  $q < \infty$ , debido a la desigualdad (5) tenemos que existe  $C > 0$  tal que para toda  $f \in L^p(\mu)$  y para todo  $\lambda > 0$  vale:

$$\lambda \nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

lo que motiva la siguiente:

**Definición 7.** Si  $T$  es un operador que va de  $L^p(\mu)$  en las funciones medibles respecto de  $\mu$ , decimos que  $T$  es de tipo débil  $(p, q)$  con  $q < \infty$  si existe una constante positiva  $C$  tal que para toda  $f \in L^p(\mu)$  y para todo  $\lambda > 0$  vale la desigualdad (6).

**Observación 8.** Para el caso  $q = \infty$  cabe recordar que  $g \in L^\infty(\nu)$  si y solo si existe una constante  $k$  con  $0 \leq k < \infty$  tal que  $\nu(\{y \in Y : |g(y)| > k\}) = 0$  y  $\|g\|_{L^\infty(\nu)}$  es el ínfimo de tales  $k$ . En  $\nu(\{y \in Y : |g(y)| > k\}) = 0$  identificamos los tipos débil y fuerte es decir  $T$  es de tipo débil y fuerte  $(p, \infty)$  si y solo si  $T : L^p(\mu) \rightarrow L^\infty(\nu)$  es un operador acotado, es decir si existe  $C > 0$  tal que para toda  $f \in L^p(\mu)$  vale

$$\|Tf\|_{L^\infty(\nu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)}$$

De modo que a partir de las observaciones y definiciones precedentes es inmediato que si  $T$  es de tipo fuerte  $(p, q)$  entonces  $T$  también es de tipo débil  $(p, q)$ . En general para  $q < \infty$  la recíproca no es cierta, y un operador de tipo débil  $(p, q)$  puede no ser de tipo fuerte  $(p, q)$ . Por ejemplo  $M$  es de tipo débil  $(1, 1)$  pero no de tipo fuerte  $(1, 1)$ .

En  $\mathbb{R}^n$  es interesante la caracterización de aquellas medidas  $\mu$  para las que  $M$  es de tipo fuerte  $(p, p)$ , o al menos de tipo débil  $(p, p)$ , respecto de  $\mu$ .

Pero en tales casos resulta que la medida  $\mu$  tiene que ser absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue (ver [1]) por lo tanto  $d\mu(y) = w(y)dy$  para un peso  $w$  tal que para  $E$  medible Lebesgue vale que  $w(E) = 0$  si y solo  $|E| = 0$  -donde  $|E|$  es la medida de Lebesgue de  $E$ - y podemos siempre referirnos a las medidas dadas por un peso como función de densidad, y los espacios  $L^p(dw)$  se notan usualmente  $L^p(w)$ . Así que en definitiva nos interesan la acotaciones tipo fuerte  $(p, p)$  o tipo débil  $(p, p)$  respecto de  $w$ , es decir, para  $p < \infty$  si:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cierta  $C > 0$  y para toda  $f \in L^p(w)$  -tipo fuerte  $(p, p)$ -, o si por otra parte:

$$\lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

para cierta  $C > 0$ , para toda  $f \in L^p(w)$ , y para todo  $\lambda > 0$  -tipo débil  $(p, p)$ -.

Cuando un operador satisface la desigualdad (7) para toda  $f \in L^p(w)$  decimos que es de tipo débil  $(p, p)$ . Es decir que el tipo fuerte  $(p, p)$  implica el tipo débil  $(p, p)$ , y la recíproca en general no es cierta.

**Observación 9.** Si  $w$  es un peso tal que  $w(E) = 0$  si y solo  $|E| = 0$  es inmediato de la definición de  $M$  que  $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \leq \|f\|_{L^\infty(w)}$  de modo que  $M$  es de tipo débil y fuerte  $(\infty, \infty)$  con norma de operadores menor o igual que 1. De hecho tomando la función característica de un cubo:  $f = \chi_Q$  es fácil ver que  $\|Mf\|_{L^\infty(w)} = \|f\|_{L^\infty(w)} = 1$  de modo que la norma de  $M$  en el caso  $(\infty, \infty)$  es 1.

**Observación 10.** Aunque el tipo débil  $(p, p)$  no implica en general el tipo fuerte  $(p, p)$  hay situaciones interesantes en que sí ocurre, lo cual es importante, porque usualmente es más fácil demostrar que un operador es de tipo débil. Por ejemplo, para el operador  $M$  sucede que el tipo débil  $(p, p)$  para  $p > 1$  respecto de un peso  $w$  nos asegura que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $M$  es de tipo débil  $(p - \varepsilon, p - \varepsilon)$ , y esto, junto con la observación anterior de que  $M$  es de tipo débil  $(\infty, \infty)$  nos permite asegurar que, de hecho,  $M$  será de tipo fuerte  $(p, p)$ , usando una técnica de interpolación que permite probar acotaciones de tipo fuerte para valores de  $p$  intermedios entre  $p_0$  y  $p_1$  con  $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$  si un operador sublineal  $T$  es de tipo débil para  $(p_0, p_0)$  y de tipo débil  $(p_1, p_1)$ . El resultado fue anunciado en 1939 ([6]), mencionando que la demostración se publicaría en un artículo posterior por Józef Marcinkiewicz quien falleció poco después durante la segunda guerra mundial. Quince años después Anthony Zygmund publicó una demostración

completa -[7]-, y se hallaron posteriormente numerosas generalizaciones -ver, p. ej. [8]-. De hecho, ya el resultado original permite interpolar entre  $(p_0, q_0)$  y  $(p_1, q_1)$  con  $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$  y  $1 \leq q_0 < q < q_1 \leq \infty$ , pero en este artículo nos alcanza con la siguiente versión.

**Teorema 11.** (de Interpolación de Marcinkiewicz) Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios de medida,  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ ,  $T$  un operador sublineal que va de  $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$  en las funciones medibles en  $(Y, \nu)$  tal que  $T$  es de tipo débil  $(p_0, p_0)$  y de tipo débil  $(p_1, p_1)$ . Tenemos entonces que  $T$  es de tipo fuerte  $(p, p)$ .

La demostración de este resultado de interpolación, usando sólo conceptos habituales de medida e integración, puede encontrarse, por ejemplo, en [9] (Cap 2, Teo. 2.4).

**Definición 12.** Decimos que  $w$  está en la clase  $A_p$  para  $1 < p < \infty$  si existe una constante positiva  $C > 0$  tal que para cualquier cubo  $Q$  se cumple que

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C \tag{8}$$

Para  $p = 1$  decimos que  $w$  está en  $A_1$  si existe  $C > 0$  tal que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \cdot w(x) \tag{9}$$

para casi todo  $x \in Q$ . Equivalentemente  $w$  está en  $A_1$  si existe  $C > 0$  tal que

$$Mw(x) \leq C \cdot w(x) \tag{10}$$

para casi todo  $x$ .

Tanto para las definiciones de las clases  $A_p$  con  $p = 1$  y con  $p > 1$  denotamos  $[A_p]$  a la menor constante  $C$  que verifica las desigualdades 8,9, o 10. Es decir que  $[A_p] = \sup_Q \left( \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \right)$

si  $p > 1$ , y para  $p = 1$  es  $[A_1] = \left\| \frac{Mw}{w} \right\|_{\infty}$  (es fácil ver a partir de la definición de  $M$  que si  $w$  fuera nula en un conjunto de medida positiva entonces 9 o 10 sólo puede valer si  $w \equiv 0$  en casi todo punto).

Por un conocido teorema debido a Benjamin Muckenhoupt para  $n = 1$  y Ronald Coifman y Charles Fefferman para  $n > 1$ ) la condición  $A_p$  es equivalente al tipo débil para  $1 \leq p < \infty$ . (ver [1] y [3]).

Usando el resultado de interpolación de Marcinkiewicz resulta que el último teorema implica que si  $w \in A_{p_0}$  entonces  $M$  es de tipo fuerte  $(p, p)$  para todo  $p > p_0$ . Pero en realidad, si  $p_0 > 1$  puede probarse que si  $w \in A_{p_0}$  no sólo es de tipo débil  $(p_0, p_0)$  sino también de tipo fuerte  $(p_0, p_0)$ . Eso se debe al siguiente resultado:

**Teorema 13.**  $(A_p \Rightarrow A_{p-\varepsilon})$

Si  $w \in A_{p_0}$  con  $p_0 > 1$  entonces  $w \in A_{p_0-\varepsilon}$  para algún  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < p_0 - 1$ .

La demostración puede hallarse, por ejemplo, en [5] o [9]. Esencialmente se apoya en el hecho de que si  $w$  pertenece a alguna clase  $A_p$  entonces satisface, para algún  $\varepsilon > 0$  y alguna constante positiva  $C$  una desigualdad de la forma:

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w$$

Estas desigualdades se conocen como desigualdades de Hölder inversas -debido a que la desigualdad opuesta vale con constante  $C = 1$  como consecuencia fácil de la desigualdad de Hölder usual-

También puede plantearse, en términos del operador maximal de Hardy-Littlewood ponderado respecto de  $w$ ,  $M_w f$ , otra condición que recientemente se observó (ver [2]) que también es equivalente a la condición  $A_p$ . Definamos  $M_w f$ :

**Definición 14.** Sea  $f$  localmente integrable respecto de  $w$ , definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood ponderado respecto de  $w$  :

$$M_w f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy \tag{11}$$

Si  $w(Q) = 0$  la expresión  $\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy$  se interpreta como 0.

Claramente si  $w \equiv 1$  es  $M_w = M$ .

De manera similar a la definición de  $M^c$  podemos definir también un operador maximal centrado ponderado respecto de  $w$ , que notaremos  $M_w^c$ :

**Definición 15.** Sea  $f$  localmente integrable respecto de  $w$ , definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood centrado ponderado respecto de  $w$  :

$$M_w^c f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy \tag{12}$$

**Observación 16.** A diferencia del caso de  $M$  y  $M^c$ , en general los operadores  $M_w$  y  $M_w^c$  no son equivalentes salvo que  $w$  cumpla alguna condición adicional. Claramente  $M_w^c f(x) \leq M_w f(x)$  pero no siempre existe una constante  $B > 0$  que asegure que  $M_w f(x) \leq B M_w^c f(x)$ . Una propiedad que permite conseguir asegurar la última desigualdad es que  $w$  sea un peso duplicante: Decimos que  $w$  es duplicante si existe una constante positiva  $c$  tal que para todo cubo  $Q$  vale que  $w(2Q) \leq c \cdot w(Q)$  donde llamando  $2Q$  al cubo que tiene el mismo centro que  $Q$  y el doble de su lado. Luego si  $w$  es duplicante entonces  $M_w \approx M_w^c$ .

Es fácil ver, a partir de la definición de las clases  $A_p$ , que si  $w \in A_p$  entonces existe una constante positiva  $c > 0$  tal que  $M f(x)^p \leq c \cdot M_w(|f|^p)(x)$ . En efecto, si  $p = 1$  tenemos que para  $w \in A_1$  por la desigualdad 9 vale que existe  $C > 0$  tal que  $\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \cdot w(x)$  en casi todo punto, y entonces para cualquier  $Q$  vale que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| C w(y) \frac{|Q|}{w(Q)} dy = \frac{C}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy$$

, de donde tomando supremos sobre  $Q$  se obtiene  $M f(x) \leq c \cdot M_w(|f|)(x)$ .

Por otra parte, para  $p > 1$ , aplicando la desigualdad de Hölder respecto de la medida  $w(y)dy$ , y utilizando que para  $p'$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  vale que  $1 - p' = \frac{-1}{p-1}$  y que  $\frac{p}{p'} = p - 1$ , y usando la condición  $A_p$  dada en la definición de arriba a tenemos que

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \cdot 1 dy \right)^p = \frac{1}{|Q|^p} \left( \int_Q |f(y)| \cdot \frac{1}{w(y)} w(y) dy \right)^p$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{|Q|^p} \left( \int_Q |f(y)|^p w(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_Q \left( \frac{1}{w(y)} \right)^{p'} w(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &= \frac{1}{|Q|^p} \left( \int_Q |f(y)|^p w(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &= \frac{1}{|Q|} \frac{1}{|Q|^{p-1}} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy \cdot \left( \int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \\
 &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy \cdot \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \\
 &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy \frac{C}{\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx} = \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy
 \end{aligned}$$

, y tomando de nuevo supremos sobre los cubos, tenemos:

$$Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x) \tag{13}$$

Es decir, revisando el razonamiento lo que vimos es que las condiciones  $A_p$  implican, en cada cubo  $Q$  y para toda  $f$  localmente integrable, desigualdades locales de la forma

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^p \leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy \tag{14}$$

; y de allí obtuvimos las desigualdades puntuales 13, tomando supremos sobre los cubos.

Por otra parte puede verse que si vale en cada cubo la condición 14 entonces  $w \in A_p$ : En el caso  $p = 1$  para cualquier  $x$  del interior de  $Q$  tomamos una familia de aproximantes de  $\delta_x$ , por ejemplo  $f$ , dada por  $f(y) = \frac{1}{|Q_x|} \chi_{Q_x}(y)$ , donde  $\chi_{Q_x}$  son características de cubos centrados en  $x$  de lado lo suficientemente pequeño para que  $Q_x \subset Q$ , de modo que 14 para  $p = 1$  implica que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{1}{|Q_x|} \chi_{Q_x}(y) dy \leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q \frac{1}{|Q_x|} \chi_{Q_x}(y) w(y) dy$$

, es decir

$$\frac{1}{|Q|} \frac{1}{|Q_x|} \int_Q \chi_{Q_x}(y) dy \leq C \frac{1}{w(Q)} \frac{1}{|Q_x|} \int_Q \chi_{Q_x}(y) w(y) dy$$

luego

$$\frac{1}{|Q|} \frac{1}{|Q_x|} |Q_x| \leq C \frac{1}{w(Q)} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} w(y) dy$$

de donde

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} w(y) dy$$

y como vale para todo cubo  $Q_x$  centrado en  $x$  de lado suficientemente pequeño tendremos

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \cdot w(x)$$

para todo  $x$  que sea un punto de Lebesgue de  $w$ , por lo tanto eso será para casi todo  $x \in Q$  ya que un peso  $w$  es localmente integrable (-ver, p. ej. [4], Teorema 7.10-), es decir  $w \in A_1$ .

Para  $p > 1$ , tomando  $f = w^{1-p'}$  y usando que si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  vale que  $p + p' = p \cdot p'$  tenemos que  $f^p = w^{p-p p'} = w^{p-(p+p')} = w^{-p'}$  y reemplazando en la desigualdad 14 nos queda

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)^p \leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q w(y)^{-p'} w(y) dy$$

, y de allí, multiplicando y dividiendo por  $|Q|$  :

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)^p \leq C \frac{|Q|}{w(Q)} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)$$

y entonces

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'} dy \right)^{p-1} \leq C$$

y usando que  $1 - p' = \frac{-1}{p-1}$  y  $w(Q) = \int_Q w(y)^{1-p'} dy$  obtenemos 8 es decir que  $w \in A_p$ .

### 3. EQUIVALENCIA DE LA DESIGUALDAD PUNTUAL CON LA CONDICIÓN $A_p$

Como mencionamos, debido al resultado de Muckenhoupt y Coifman-Fefferman mencionado previamente se tiene que (8) -y por lo tanto también (14)- son equivalentes al tipo débil  $(p, p)$  para  $p \geq 1$  y al tipo fuerte  $(p, p)$  para  $p > 1$ , y una consecuencia bien conocida la desigualdad puntual  $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$  -inmediata, como vimos, tomando supremos en 13-, es decir se tienen los siguientes teorema y corolario:

**Teorema 17.** Sea  $w$  un peso en  $\mathbb{R}^n$ , y  $1 \leq p < \infty$  son equivalentes las siguientes condiciones:

i)  $M$  es de tipo débil  $(p, p)$  respecto de  $w$ , es decir:

$$\lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cierta  $C > 0$ , para toda  $f \in L^p(w)$ , y para todo  $\lambda > 0$ .

ii)  $w \in A_p$ , esto significa que para cierta  $C > 0$ :

si  $p > 1$ :

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C$$

para todo cubo  $Q$ ,

y si  $p = 1$ :

$$Mw(x) \leq C \cdot w(x)$$

para casi todo  $x$ .

iii)  $w$  satisfice:

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^p \leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy$$

para cierta  $C > 0$ , para todo cubo  $Q$  y para toda  $f$  localmente integrable.

**Corolario 18.** Si  $w$  es un peso que satisface cualquiera de las condiciones del teorema anterior entonces para toda  $f$  localmente integrable y para casi todo  $x$  vale que:

$$Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$$

**Observación 19.** Una consecuencia elemental del teorema que nos conviene mencionar es que si se satisface cualquiera de las condiciones i), ii) o iii) entonces  $w$  es duplicante. Como las condiciones son equivalentes basta usar cualquiera de ellas, por ejemplo, a partir de iii), tomando  $2Q$  en la desigualdad, con  $f = \chi_Q$  tenemos

$$\left( \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} \chi_Q(y) dy \right)^p \leq C \frac{1}{w(2Q)} \int_{2Q} \chi_Q(y)^p w(y) dy$$

, y usando la definición de  $\chi_Q$  y que en  $\mathbb{R}^n$  es  $|2Q| = 2^n |Q|$  queda

$$\left( \frac{|Q|}{2^n |Q|} \right)^p \leq C \frac{1}{w(2Q)} w(Q)$$

de donde simplificando  $|Q|$  y despejando se obtiene

$$w(2Q) \leq k \cdot w(Q)$$

con  $k = 2^{np} C$ .

**Notación 20.** Para aligerar la notación, dado  $p \geq 1$ , llamemos a la condición iii) del teorema: Condición Maximal Local y notémosla  $CML_p$ , y a la consecuencia del corolario la llamaremos Condición Maximal puntual y la notaremos  $CMP_p$ . El teorema precedente y su corolario pueden entonces enunciarse de manera abreviada como:

$$(Débil (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p) \Rightarrow CMP_p$$

**Observación 21.** Se puede demostrar que, para  $p > 1$ , si  $M$  es de tipo débil  $(p, p)$  entonces  $M$  es de tipo fuerte  $(p, p)$  -y la recíproca ya vimos que es inmediata-, de modo que en el caso  $p > 1$  la condición i) se puede enunciar como

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

y tenemos para  $p > 1$  :

$$\left( \text{Fuerte } (p, p) \Leftrightarrow \text{Débil } (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p \right) \Rightarrow CMP_p$$

La equivalencia entre las condiciones ii) y iii) del teorema las hemos probado en los párrafos anteriores, y que i) equivale a ii) es el resultado de Muckenhoupt y Coifman-Fefferman (ver también [5] Teorema IV 2.1 y observaciones posteriores).

. Cabe destacar que las demostraciones de que ii) o iii) implican i) son en general considerablemente más difíciles véase, por ejemplo, [3], o [5] o también [9], mediante una descomposición de tipo Calderón-Zygmund.

En un trabajo bastante reciente ([2]) los autores muestran que la condición del corolario,  $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$ , aparentemente más débil que i), ii) y iii) es en realidad equivalente a ellas, de modo que se tiene

$$\text{Fuerte } (p, p) \Leftrightarrow \text{Débil } (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p \Leftrightarrow CMP_p$$

. La prueba de [2] requiere, en primer término, mostrar que la condición  $CMP_p$  implica directamente que  $w$  es duplicante, de allí resulta que  $M_w$  es equivalente a  $M_w^c$ , y luego se alude a que el operador maximal ponderado  $M_w^c$  es de tipo débil  $(1, 1)$  lo que se puede probar usando lemas de cubrimientos, por ejemplo (ver [9]), el Lema de Besicovitch (que es un resultado profundo que se apoya fuertemente en la geometría de  $\mathbb{R}^n$  y en el hecho de usar una base de cubos centrados). Luego, usando de nuevo la condición  $CMP_p$  resulta que  $M$  es de tipo débil  $(p, p)$ .

A continuación presentamos nuestro resultado principal que es otra demostración de la equivalencia de  $CMP_p$  con las demás condiciones que no requiere apoyarse en ningún tipo de lema de cubrimiento. Es la siguiente proposición que demuestra directamente que  $CMP_p$  implica la condición  $A_p$  (y la recíproca sale de que  $A_p \Rightarrow CML_p \Rightarrow CMP_p$ ).

**Observación 22.** Como en todo el artículo cuando hablamos de cubos se trata de cubos con lados paralelos a los ejes coordenados.

**Teorema 23.** Sea  $w$  es un peso que satisface la condición  $CMP_p$ , es decir que para cada  $x$  vale que:  $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$  entonces:

a) Si  $Q_0$  y  $Q_1$  son cubos contiguos por un vértice entonces  $w(Q_0) \approx w(Q_1)$ , esto es que existen constantes positivas  $K_0$  y  $K_1$  -independientes de  $Q_0$  y  $Q_1$ - tales que  $w(Q_0) \leq K_1 \cdot w(Q_1)$  y  $w(Q_1) \leq K_0 \cdot w(Q_0)$ .

b)  $w$  es un peso que satisface la condición  $CML_p$ , es decir:

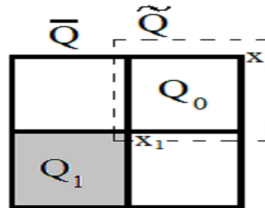
$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^p \leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy$$

para cierta  $C > 0$ , para todo cubo  $Q$  y para toda  $f$  localmente integrable.



**Demostación.**

a) Para ilustrar la notación observemos el dibujo en  $\mathbb{R}^2$  con  $Q_1$  contiguo a  $Q_0$  por abajo y la izquierda -pero la situación es similar con cubos contiguos por cualquier vértice en  $\mathbb{R}^n$ -, y  $\tilde{Q}$  es el menor cubo que contiene a  $Q_0$  y  $Q_1$ :



Consideremos  $x$  el vértice de  $Q_0$  opuesto a  $x_1$ , donde  $x_1$  es el vértice compartido por  $Q_0$  y  $Q_1$ . Como  $w$  satisface la condición  $CMP_p$  para toda  $f \in L^1_{loc}$  y para todo  $\tilde{Q} \ni x$  vale que:

$$\left( \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(y)| dy \right)^p \leq Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$$

. Para  $f = \chi_{Q_1}$ , la función característica del cubo  $Q_1$  tenemos que

$$M_w(|f|^p)(x) = \sup_{\tilde{Q} \ni x} \frac{1}{w(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} |f(y)|^p w(y) dy = \sup_{\tilde{Q} \ni x} \frac{1}{w(\tilde{Q})} w(\tilde{Q} \cap Q_1)$$

Ahora si  $\tilde{Q} \cap Q_1 = \emptyset$  entonces  $w(\tilde{Q} \cap Q_1) = 0$ , de modo que basta considerar el máximo entre aquellos cubos  $\tilde{Q} \ni x$  que intersecan a  $Q_1$ . Pero si  $\tilde{Q} \cap Q_1 \neq \emptyset$  entonces  $x_1 \in \tilde{Q}$ , y como  $x \in \tilde{Q}$  tenemos que  $\{x, x_1\} \subset \tilde{Q}$ , y siendo  $x$  y  $x_1$  vértices opuestos de  $Q_0$  tenemos que  $Q_0 \subset \tilde{Q}$ . Luego, observando que  $|\tilde{Q}| = 2^n |Q_1|$  (ya que el lado de  $\tilde{Q}$  es el doble del lado de  $Q_1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &= \frac{|Q_1|}{|\tilde{Q}|} = \frac{|Q_1 \cap \tilde{Q}|}{|\tilde{Q}|} = \left( \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} \chi_{Q_1} dy \right)^p \leq Mf(x)^p \\ &\leq C \cdot M_w(|f|^p)(x) \leq \sup_{\tilde{Q} \ni x} \frac{w(\tilde{Q} \cap Q_1)}{w(\tilde{Q})} \leq C \cdot \frac{w(Q_1)}{w(Q_0)} \end{aligned}$$

Luego, con constante  $K_1 = 2^n C$ , que depende solo de  $n$  y de la constante  $C$  de la condición  $CMP_p$  de  $w$  tenemos:

$$w(Q_0) \leq K_1 \cdot w(Q_1)$$

Pero con un argumento similar, tomando en cambio como  $x$  el vértice de  $Q_1$  opuesto a  $x_1$ , (es decir el inferior izquierdo, en el ejemplo) y usando  $f = \chi_{Q_0}$  obtenemos de manera análoga una constante  $K_0$  -de hecho puede tomarse  $K_0$  igual a  $K_1$ - tal que:

$$w(Q_1) \leq K_1 \cdot w(Q_0)$$

Por lo tanto

$$w(Q_0) \approx w(Q_1)$$

b) Sea ahora un cubo cualquiera  $Q$ . Con la notación de a) tomemos  $Q_1 = Q$ , y sea ahora  $f$  cualquier función localmente integrable y usaremos  $CMP_p$  para  $f \cdot \chi_{Q_1}$  y para  $x$  el vértice del cubo  $Q_0$  opuesto a  $x_1$  donde  $Q_0 \cap Q_1 = \{x_1\}$ .

Como  $(f \cdot \chi_{Q_1})(y) = 0$  si  $y \notin Q_1$ , para cualquier  $\tilde{Q} \ni x$  vale que:

$$\int_{\tilde{Q}} |(f \cdot \chi_{Q_1})(y)|^p w(y) dy = \int_{\tilde{Q} \cap Q_1} |(f \cdot \chi_{Q_1})(y)|^p w(y) dy \leq \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y) dy$$

Por otra parte si  $\tilde{Q} \cap Q_1 = \emptyset$  entonces  $\int_{\tilde{Q}} |(f \cdot \chi_{Q_1})(y)|^p w(y) dy = 0$ . Y si  $\tilde{Q} \cap Q_1 \neq \emptyset$  entonces  $\{x_0, x_1\} \subset \tilde{Q}$  y  $Q_0 \subset \tilde{Q}$ , luego tenemos que:

$$\begin{aligned} M_w(|f \cdot \chi_{Q_1}|^p)(x) &= \sup_{\tilde{Q} \ni x} \frac{1}{w(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} |(f \cdot \chi_{Q_1})(y)|^p w(y) dy = \\ &= \sup_{Q_0 \subset \tilde{Q}} \frac{1}{w(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q} \cap Q_1} |f(y)|^p w(y) dy \end{aligned}$$

Como  $Q_0 \subset \tilde{Q}$  tenemos que  $w(Q_0) \leq w(\tilde{Q})$  y usando la parte a) tenemos una constante  $K_1$  tal que  $\frac{1}{K_1} \cdot w(Q_1) \leq w(Q_0) \leq w(\tilde{Q})$  entonces para cualquiera de tales  $\tilde{Q}$ , con  $Q_0 \subset \tilde{Q}$ , vale que:

$$\frac{1}{w(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q} \cap Q_1} |f(y)|^p w(y) dy \leq \frac{K}{w(Q_1)} \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y) dy$$

y por lo tanto:

$$M_w(|f \cdot \chi_{Q_1}|^p)(x) = \sup_{Q_0 \subset \tilde{Q}} \frac{1}{w(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q} \cap Q_1} |f(y)|^p w(y) dy \leq \frac{K}{w(Q_1)} \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y) dy$$

Entonces tomando  $\tilde{Q}$  el menor cubo que contiene a  $Q_0$  y  $Q_1$ , y usando el hecho de que  $|\tilde{Q}| = 2^n |Q_1|$ , la definición de  $Mf(x)$ , la condición  $CMP_p$  para  $f \cdot \chi_{Q_1}$  con el vértice  $x \in Q_0 \subset \tilde{Q}$ , y la última desigualdad tenemos:

$$\frac{1}{2^{np}} \left( \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} |f(y)| dy \right)^p = \left( \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |(f \cdot \chi_{Q_1})(y)| dy \right)^p \leq M(f \cdot \chi_{Q_1})(x)^p$$

$$\leq C \cdot M_w(|f \cdot \chi_{Q_1}|^p)(x) \leq C \cdot \frac{K}{w(Q_1)} \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y) dy$$

Es decir:

$$\left( \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} |f(y)| dy \right)^p \leq 2^{np} C \cdot K \cdot \frac{1}{w(Q_1)} \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y) dy$$

Y renombrando  $C$  a la constante  $2^{np}KC$ , y observando que esto vale para cualquier cubo  $Q_1 = Q$  con una constante que solo depende de  $w$  y de  $n$  obtenemos  $CML_p$ :

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^p \leq C \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|^p w(y) dy$$

■

En consecuencia hemos obtenido una nueva prueba que excluye el uso de cubrimientos de las equivalencias:

$$\text{Débil } (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p \Leftrightarrow CMP_p$$

Si  $p > 1$ , como ya mencionamos, el teorema  $(A_p \Rightarrow A_{p-\varepsilon})$  implica también la equivalencia: Fuerte  $(p, p) \Leftrightarrow$  Débil  $(p, p)$ .

Como nota adicional obsérvese que el ítem a) de la proposición anterior puede usarse fácilmente para obtener otra demostración de que si  $w \in A_p$  entonces es duplicante -basta usar una partición del cubo  $2Q$  por cubos de  $Q$  contiguos por el vértice y que en tales cubos vale  $w(Q_0) \approx w(Q_1)$ .

**Referencias**

- [1] Muckenhoupt, Benjamin, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972) 207–226.
- [2] Lerner, Andrei K.; Ombrosi, Sheldy. A Boundedness Criterion for General Maximal Operators. Publ. Mat. 54 (2010), no. 1, 53–71.
- [3] Coifman, R., and Fefferman, C.. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Mathematica, 51.3 (1974): 241-250.
- [4] Rudin, W. Real and Complex Analysis, 3rd ed. McGraw-Hill, Inc. NY,USA, 1987.
- [5] García-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J.L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics, Elsevier, 1985.
- [6] Marcinkiewicz, J. Sur l' interpolation d' opérations, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939).
- [7] Zygmund, A. On a Theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math Pures. Appl. 34 (1956).
- [8] Bennett, C. and Sharpley, R. Interpolation of Operators, Academic Press, NY, USA, 1988.
- [9] Duoandikoetxea Zuazo, F. J., Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, AMS, 2001
- [10] Stein, E. Note on the class  $L \log L$ , Studia Math. 32 (1969).

Para citar este artículo: Alvaro Corvalán 2016, “ Sobre una propiedad equivalente a la condición de pesos  $A_p$  para el operador maximal de Hardy-Littlewood ” . Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>

## Sobre una familia de polinomios tipo Apostol

### On a family of Apostol-Type polynomials

William Ramírez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>GICBAS, Universidad de la Costa, Barranquilla-Colombia  
e-mail: wramirez4@cuc.edu.co

Alejandro Urieles G.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Sistema Dinámico y EDO, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia  
e-mail: alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

---

---

#### Resumen

Sean  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ ,  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , y sea  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados de orden  $\alpha$ , nivel  $m$  y variable  $x$ . En el presente trabajo estudiaremos algunas propiedades de esta familia de polinomios y la utilizaremos para demostrar fórmulas de conexión entre éstos polinomios y los polinomios de Apostol Euler y los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel  $m$ .

*Palabras claves:* Polinomios de Apostol Euler, polinomios de Bernoulli generalizados de nivel  $m$  y polinomios tipo Apostol generalizados.

#### Abstract

Let  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ ,  $a, c \in \mathbb{R}^+$  and let  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  be the new class of generalized Apostol-type polynomials of  $\alpha$  order,  $m$  level and variable in  $x$ . In the present document we study some properties of these polynomials being used to proof formulas in connection with Apostol-Euler polynomials and generalized Bernoulli polynomials of  $m$  level.

*Keywords:*

Polynomials Euler Apostol, generalized Bernoulli polynomials of  $m$  level and generalized polynomials type Apostol.

---

---

#### 1. Introducción

Recientemente en [9], para parámetros  $\alpha, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$  con  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  de orden  $\alpha$  nivel  $m$  se define por medio de la siguiente función

generatriz

$$\left( \frac{(2^\mu z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \ln a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{z^n}{n!}, \tag{1}$$

donde  $|z| < 2\pi$  cuando  $\lambda = 1$ ,  $|z| < \pi$  cuando  $\lambda = -1$ ,  $\left( \left| z \ln \left( \frac{c}{a} \right) \right| < |\log(-\lambda)| \right)$  cuando  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ , y  $1^\alpha := 1$ .

Esta proporcionan una unificación de las nuevas clases de polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, polinomios generalizados de Apostol-Euler y los polinomios generalizados Apostol-Genocchi dados en [7] con los polinomios tipo Apostol generalizados dados en [8, 12, 13]. En este trabajo demostraremos fórmulas

de conexión de los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  con los polinomios de Bernoulli clásicos, los polinomios de Apostol-Euler, los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel  $m$ , los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados de nivel  $m$ , los polinomios de Bernoulli generalizados y números de Stirling y los polinomios de Apostol Bernoulli y números de Stirling generalizados.

La organización es como sigue. La sección 2, es dedicada a la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  dados en [9], así como también algunas propiedades requeridas para el desarrollo de nuestro propósito. En la sección 3 fórmulas de conexión de los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  con otros polinomios serán demostradas.

## 2. Preliminares

En esta sección mostraremos las funciones generatrices de las familias de polinomios tipo Apostol generalizados que dieron soporte al trabajo publicado en el 2015 titulado "About Extensions of Generalized Apostol-Type polynomials [9], así como también analizaremos algunas de sus propiedades.

Para parámetros complejos o reales arbitrarios  $\alpha \in \mathbb{C}$  y para  $a, c \in \mathbb{R}^+$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  la nueva clase de polinomios

Apostol-Bernoulli generalizados  $\mathfrak{B}_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda)$ , la nueva clase de polinomios Apostol-Euler generalizados  $\mathfrak{E}_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda)$  y la nueva clase de polinomios Apostol-Genocchi generalizados  $\mathfrak{G}_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a, c; \lambda)$ ,  $m \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}$  se definen en un entorno adecuado de  $z = 0$ , a través de las siguientes funciones generatrices([9, 13])

$$\begin{aligned} \left( \frac{z^m}{\lambda c^z - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda) \frac{z^n}{n!}, & |z \log \left( \frac{c}{a} \right)| < |\log(\lambda)|. \\ \left( \frac{2^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda) \frac{z^n}{n!}, & |z \log(c)| < |\log(-\lambda)|. \\ \left( \frac{(2z)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{G}_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda) \frac{z^n}{n!}, & |z \log(c)| < |\log(-\lambda)|. \end{aligned}$$

A continuación mostraremos algunas propiedades de estos polinomios ver ([9]).

Para  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $\{\mathfrak{B}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda)\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\mathfrak{E}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda)\}_{n \geq 0}$  y  $\{\mathfrak{G}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda)\}_{n \geq 0}$  las sucesiones de los polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi en la variable  $x$ ,

parámetros  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , de orden  $\alpha \in \mathbb{C}$  verifican las siguientes relaciones.

$$\mathfrak{B}_n^{[m-1,0]}(x; c, a; \lambda) = \mathfrak{G}_n^{[m-1,0]}(x; c, a; \lambda) = \mathfrak{G}_n^{[m-1,0]}(x; c, a; \lambda) = (x \ln c)^n. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda) (x \ln c)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c, a; \lambda) \mathfrak{B}_k^{[m-1,1]}(x; c, a; \lambda). \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda) (x \ln c)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c, a; \lambda) \mathfrak{G}_k^{[m-1,1]}(x; c, a; \lambda). \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda) (x \ln c)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c, a; \lambda) \mathfrak{G}_k^{[m-1,1]}(x; c, a; \lambda). \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) \mathfrak{B}_{n-k-1}^{[m-1,-1]}(x; c, a; \lambda) &= \lambda \mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x+1; c, a; \lambda) \\ &\quad - \mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda). \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,-1]}(x; c, a; \lambda) &= \lambda \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x+1; c, a; \lambda) \\ &\quad + \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda). \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} [\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda)]^{(j)} &= \frac{n!}{(n-j)!} (\ln c)^j \mathfrak{B}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) [\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda)]^{(j)} \\ &= \frac{n!}{(n-j)!} (\ln c)^j \mathfrak{G}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) [\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda)]^{(j)} \\ &= \frac{n!}{(n-j)!} (\ln c)^j \mathfrak{G}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda). \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) dx &= \frac{\ln c}{n+1} [\mathfrak{B}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1; c, a; \lambda) - \mathfrak{B}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0; c, a; \lambda)] \\ &= \left[ \ln c \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} \mathfrak{B}_k^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda) \right] \\ &\quad ((x_1 \ln c)^{n-k+1} - (x_0 \ln c)^{n-k+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) dx = \frac{\ln c}{n+1} \left[ \mathfrak{G}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1; c, a; \lambda) - \mathfrak{G}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0; c, a; \lambda) \right]$$

$$= \left[ \ln c \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} \mathfrak{G}_k^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda) \right]$$

$$((x_1 \ln c)^{n-k+1} - (x_0 \ln c)^{n-k+1}). \tag{10}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) dx = \frac{\ln c}{n+1} \left[ \mathfrak{G}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1; c, a; \lambda) - \mathfrak{G}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0; c, a; \lambda) \right]$$

$$= \left[ \ln c \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} \mathfrak{G}_k^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda) \right]$$

$$((x_1 \ln c)^{n-k+1} - (x_0 \ln c)^{n-k+1}). \tag{11}$$

$$\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y; c, a; \lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) \mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y; c, a; \lambda). \tag{12}$$

$$\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y; c, a; \lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y; c, a; \lambda). \tag{13}$$

$$\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y; c, a; \lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda) \mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y; c, a; \lambda). \tag{14}$$

En el 2011 en ([7, 8, 9]) encontramos que para un  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda, \alpha, u, v \in \mathbb{C}$  los polinomios tipo Apostol generalizados  $\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x; \lambda; u, v)$  de orden  $\alpha$  se define a través de la siguiente función generatriz

$$\left( \frac{2^u z^v}{\lambda e^z + 1} \right)^\alpha e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x; \lambda; u, v) \frac{z^n}{n!}; \quad (|z| < |\log(-\lambda)|), \tag{15}$$

donde

$$\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(\lambda; u, v) =: \mathcal{F}_n^{(\alpha)}(0; \lambda; u, v) \tag{16}$$

denotan los también llamados números de tipo Apostol de orden  $\alpha$ .

Para  $z \in \mathbb{C}$ , se define la función Gamma denotada  $\Gamma$  como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{17}$$

Dado  $z \in \mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$ , el símbolo de Pochhammer esta dado por

$$(z)_n = z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1); \quad (z)_0 = 1. \tag{18}$$



Éste cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}(1)_n &= n! \\ (z)_n &= \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}.\end{aligned}$$

Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  y  $p > -1$  se define la derivada generalizada de orden  $\alpha$  como

$$\frac{d^q [x-z]^p}{[dx]^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}. \quad (19)$$

En particular, si hacemos  $z = 0$  tenemos

$$\frac{d^q x^p}{(dx)^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}. \quad (20)$$

Para  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  se definen los números de Stirling de segunda clase denotados como  $S(n, k)$  por la siguiente función generatriz

$$\begin{aligned}z^n &= \sum_{k=0}^n S(n, k)z(z-1)\dots(z-k+1), \\ (e^z + 1) &= k! \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{z^n}{n!}, \\ (1-z)^{-1}(1-2z)^{-1}\dots(1-kz)^{-1} &= \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k)z^{n-k}, \quad |z| < k^{-1}.\end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra algunas relaciones de la base canónica con algunas familias de polinomios.

$x^n$	Familias de polinomios
$\frac{1}{2} \left[ \lambda \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{E}_k(x; \lambda) + \mathcal{E}_n(x; \lambda) \right]$ (21)	Apostol-Euler
$\frac{(\ln c)^m}{(\ln a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k!(\ln c)^k}{(k+m)!} \mathfrak{B}_n^{[m-1,1]}(x, c, a)$ (22)	Apostol-Bernoulli generalizados nivel m
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k!}{(k+m)!} B_{n-k}^{[m-1,1]}(x)$ (23)	Bernoulli generalizados de nivel-m
$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x)$ (24)	Bernoulli clásicos
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k+r}{r}^{-1} S(k+r, r) B_{n-k}^{(r)}(x), r \in \mathbb{N}_0$ (25)	Bernoulli generalizados y numeros de Stirling
$n! \sum_{k=r}^n \frac{r!}{(k+r)!(n-k)!} S(k+r, r; \lambda) \mathfrak{B}_{n-k}^{(r)}(x; \lambda), r \in \mathbb{N}_0$ (26)	Apostol Bernoulli y numeros de Stirling generalizados

**Definition 2.1.** Para parámetros  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  con  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados  $\mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  de orden  $\alpha$  se define por la siguiente función generatriz

$$\left( \frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{z^n}{n!}, \tag{27}$$

cuando  $|z| < 2\pi, \lambda = 1, |z| < \pi, \lambda = -1$  ( $|z \log \left(\frac{b}{a}\right)| < |\log(-\lambda)|$ ),  $\lambda \in \mathbb{C}\{-1, 1\}$

donde,

$$\mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(c, a; \lambda; u, v) := \mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(0, b, c; \lambda; u, v). \tag{28}$$

En [9] se muestran algunos ejemplos numéricos de la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados  $\mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$ .

**Theorem 2.2.** Para  $\alpha, \lambda, \beta, u, v \in \mathbb{C}$  con  $b, c \in \mathbb{R}^+$  y  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados  $\mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  satisfacen las siguientes relaciones

$$i) \quad \mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha+\beta]}(x+y, b, c; \lambda; u, v) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v) \mathcal{Q}_{n-j}^{[m-1, \beta]}(y, c, a; \lambda; u, v), \tag{29}$$

$$ii) \quad \mathcal{Q}_n^{[m-1, \alpha]}(x+y, c, a; \lambda; u, v) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1, \alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) (x \log c)^{n-j}. \tag{30}$$

**Theorem 2.3.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^+$  y  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v)$  satisfacen las siguientes relaciones.

$$Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1, \alpha-1]}(c, a; \lambda; u, v) Q_j^{[m-1]}(x, c, a; \lambda; u, v), \quad (31)$$

$$Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1, \alpha]}(c, a; \lambda; u, v) (x \log c)^j, \quad (32)$$

cuando  $x = 0$  los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(c, a; \lambda; u, v)$  son los también llamados nueva clase de números tipo Apostol generalizados de orden  $\alpha$ .

**Theorem 2.4.**

Para  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \lambda, a, c$ , y  $n, j \in \mathbb{N}_0$  con  $0 \leq j \leq n$ , entonces

$$[Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)]^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} (\ln c)^j Q_{n-j}^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu). \quad (33)$$

Para ver detalles de la demostración de los teoremas (2.2, 2.3, y 2.4) ver [9].

### 3. Fórmulas de conexión de los polinomios $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$

En esta sección nuestro objetivo es demostrar fórmula de conexión que hay entre la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados de orden  $\alpha$ , nivel  $m$  y variable  $x$   $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  con los polinomios dados en la sección 2

**Theorem 3.1.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  y  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$  y los polinomios de Apostol Euler  $\mathcal{E}_n(x; \lambda)$  están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} & Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+y, c, a; \lambda; u, v) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \mathcal{E}_k(x; \lambda) \left[ \binom{n}{k} Q_{n-k}^{[m-1, \alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) (\log c)^k + \lambda \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} Q_{n-j}^{[m-1, \alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) (\log c)^j \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

**Demostación 3.1.**

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Q}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; u, v) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^{n-j}}{2} \left[ \lambda \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} \mathcal{E}_k(x; \lambda) + \mathcal{E}_{n-j}(x; \lambda) \right] \\
&= \lambda \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^{n-j}}{2} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \\
&\quad + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^{n-j}}{2} \mathcal{E}_{n-j}(x; \lambda) \\
&= \lambda \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log a)^{n-j}}{2} \binom{n-j}{k} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \\
&\quad + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{Q}_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^{n-j}}{2} \mathcal{E}_{n-j}(x; \lambda) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{n-j} \mathcal{Q}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^j}{2} \binom{j}{k} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{Q}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^k}{2} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} \mathcal{Q}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^j}{2} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{Q}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) \frac{(\log c)^k}{2} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \\
& \mathcal{Q}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; u, v) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \mathcal{E}_k(x; \lambda) \left[ \binom{n}{k} \mathcal{Q}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) (\log c)^k + \lambda \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} \mathcal{Q}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v) (\log c)^j \right].
\end{aligned}$$

**Theorem 3.2.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  y  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , los polinomios  $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$  y los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados de nivel  $m$   $\mathfrak{B}_n^{[m-1,1]}(x, c, a)$  están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
 & Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{(\ln c)^{j+m+k}}{(\ln a)^n} \frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!} \mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a)
 \end{aligned} \tag{35}$$

**Demostación 3.2.**

$$\begin{aligned}
 & Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (x \log c)^{n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\log c)^j x^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\log c)^j \left[ \frac{(\ln c)^n}{(\ln a)^n} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{k! (\ln c)^k}{(k+m)!} \mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\log c)^j \left[ \frac{(\ln c)^m}{(\ln a)^n} \frac{k! (\ln c)^k}{(k+m)!} \frac{n!}{(n-j)! j!} \frac{j!}{(j-k)! k!} \mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{(\ln c)^{j+m+k}}{(\ln a)^n} \frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!} \mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a).
 \end{aligned}$$

**Theorem 3.3.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  y  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , los polinomios  $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$  y los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel  $m$   $B_n^{[m-1,1]}(x)$  están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
 & Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\ln c)^j \frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!} B_{j-k}^{[m-1,1]}(x)
 \end{aligned} \tag{36}$$

**Demostación 3.3.**

$$\begin{aligned}
 & Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (x \log c)^{n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\log c)^j x^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\log c)^j \left[ \frac{k! n! j!}{(k+m)!(j-k)!(n-j)! j! k!} B_{j-k}^{[m-1,1]}(x) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\ln c)^j \frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!} B_{j-k}^{[m-1,1]}(x).
 \end{aligned}$$

**Theorem 3.4.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  y  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$  y los polinomios de Bernoulli  $B_n(x)$  están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} & Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1, \alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{(\ln c)^j}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j+1}{k} B_n(x). \end{aligned} \tag{37}$$

**Theorem 3.5.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  y  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$  y los polinomios de Bernoulli  $B_n(x)$  con los números de Stirling están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} & Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1, \alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\ln c)^j \binom{k+r}{r} \frac{n!}{(n-j)!(j-k)!k!} S(k+r, r) B_{j-k}^r(x). \end{aligned} \tag{38}$$

**Theorem 3.6.** Para  $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$  y  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , los polinomios  $Q_n^{[m-1, \alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$  y los polinomios de Bernoulli  $B_n(x)$  con los números de Stirling generalizados están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} & Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j Q_{n-j}^{[m-1, \alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu) (\ln c)^j \frac{n!r!}{(n-j)!(k+r)!(k-k)!} S(k+r, r; \lambda) B_{j-k}^r(x; \lambda). \end{aligned} \tag{39}$$

Para la prueba de los teoremas 3.4, 3.5 y 3.6, se utiliza las misma técnica realizada en el teorema 3.3.

**Theorem 3.7.** Para un  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $\{Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios tipo Apostol generalizados de variable  $x$ , parámetros  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ ,  $a, c \in \mathbb{R}^+$ , orden  $\alpha \in \mathbb{C}$  y nivel  $m$ . Entonces las siguientes relaciones se cumplen.

1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q_k^{[m-1, \alpha]}(x, b, c; \lambda; u, v) Q_{n-k}^{[0, -1]}(0; c, a; \lambda; 0; 0) &= \lambda Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+1; c, a, \lambda; \mu; \nu) \\ &+ Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q_k^{[m-1, \alpha]}(x, b, c; \lambda; u, v) \mathfrak{G}_{n-k}^{[0, -1]}(0; c, a; \lambda) &= \lambda Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+1; c, a, \lambda; \mu; \nu) \\ &+ Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu). \end{aligned}$$

**Demostración 3.4.** Considerando la expresión

$$\lambda Q_n^{[m-1, \alpha]}(x+1; c, a, \lambda; \mu; \nu) + Q_n^{[m-1, \alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$$

y usando la función generatriz 27, se llega a la prueba.

**Theorem 3.8.** Para  $j \in \mathbb{N}_0$ , la familia  $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$  satisface la siguiente relación.

$$z^j \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{z^n}{n!}. \quad (40)$$

**Demostración 3.5.** Derivando  $j$  veces con respecto a  $x$  en ambos lados de 27 y usando (33)

$$z^j (\log c)^j \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\log a)^p \frac{n!}{(n-j)!} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{z^n}{n!}, \quad (41)$$

multiplicando por  $(\log c)^{-j}$  en ambos lados de (41), se completa la prueba.

**Theorem 3.9.** Para parámetros  $\alpha, \lambda, u, \nu \in \mathbb{C}$  con  $c, a \in \mathbb{R}^+$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  la siguiente relación se cumple

$$\prod_{i=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha_i]}(x_i, c, a, \lambda; \mu; \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a, \lambda),$$

donde  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = \alpha$  y  $x_1 + \dots + x_r = x$ .

**Demostración 3.6.**

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha_i]}(x_i, c, a; \lambda; u, \nu) \frac{z^n}{n!} &= \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_i} c^{x_i z} \quad (42) \\ \prod_{i=1}^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha_i]}(x_i, c, a; \lambda; u, \nu) \frac{z^n}{n!} \right) &= \prod_{i=1}^r \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_i} c^{x_i z} \\ &= \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} \cdot \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_2} c^{x_2 z} \dots \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_m} c^{x_m z} \\ &= \left( \frac{(2^u z^\nu)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^\alpha c^{xz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; u, \nu) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

#### 4. Agradecimientos

Los autores de este trabajo fueron soportados por el proyecto Impacto Caribe (IC-002627-2015), Universidad del Atlántico, Colombia, y DID-USB(S1-IC-CB-003-16)

#### Referencias

- [1] Apostol, T.: On the Lerch Zeta function. *Pac. J. Math.* 1, 161-167 (1951).
- [2] Apostol, T.: *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, New York (1976)
- [3] Askey, R.: *Orthogonal Polynomials and Special Functions*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol (1975)
- [4] Bayada, A., Simsek, Y., Srivasta, H.M.: Some array type polynomials associated with special numbers and polynomials. *Appl. Math. Comput.* 244, 149-157 (2014)
- [5] Bretti, G., Natalini, P., Ricci, P.E.: Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. *Abstr. Appl. Anal.* 7, 613-623 (2004)
- [6] Chen, S., Y., Luo, Q.-M.: An extension of generalized Apostol-Euler polynomials. *Adv. Differ. Equ.* 2013,61 (2013)
- [7] Lu, D.-Q., Luo, Q.-M.: Some properties of the generalized Apostol-type polynomials. *Bound. Value Probl.* 2013 **2013**:64.
- [8] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comput. Math. Appl.* 51, 631-642 (2006).
- [9] Hernández Pedro., Yamilet Quintana and Alejandro Urieles.: About Extensions of Generalized Apostol-Type Polynomials Results. *Math. Online First Springer Basel* DOI 10.1007/s00025-014-0430-2 (2014)
- [10] He, Y., Wang, C.: Recurrence formulae for Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Adv. Differ. Equ.* 2012, 2009 (2012)
- [11] Hu, S., Daeyeoul Kim, D., Kim, M.-S.: New identities involving Bernoulli, Euler and Genocchi numbers. *Adv. Differ. Equ.* 2013, 74 (2013)
- [12] Kur, B.: On the Multiple Sums of Bernoulli, Euler and Genocchi Polynomials *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 7, 2013, no. 8, 373-377 (2013)
- [13] Kur, B.: Some relationships between the generalized Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Turk. J. Anal. Number Theory* 1(1), 54-58 (2013)
- [14] Kur, B., Simsek, Y.: On the generalized Apostol-type Frobenius-Euler polynomials. *Adv. Differ. Equ.* 2013, 1 (2013)
- [15] Qiu-Ming Luo, H.M. Srivastava.: Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 5702-5728.



- [16] Mohammadi, F., Hosseini, M.M.: A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations (2011)
- [17] Liu, H., Wang, W.: Some identities on the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials via power sums and alternate power sums. *Discret. Math.* 309, 3346- 3363 (2009)
- [18] Lu, D-Q., Luo, Q.-M.: Some properties of the generalized Apostol-type polynomials. *Bound. Value Probl.* 2013, 64 (2013)
- [19] Lu, D-Q., Xian, C.-H., Luo, Q.M.: Some results for the Apostol-type polynomials associated with umbral algebra. *Adv. Differ. Equ.* 2013, 201 (2013)
- [20] Luo, Q.-M.: Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. *Taiwan J. Math.* 10(4), 917-925 (2006)
- [21] Luo, Q.-M.: Extensions of the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations. *Osaka J. Math.* 48, 291-309 (2011)
- [22] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* 308(1), 290-302 (2005)
- [23] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comput. Math. Appl.* 51, 631-642 (2006)
- [24] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Appl. Math. Comput.* 217, 5702-5728 (2011)
- [25] Natalini, P., Bernardini, A. :A generalization of the Bernoulli polynomials. *J. Appl. Math.* 2003(3), 155-163 (2003)
- [26] Navas, L.M., Ruiz, F.J., Varona, J.L.: Asymptotic estimates for Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Math. Comput.* 81(279), 1707-1722 (2012)
- [27] Ozden, H., Simsek, Y., Srivastava, H.M.: A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Comput. Math. Appl.* 60, 2779-2787 (2010)
- [28] R, Tremblay., Gaboury, S., Jean, f.: A further generalization of Apostol-Bernoulli polynomials and related polynomials.
- [29] Srivastava, H.M., Todorov, P.G.: An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* 130, 509-513 (1988)
- [30] Srivastava, H.M., Garg, M., Choudhary, S.: A new generalization of the Bernoulli and related polynomials. *Russ. J. Math. Phys.* 17, 251-261 (2010)
- [31] Srivastava, H.M., Garg, M., Choudhary, S.: Some new families of generalized Euler and Genocchi polynomials. *Taiwan. J. Math.* 15(1), 283-305 (2011)

Para citar este artículo: William Ramírez et al. 2016, "Sobre una familia de polinomios tipo Apostol". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

## Correlación de las actitudes y el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas

### Correlation of attitude and academic performance in mathematics subject

Stiven Diaz Noguera <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad del Atlántico, Atlantico Colombia

*stivendiaznoguera@gmail.com*

William D. Ramirez <sup>2</sup>

<sup>2</sup> GICBAS, Universidad de la Costa CUC, Barranquilla - Colombia

*wramirez4@cuc.edu.co*

Jorge L. Diaz Martinez <sup>3</sup>

<sup>3</sup> Software y redes, Universidad de la Costa CUC, Barranquilla - Colombia

*jdiaz5@cuc.edu.co*

---

---

#### Resumen

En este artículo presentamos los resultados de un estudio realizado con estudiantes de educación secundaria para evaluar las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. El análisis de los resultados indica que las actitudes y el rendimiento correlacionan y se influyen mutuamente.

*Palabras claves:* Actitudes- Rendimiento académico-Matemáticas-Correlación

#### Abstract

In this article we show you the results of an investigation with high school students in order to evaluate their attitudes in math and their academic performance. The analysis of the results reveals that the attitudes and the academic performance are correlated and influence each other.

*Keywords:* Attitudes - Academic performance - Math - Correlation

---

---

## 1. Introducción

Los estudios que relacionan la dimensión afectiva del individuo (creencias, actitudes y emociones) y el aprendizaje de las matemáticas han generado gran interés y relevancia. Por ejemplo, Gómez-Chacon [3] plantea que la abundancia de fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, en diversas edades y niveles educativos, puede ser explicada, en buena parte, por la aparición de actitudes negativas causadas por diversos factores personales y ambientales. Además que conforme los grados escolares avanzan, la actitud hacia la matemática se torna menos favorable.

Considerando las actitudes como la predisposición subyacente del sujeto para responder positiva o negativamente frente a un objeto, Según Callejo [1], se distingue entre actitudes matemáticas y actitudes hacia la matemática. Las actitudes matemáticas tendrán un marcado componente cognitivo y se refieren al modo de utilizar las capacidades generales importantes en el trabajo matemático y las actitudes hacia la matemática aluden a la valoración, aprecio e interés por la materia y por su aprendizaje, predominando el componente afectivo. Este último se toma como objeto de estudio en el presente artículo a partir de su influencia en el rendimiento académico (valorado como indicador del proceso de aprendizaje) [2]. Este problema ha sido abordado desde diferentes perspectivas, como menciona Narváez [5], existe un material heterogéneo y complejo de diferentes investigaciones y estudios realizados frente al rendimiento académico, donde se estudian diversas variables o factores, desde la mirada de distintas disciplinas y modelos de análisis. En este artículo presentamos los resultados de identificar y valorar las actitudes hacia las matemáticas y analizamos su relación con el aprendizaje de la matemática en base al modelo general del aprendizaje que identifica tres sistemas de la personalidad (el cognitivo productivo, el afectivo-emotivo y el conativo-volitivo) a partir de una revisión de Ortiz [6].

Inicialmente se comienza estableciendo cuales son la concepciones de los estudiantes frente a las matemáticas y a su papel como individuo principal en los procesos de aprendizaje, para de esta forma determinar las actitudes de los estudiantes. Asimismo se identificaron como se desarrollaron las clases, la interacción docente estudiante, la metodología implementada por el docente y como se correlacionan las actitudes frente el rendimiento académico para caracterizar la relación que se pueden establecer entre estas dos variables, tomando el rendimiento académico numérico (promedio) de los estudiantes en el presente año.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En las secciones 2 y 3 se establece la caracterización de la investigación; en la sección 4, se muestran los resultados obtenidos y finalmente se emitieron unas conclusiones producto de la interpretación y análisis profundo de los resultados.

## 2. Muestra

En esta investigación se tomaron como muestra 32 (17 Mujeres y 15 Hombres) estudiantes de nivel de secundaria básica de una misma institución y al docente encargado de la asignatura. La edad de los participantes comprendió en el rango de 11- 14 años. Con una media de 12.18

años de edad. La conformación de la muestra es de tipo no probalísticas - intencional, mediante designación [4]. Los criterios que se tomaron fueron que: (a) el estudiante debe tener como mínimo dos años en la institución. (b) el estudiante debería estar matriculado. (c) no tener ningún problema psicológico de carácter médico.

La caracterización permitió establecer si la incidencia de las actitudes en la matemáticas está relacionada con el género de los estudiantes y concretar en que edad promedio están los estudiantes para establecer por medio de las teorías, cual es la estructura mental de ellos.

### **3. Metodología**

Las etapas llevadas a cabo en la ejecución y los instrumento de recolección de datos permitieron medir de manera independiente los conceptos o variables con los que tienen que ver; aunque pueden integrar las mediciones de cada una de dichas variables para decir como es y se manifiesta el fenómeno de interés, su objetivo se centran en medir con la mayor precisión posible. Inicialmente, se elaboraron las fichas de observaciones, formatos de entrevista y encuesta actitudinal, para posteriormente aplicarlos. Para calcular la confiabilidad y la validez de los instrumentos, estos fueron evaluados por expertos y se implementaron pruebas pilotos, en el caso del cuestionario fue contextualizado debido a que este ya había sido implementado pero en otro espacio temporal.

La observación que se realizó está inscrita en la observación participativa natural. Los investigadores hacen parte de la comunidad que se encuentra inmerso en el problema y interactúan con los sujetos observados, se busca resaltar criterios como, el desarrollo de la clase, la interacción docente-estudiantes y actitud en clase, motivación de los estudiantes de octavo grado [8] [7]. Para este fin se elaboró dos hojas de codificación llamadas fichas de observación

Las entrevistas que se realizaron en esta investigación fueron de tipo estructurada ya que se definió en base a un esquema fino y un formulario de preguntas de precisión con el objetivo de controlar las respuestas. A los entrevistados se les dieron las preguntas con anterioridad, para que las estudiaran. La entrevista estuvo dirigida al docente de matemática, entorno a la didáctica utilizada en la enseñanza de la matemática y de conforme a las actitudes de los estudiantes.

La encuesta fue una encuesta de actitudes, elaborada por Herrera y Polo [10], esta permitió recoger información sobre las actitudes que presenta la muestra hacia el estudio de las matemáticas.

### **4. Resultados y análisis**

Los resultados arrojados en las observaciones realizadas, permiten aseverar que los estudiantes sienten una predisposición frente al estudio de las matemáticas y que es exteriorizado frente a la presencia del profesor, que en la mayoría de los casos es expresada sin temor. Este tipo de situaciones desde el primer minuto de clase plantea una oposición de cara al objetivo que es liderado por el docente.

En el transcurso del desarrollo de las clases el comportamiento de los estudiantes es regular, según el instrumento utilizado, solo se presentan saltos en su comportamiento, cuando el docente se muestra perturbado y es capaz de atemoriza con un castigo. Los educandos no se ven motivados por el estudio de las matemáticas y el interés por la participación es baja, no les gusta participar y se presentan perezosos a la intervención en las actividades (léase: ejercicios). Esta motivación como plantea Roble, A. [11] está directamente relacionada con las actitudes, porque son mis valores, actitudes y opiniones los que me dictan lo que necesito en cada momento y lo que es importante y lo que no lo es o, dicho de otro modo, es algo que considero atrayente, valioso, dentro de mis posibilidades.

Los estudiantes cuando se enfrentan a ejercicios de matemáticas solo plantean un sólo modo de solucionar, y cuando sus resultados no son los esperados no proponen alternativas para solucionar el problema. Se plantea el aprendizaje de las matemáticas como un conjunto de algoritmos los cuales son absolutos e inexplicables. Uno de los resultados de la ficha de observación, muestran que cuando el docente aclara, usa o desarrolla ideas sugerida por los estudiantes, el docente se confunden en las explicaciones, expresando cierto desagrado con las respuestas. Si el docente pregunta el salón queda silencio y cuando el da instrucciones, los estudiantes hablan por propia iniciativa en respuesta al docente. La siguiente tabla muestra el porcentaje de las respuestas de la encuesta actitudinal aplicado a los estudiantes y la caracterización de las justificaciones que ellos argumentaban.

Pregunta	Resultados
1) Considero las matemáticas una materia muy necesaria en mis estudios	El 59,38 de los estudiantes consideran que las matemáticas son muy necesarias en sus estudios, porque son fundamentales para su carrera universitaria. Esto confirma que los estudiantes tienen una visión clara a cerca del propósito de las matemáticas como campo formativo hacia el futuro. El 31,25 piensan que no, las matemáticas no representan nada importante en su vida y 9.37 restante no tiene claridad sobre la respuesta.
2) La asignatura de Matemáticas no me gusta	El 43,75 de los estudiantes se muestran poco gustoso o interesados en una clase de Matemáticas, mientras que un 37,5 no. El 18,75 algunas veces.
3) Deseo llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas	El 56,25 de los estudiantes no quieren llegar a tener un conocimiento mas profundo porque el profesor les asigna mucho trabajo. El 21,88 si y el 21,88 algunas veces. La cifras demuestra que los alumnos no desean profundizar la materia por temor a un posible aumento de las horas y los trabajos en la asignatura
4) A asignaturas de Matemáticas me generan miedo	El 31,25 dicen que no le temen a las Matemáticas porque es una asignatura como cualquiera, el 28,13 afirman que algunas veces a causa de sentirse presionados por las criticas de sus compañeros y el 40,73 le temen.
5) Las Matemáticas hacen que me sienta nervioso	Las matemáticas hacen que el 21,88 de los estudiantes alguna vez se sientan nerviosos, el 31,25 no y el 46,88 si.
6) Cuando estoy frente a un ejercicio de matemáticas me siento con dificultad de pensar con claridad	Se concluye que el 46,88 de los estudiantes sienten dificultad para pensar con claridad frente a un ejercicio de Matemáticas. comprobando así con está cifra que la mayoría de los estudiantes sienten ese bloqueo mental que les produce el enfrentar un problema Matemático. El 37,5 no siente esa dificultad y el 15,63 algunas veces.
7) Disfruto haciendo los problemas que me dejan como tarea en las clases de matemáticas	Aquí se encontró una incoherencia por lo que ya habíamos analizado, el 62,5 disfruta haciendo los ejercicios, pero cabe mencionar que por lo observado en clase esta repuesta tiene que ser mejor estudiada. Las otras repuestas estuvieron en 28,13 y 9,37 el no y algunas veces respectivamente.
8) Prefiero estudiar cualquier otra asignatura en lugar de Matemáticas	Los resultaron fueron 34,38 por el no, el 48,60 dijeron si y el restantes piensas que hay algunos.

Tabla 1. Resultado de encuesta actitudinal

Las erróneas concepciones y la falta de importancia que demuestran los estudiantes hacia el desarrollo de las actividades matemáticas, plantea que se están cometiendo errores en la metodología implementada. La encuesta arrojó que los estudiantes al realizar un ejercicio de matemáticas se sienten con dificultad de pensar con claridad, este problema tiene que ser tratado. La concentración y la tranquilidad son piezas fundamentales para el estudio de cualquier área. En el ítem "Siento que cada vez me gustan más las Matemáticas", la mayoría de los estudiantes negaron la frase como suya y se ubicaron en oposición a ella.

Presentan una baja valoración a la dedicación y el esfuerzo. Para ellos no importa que tanto puedan hacer, su rendimiento no mejorará, están programados para el fracaso, Colle [12] plantea que los estudiantes son elementos de auto estructuración del conocimiento, es decir, ve al estudiante como el verdadero agente y responsable último de su propio proceso de aprendizaje, como el artesano de su propia construcción.

4.1. *Correlación rendimientos académicos vs. encuesta actitudinal*

Para el desarrollo de esta fase se le realizó una modificación a criterio del grupo de investigación, en el proceso de evaluación de las respuestas. Se le asignó una codificación la cual nos permitirá un tratamiento estadístico (por medio de una ponderación arbitraria) y de correlación entre el rendimiento académico y este resultado.

La puntuación fue de las siguientes maneras,

Ítem positivos			Ítem negativos		
SI	Algunas veces	NO	SI	Algunas veces	NO
10	5	1	1	5	10

Tabla 2. Ponderación resultados de encuesta

La tabla 3 muestra los promedios obtenidos por cada estudiante en la encuesta y las notas de rendimiento académico en el primer periodo

N	x	y	N	x	y
1	4	3,2	17	9	7,4
2	4	4,2	18	4	3,3
3	6	4,0	19	6	7,0
4	7	7,2	20	9	8,0
5	8	5,8	21	5	3,5
6	3,5	3,1	22	6,5	7,7
7	6	4,5	23	5	3,5
8	5	2,8	24	3	2,6
9	3	2,4	25	7	4,8
10	6	6,3	26	8	5,6
11	5	3,2	27	7	5,7
12	7	4,8	28	6,5	4,8
13	6	5,1	29	2	2,1
14	5	4,1	30	4,5	3,8
15	7	7,1	31	6	6,6
16	6,6	5,9	32	4,5	3,1

Tabla 3. Resultados actitudinal Vs. rendimiento académico

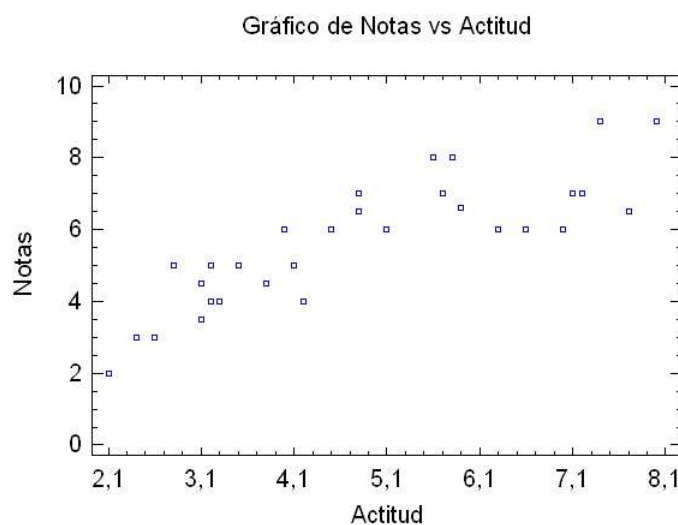
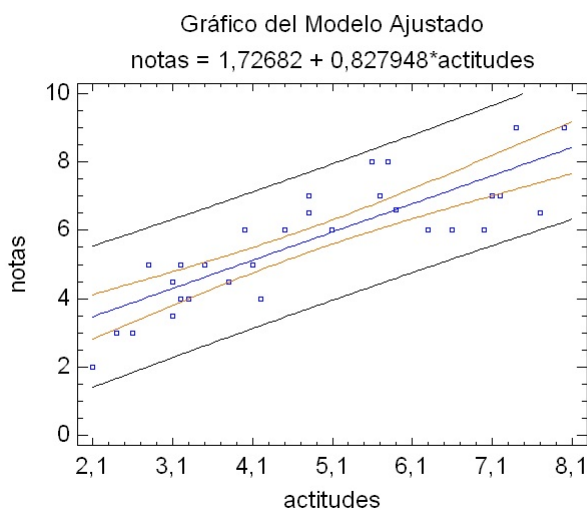


Figura 1. Notas Vs. Actitud

Para realizar la correlación de los resultados se utilizo el software de Statgraphics Centurion para procesar los datos a través de una regresión simple y poder determinar que tan correlacionados están el rendimiento académico con las actitudes de los estudiantes. Se puede observar que la nube de puntos tiene una tendencia lineal (Ver figura 1).



El coeficiente de correlación es de 0,832452 lo que indica que el nivel de correlación entre las actitudes y el rendimiento académico es del 70 , es decir que un porcentaje muy significativo lo que indica que existe una buena correlación entre la actitud y el rendimiento académico. El  $p$  – *valor*, que es un estadístico de prueba, es menor que 0,05 lo que nos garantiza que el porcentaje de confianza de la correlación es del 95 %. Los resultados obtenidos muestran que existe una correlación de tipo lineal entre las actitudes y el rendimiento académico, lo que plantea que las actitudes influyen en este contexto sobre el rendimiento académico, es decir que el bajo rendimiento académico de los estudiantes.

## 5. Conclusión

Después del análisis de los datos tomados a través de los distintos instrumentos de análisis y los objetivos planteados los se resaltan las siguientes conclusiones encontradas. Los estudiantes presentan actitudes desfavorables hacia el estudio de las matemáticas y tienen una dependencia del docente para responder ante los compromisos que se les coloca, por lo cual es una muestra de que no desean tener un conocimiento más profundo de las temáticas ya que las consideran innecesaria para su vida cotidiana. La metodología del docente, tradicional y basada en contenidos aislados de las necesidades de los estudiantes, hacen que la clase sea poco innovadora Y dinamizadora, haciendo de la relación docente-estudiante un poco hostil y basada solo en la dictadura de clases.

Se pudo evidenciar que la correlación entre actitud y rendimiento académico es significativa lo que resulta ser que entre mayor actitudes desfavorable hacia las matemáticas, mayor deficiencia en el rendimiento y a mayor actitudes favorables, mejor rendimiento académico. Los investigadores consideran que estas actitudes negativas en los estudiantes las cuales repercuten en su rendimiento pueden mejorarse a través de las siguientes recomendaciones. Crear un ambiente de trabajo en la clase que pueda integrar las necesidades de los estudiantes con las temáticas propuestas a realizar. Que la predisposición de los estudiantes hacia el estudio de la asignatura sea reemplazada por una actitud de aprender para la vida.



Los estudiantes ostentan actitudes negativas o desfavorables hacia el estudio de las matemáticas, concibiéndolas como una ciencia estática, acabada, desmotivante frente a su forma de ver el mundo. También se puede concluir que presentan una motivación intrínseca, solo realizan las actividades cuando están bajo presión de castigos. No se hace presente la motivación intrínseca.

La interacción del docente con los estudiantes se establece un contexto hostil, el cual se ve enmarcada por el comportamiento divergente de parte de los estudiantes al establecido por el docente. Los estudiantes rechazan cualquier iniciativa planteada por el docente justificando su desmotivación e indiferencia. Cabe resaltar que esta situación no se amerita solo al modo como el docente plantea y desarrolla las actividades que la mayoría de los caso, no provienen de un estudio sobre las situaciones que para los estudiantes son gratas, sino también a las predisposiciones de los docentes, generadas en alguno de los caso por ambiente cultural en que se mueve.

A partir del estudio de las actitudes y de cómo se relacionan con el proceso de enseñanza de las matemáticas se puede concluir la dependencia del estudiante a su profesor de matemática. Lo cual limita la actividad de estudiar y profundizar, conformándose con realizar las tareas exigidas más que por una satisfacción personal.

La correlación entre el rendimiento académico y las actitudes de los estudiantes es significativa, lo que plantea que entre mayor actitudes desfavorable hacia las matemáticas, mayor deficiencia en el rendimiento y a mayor actitudes favorables, mejor rendimiento académico. Lo que no se puede establecer en esta investigación es que a mayor rendimiento académico mejor actitudes hacia las matemáticas.

El docente juega un papel importante en el desarrollo de las actitudes de los estudiantes en las matemáticas. Se pudo deducir que la poca información e improvisación por parte del dinamizador de acción en el aula, debido a la confianza en su experiencia, olvidando las nuevas tendencias pedagógicas y didácticas que generan actitudes favorables para potencializar un aprendizaje de las matemáticas.

## Referencias

- [1] CALLEJO, M. L., *Un club matemático para la diversidad*, Col. Secundaria para todos. Madrid: Narcea. 1994
- [2] HERNÁNDEZ, A.I. *El rendimiento académico de las matemáticas en alumnos universitarios*. Encuentro Educativo: ED 12 (1) Maracaibo abril: <http://www.serbi.luz.edu.ve/scielo.php>. 2005
- [3] GÓMEZ-CHACON, I.M., *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid: Narcea. 2000
- [4] MARTINEZ BENCARDINO, C. *Estadística y muestreo 12 ed*. Bogotá: Ecoe Ediciones, 2005.
- [5] NARVAEZ, A.. *El rendimiento académico una cuestión de estudio*. ARA Editores: Perú. 2001

- [6] ORTIZ CP. *El Sistema de la Personalidad*. Lima: Orion; 1994.
- [7] PEREZ, S. G. *Investigación Cualitativa: retos e Interrogantes*, Editorial La Muralla. 1994
- [8] CERDA, H. *Los Elementos de la Investigación*, editorial HUBO 2000
- [9] CUERVO, J.. *Construcción de una escala de actitudes hacia la matemática (tipo likert) para niños y niñas entre 10 y 13 años que se encuentran vinculados al programa PRE-talentos de la escuela de matemáticas de la universidad Sergio arboleda*. Escuela de post-gradados, maestría en docencia e investigación universitaria, universidad Sergio arboleda 2009
- [10] HERRERA, S. Y POLO, S. ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 8 GRADO DEL COLEGIO DE BACHILLERATO INDUSTRIAL Y COMERCIAL REY DAVID. Facultad de Educación Universidad del Atlántico 1998
- [11] ROBLE, A. ACTITUD Y MOTIVACIÓN. Publicación virtual [www.galeon.com /aprenderaaprender/ actitudes/actmotivacion.htm](http://www.galeon.com/aprenderaaprender/actitudes/actmotivacion.htm). 2009
- [12] COLLE, C. PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO. Editorial Piado: BS ASS. 1990

Para citar este artículo: Diaz Noguera, Stiven et al. 2016, “Correlación de las actitudes y el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

## Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal

### Use of Matlab as computational tool to support teaching and learning of linear algebra

Gabriel Vergara

*Universidad del Atlántico, Barranquilla - Colombia*

*gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co*

Aberth Avilez

*Fundación Cambrige, Barranquilla - Colombia*

*aavileza@mail.uniatlantico.edu.co*

Julio Romero

*Universidad del Atlántico, Barranquilla - Colombia*

*julioromero@mail.uniatlantico.edu.co*

---

---

#### Resumen

En este artículo se presentan los resultados de la investigación titulada Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de algunos temas de álgebra lineal en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico. Esta se basó en el empleo del software Matlab para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, para la realización de operaciones matriciales, la solución de problemas asociados a espacios vectoriales y a transformaciones lineales y, para el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada.

**Palabras claves:** Matlab, herramienta computacional, enseñanza, aprendizaje, tópicos de álgebra lineal.

#### Abstract

This article presents the results of the research entitled Using Matlab as a computational tool to support teaching and learning some topics of linear algebra in the degree program in mathematics from the University of the Atlantic. This was based on the use of Matlab software to support the teaching and learning of solving systems of linear equations, for performing matrix operations, solving problems associated with vector spaces and linear transformations and for calculating.

*Keywords:* MATLAB, computational tool, teaching, learning, and topics in linear algebra.

---

---

## 1. Introducción

A lo largo de la historia el hombre ha tratado de darle sentido o de explicar el mundo que lo rodea mediante el uso de las matemáticas; pero el álgebra no ha estado alejada de ese contexto, puesto que en la antigüedad los griegos trataron de explicar el mundo usando variados elementos de esta, como por ejemplo para identificar sus elementos y las relaciones que existían entre estos. Sin embargo, a través de la historia se le han dado diferentes significados a la palabra álgebra; un ejemplo claro de ello fue lo hecho por el matemático Leonard Euler, quien como se cito en [1], en su su libro *Introducción al álgebra*, consideraba que el álgebra es la teoría de los cálculos con cantidades de distintas clases.

Con base en lo anterior y en la imperiosa necesidad de apoyar el proceso de enseñanza del álgebra lineal, en este trabajo se propone el uso del Matlab como herramienta para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de algunos temas de álgebra lineal, fundamentada en la investigación realizada en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la universidad del Atlántico.

En la enseñanza del álgebra lineal se presentan muchas dificultades debido al alto grado de abstracción de algunos temas y a lo tedioso que puede ser resolver ejercicios que implican una serie de algoritmos muy extensos; por tal motivo en muchas ocasiones los docentes optan por dejárselos como tarea al estudiante para que sean ellos quienes los resuelvan, sin importarles que estos logren o no un aprendizaje significativo de los mismos. Por su parte, los resultados preliminares de una prueba diagnostica aplicada a estudiantes del programa que ya aprobaron esta asignatura y con el fin de conocer su percepción respecto de las metodologías aplicadas por sus profesores de álgebra lineal, mostraron que no se logra un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes debido a que las estrategias didácticas y metodológicas empleadas por los docentes de de esta asignatura no son las más apropiadas para abordar temas tan complejos como los que usualmente se estudian en esta. A su vez, consideran estos que a los docentes de álgebra lineal del programa de Licenciatura en Matemáticas poco les importa las aplicaciones y el uso de programas computacionales para apoyar los procesos de enseñanza aprendizaje de la misma

Así mismo, siendo parte de esta experiencia como estudiante y como docentes de este programa y, pensando en las dificultades que existen para llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, se desarrolló este trabajo de investigación con el fin de proponer la utilización del software Matlab como herramienta que apoye la enseñanza y el aprendizaje de temas como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, para la realización de operaciones matrices, la solución de problemas asociados a espacios vectoriales y a las transformaciones lineales y, para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz y, de esta manera contribuir al aprendizajes significativo de estos por parte de los estudiantes.

Esta investigación que inició en Enero de 2015 y finalizó en Febrero de 2016, se enmarcó en el paradigma positivista, ya que se pretendía alcanzar una comprensión objetiva de la realidad educativa que conllevara al mejoramiento académico, teniendo como objetivo la implementación del software Matlab para que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico se apropien de conceptos como los sistemas de ecuaciones lineales y sus aplicaciones, las operaciones matriciales, la solución de problemas asociados a espacios vectoriales y a transformaciones lineales y, al calculo de valores y vectores propios asociados a una matriz cuadrada. Para ello, se implemento la siguiente metodología; inicialmente se procedió a recoger información de textos relacionados con las variables objeto de estudio, de modo que estos sirvieran como soportes teóricos adecuados para la justificación del problema y la posterior elaboración del marco teórico. Luego se diseñaron los instrumentos considerados primarios por expertos, para la recolección de la información. Posteriormente se verifico la validez de los instrumentos de recolección de información primarios a través del juicio de expertos. A continuación de esto, se procedió a aplicar los instrumentos de

recolección de la información, a una muestra de 35 estudiantes y 5 docentes del programa de Licenciatura, en matemáticas y, una vez obtenida esta, se se tabuló y graficó, para finalmente analizarla, sacar unas conclusiones y, diseñar la propuesta y las respectivas recomendaciones.

Para la recolección proveniente de la población muestra, inicialmente se realizaron unas observaciones directas al desarrollo de algunas clases de álgebra lineal, para a partir de ello tener una idea respecto de como los docentes llevaban a cabo el proceso de enseñanza del álgebra lineal y que estrategias didácticas y pedagógicas empleaban para el desarrollo de las mismas. La otra técnica empleada fue la entrevista, realizada mediante cuestionarios de preguntas cerradas y aplicada a un grupo de 35 estudiantes y 5 docentes de álgebra lineal del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Atlántico.

Las contribuciones realizadas mediante esta investigación serán de gran utilidad para la colectividad de docentes de matemáticas, ya que les permitirá hacer un replanteamiento en cuanto a la forma de enfocar sus clases y en consecuencia propiciar ambientes de investigación de nuevos trabajos que permitan fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal y de las matemáticas en general, sobre todo a nivel de la educación superior.

## **2. Marco teórico o Fundamentos teóricos**

Para esta investigación, los fundamentos teóricos fueron de gran aporte, en primer lugar porque permitieron a partir de las comparaciones, determinar los puntos de coincidencias y diferencias entre las investigaciones; en segunda instancia por que evita repetir aspectos que ya se encuentran suficientemente estudiados y desarrollados; además permitieron identificar bajo que enfoques epistemológicos han sido abordados los estudios anteriores, y por supuesto que teorías se han utilizado; finalmente porque permiten conocer las conclusiones a que se ha llegado en estas, entre otros.

Respecto del uso de herramientas computacionales y de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) para dinamizar los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y en particular del álgebra lineal, se han llevado a cabo algunos estudios recientes; a nivel Internacional encontramos el trabajo de (Santos, 2005)(Ver [2]), titulado Utilización de las nuevas Tecnologías de la comunicación y de la información en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior; por su parte, (González, 2009)(Ver [3]) propone un ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior. Esta última investigación arroja como resultado el hecho que las herramientas computacionales ayudan al alumno en su actualización profesional, a la vez que constituyen un apoyo para la integración de los distintos conceptos del álgebra lineal.

En el contexto nacional encontramos el trabajo de (Rosales, 2012)(Ver [4]), titulado Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab. Si bien estos trabajos son innovadores desde el punto de vista didáctico y metodológico, se observa como solo abordan el uso de las tecnologías para estudiar y resolver problemas matriciales, mas no consideran temas centrales del álgebra lineal como los espacios vectoriales y el cálculo de valores y vectores propios.

De otra parte, en lo que respecta a la génesis instrumental del problema objeto de estudio, se puede mencionar el trabajo de (Artigue, 2002)(Ver [5]) titulado Aprendiendo matemáticas en un ambiente CAS: la génesis de una reflexión sobre la instrumentación y la dialéctica entre el trabajo técnico y el conceptual. En este se presenta la génesis de una reflexión acerca de algunas cuestiones relacionadas con la instrumentación y la dialéctica entre el trabajo conceptual y el trabajo técnico en matemáticas. Los resultados de esta son el fruto de varios años de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en ambientes CAS. Por su parte, (Trouche, 2009)(Ver [6]) realiza una investigación denominada De los libros de texto a

los recursos en línea: evoluciones tecnológicas y evolución de los acercamientos didácticos. Una de las conclusiones a la que llega el autor, es que el uso adecuado de las TIC contribuye a la generación un aprendizaje significativo del álgebra lineal, pues permite que se dé una interacción directa entre lo teórico y lo práctico y, entre lo previo y lo actual.

En lo que corresponde a los aspectos teóricos, sobre aprendizaje significativo versan muchos teorías escritos por importantes investigadores, hechos por importantes estudiosos del tema, pero no cabe duda que los aportes más representativos en este campo son hechos por (Ausubel, 1983)(Ver [11]), ya que estos ofrecen un marco apropiado tanto para el adecuado desarrollo de la labor docente, como para el estudio de técnicas educacionales coherentes con tales principios, convirtiéndose en un marco teórico que favorece dicho proceso.

A este respecto, (Ausubel 1983)(Ver [11]) afirma que un aprendizaje es significativo cuando los contenidos se relacionan de manera no arbitraria y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Pág. 48). Agrega que para que el estudiante logre un aprendizaje significativo, además de las estrategias didácticas y metodológicas empleadas por el docente, este debe manifestar [...] una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria.

### **3. Método experimental**

Esta investigación se ubica dentro del paradigma positivista, con enfoque cuantitativo, apoyado en un estudio proyectivo, con diseño experimental, de campo, longitudinal, porque es un estudio de una situación social a través de un proceso previo de indagación para proponer soluciones o alternativas de cambio a una situación determinada a partir de un proceso de indagación, mediante la exploración, la descripción la explicación y la proposición del uso de una herramienta computacional para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. Además, este estudio se imbrica dentro del enfoque Empirista Inductivista, ya que el conocimiento generado a partir de esta, se produce y se valida a partir de los datos recogidos de la realidad por vía sensorio-perceptiva y por una orientación concreta y objetiva de las cosas.

Como se mencionó antes, los instrumento para la recolección de la información serán aplicadas a 35 docentes y 5 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Este proceso se llevo a cabo entre Mayo y Agosto de 2015. Los docentes hacen parte del cuerpo de profesores de los programas de licenciatura en matemáticas y del programa de matemáticas de la facultad de ciencias Básicas y quienes en los últimos 5 años habían orientado la asignatura álgebra lineal. Por su parte, los estudiantes corresponden a una muestra tomada del grupo de estudiantes del programa de licenciatura en matemáticas, de las jornadas diurna y nocturna y que habían cursado álgebra lineal en los periodos 2013-I, 2013-II, 2014-I y 2014-2, ya que por la cercanía de tiempo, se asume que estos aún tienen frescos los temas de álgebra lineal y algunos aspectos inherentes al desarrollo de la misma por parte de sus docentes.

En este estudio se planteó un diseño longitudinal, experimental y de campo, donde se presenta una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma. En ese sentido, esta investigación validó las estrategias didácticas para el aprendizaje significativo de algunos tópicos del álgebra lineal por parte de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico de Barranquilla Colombia, pero no de forma independiente, sino por intermedio de la praxis educativa.

Es un diseño experimental en cuanto que los investigadores comprobaron los efectos de una intervención específica; se enmarca dentro de los diseños de campo, porque se realiza en el mismo lugar donde está el objeto de estudio; es decir la investigación se centró en hacer el estudio donde el fenómeno se daba de manera natural. Finalmente, el estudio fue longitudinal ya que las variables objeto de estudio se observaron tal y como se daban en su contexto natural en dos o más momentos y en tiempos diferentes, aplicándose dos o más veces el instrumento a la misma muestra para recabar la información que sea necesaria.

#### 4. Resultados y análisis

A continuación se describen los resultados obtenidos en la primera etapa de la investigación, la cual consistió en la realización de una encuesta como prueba diagnóstica a estudiantes y docentes (muestra seleccionada) del programa de licenciatura en matemáticas, por un lado para determinar si los docentes usan o consideran necesaria la utilización de algún software para apoyar la enseñanza del álgebra lineal, y por otro para determinar que grado de conocimiento poseían los estudiante que ya habían cursado álgebra lineal respecto de los temas objeto de estudio y si alguna vez habían utilizado algún software para apoyar el proceso de aprendizaje de tópicos como la solución de sistemas de ecuaciones lineales el calculo de la inversa de una matriz y el calculo de los valores y vectores propios asociados a una matriz cuadrada.

##### 4.1. Análisis de los resultados de la encuesta aplicada a los docentes de álgebra lineal de Licenciatura en Matemáticas

**VARIABLES:** uso de estrategias didácticas y Manejo o no manejo de un software como estrategia para para apoyar la enseñanza-aprendizaje de algunos temas del álgebra lineal.

**DIMENSIÓN:** Docentes que usan estrategias didácticas y/o un software.

SUB-DIMENSION	ITEMS	INDICADOR	SI %	NO %	CONCLUSION
Estrategias didácticas	1	Estrategias	100%	0%	La tendencia es importante las estrategias didácticas
	2		60%	40%	
	MEDIA		80%	20%	
	PUNTAJE		1,82	0,64	2,45
MEDIA			80%	20%	La tendencia es importante las estrategias didácticas

Tabla 1. Resultados de la encuesta a docentes respecto de la utilización de estrategias didácticas para enseñar álgebra lineal

Los resultados evidencian que el 100 % de los docentes afirman que usan estrategias didácticas para llevar a cabo su proceso de enseñanza del álgebra lineal. Por su parte, el 60 % de ellos consideran importante el uso de algún software como estrategia didáctica para llevar a cabo la enseñanza del álgebra lineal, mientras que el 40 % no lo considera así.

Por su parte, los resultados mostrados en el la Tabla 2 indican que el 73 % de los profesores encuestados usan o han usado algún software para apoyar la enseñanza de álgebra lineal, además consideran que esto les

SUB-DIMENSION	ITEMS	INDICADOR	SI %	NO %	CONCLUSIÓN
Uso de software como estrategia	3	Uso de software como estrategia didáctica	80%	20%	La tendencia es usar software como estrategia
	4		60%	40%	
	5		80%	20%	
	6				
		MEDIA	73%	26%	
		PUNTAJE	1,82	0,64	2,45
MEDIA			73%	26%	La tendencia es usar software como estrategia

Tabla 2. Resultados de la encuesta a docentes sobre la utilización de algún software para la enseñanza de álgebra lineal.

brinda mayores potencialidades didácticas para la enseñanza de los mismos. Además se observa que el 26 % no usan o no han usado algún software.

#### 4.2. Análisis de resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que ya vieron álgebra lineal

**Variable:** Aprendizaje de los tópicos de álgebra lineal.

**Dimensiones:** Manejo y no manejo de temas centrales de álgebra lineal

Se les pregunto a los estudiantes seleccionados sobre el nivel de manejo que poseían de los tópicos sistemas de ecuaciones lineales, operaciones matriciales, espacios vectoriales, transformaciones lineales y el calculo de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada y, respecto de su capacidad para resolver problemas de aplicación inherentes a estos temas (item 1 e item 2 de la Tabla 3)

SUB-DIMENSION	ITEMS	INDICADOR	SI %	NO %	CONCLUSION
Conceptos de álgebra lineal	1	Conocimiento previos	29%	71%	La tendencia es no saber
	2		26%	74%	
			48%	52%	
		MEDIA	34%	66%	
		PUNTAJE	2,47	0,51	2,98
MEDIA			34%	66%	La tendencia es no saber

Tabla 3. Resultados de la encuesta aplicada a estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre el manejo de los temas centrales de álgebra lineal.

De acuerdo a los resultados mostrados en la Tabla 3 se puede decir que el 34 % de los estudiantes seleccionados manejan adecuadamente cada uno de los temas antes descritos y resuelven problemas de aplicación sobre temas relacionados con estos, mientras que el 66 % no los manejan adecuadamente y en consecuencia se les dificulta resolver problemas de aplicación.



Una vez analizados los resultados anteriores, se procedió a hacer unos talleres de refuerzos consistentes en la resolución de ejercicios para que los estudiantes participantes afianzaran sus conocimientos en temas como resolución de problemas de aplicación sobre sistemas de ecuaciones lineales, operaciones matriciales, , problemas de aplicación sobre espacios vectoriales y transformaciones lineales y sobre el cálculos de los valores y vectores propios asociados a una matriz cuadrada. Posteriormente se les dio unos talleres prácticos sobre el uso de Matlab, para que posteriormente resolvieran estos mismos talleres mediante el uso de Matlab, de modo que los estudiantes adquirieran destrezas tanto para el manejo de los comandos básicos de este software, como para la interpretación de las soluciones y el establecimiento de comparaciones entre el tiempo de ejecución del software Matlab y el empleado usando los métodos tradicionales. Finalmente y con la intención de analizar el nivel de avance en cuanto al aprendizaje de cada uno de los temas tratados, se les hizo dos pruebas teórico-prácticas, siendo las practicas resueltas usando Matlab.

La primera prueba consistió en la resolución de problemas de aplicación sobre sistemas de ecuaciones lineales y operaciones matriciales. Los resultados de esta prueba se describen en la Figura 1.



Figura 1. Resultados de prueba teórico-práctica sobre sistemas de ecuaciones y operaciones matriciales.

Con base a los resultados de la Figura 1, se puede decir que respecto de la prueba diagnóstica inicial en donde los estudiantes evidenciaron dificultad para la comprensión y solución de problemas de aplicación sobre los temas sistemas de ecuaciones lineales y operaciones matriciales, usando lápiz y papel, estos mostraron gran mejoría, pues no solo dominan los temas de mejor forma, sino que son capaces de resolver problemas de aplicación de manera teórica y práctica usando el software Matlab. Para ser más precisos, la Figura 1, muestra que 82 % de los estudiantes resolvieron correctamente la prueba teórico-práctica, mientras que solo el 18 % lo hizo de manera incorrecta.

La otra prueba consistió en la resolución teórico-práctica de un test sobre problemas de aplicación inherentes a espacios vectoriales, transformaciones lineales y valores y vectores propios asociados a una matriz cuadrada. Los resultados de esta prueba se describen en la Figura 2.

La Figura 2 pone de manifiesto que el 74 % de los estudiantes resolvieron de forma correcta la prueba teórico-práctica, mientras que el 26 % presentó dificultades para la solución de la misma.



Figura 2. Resultados de la prueba teórico-práctica sobre espacios vectoriales, transformaciones lineales y valores y vectores propios.

## 5. Resultados obtenidos

Como se menciona anteriormente, la prueba diagnóstica inicial indicaba por un lado que a la mayoría de los docentes no les gustaba usar softwares para llevar a cabo el proceso de enseñanza del álgebra lineal y, por otro, que los estudiantes no manejaban bien temas centrales de del álgebra lineal como lo son los sistemas de ecuaciones lineales, las operaciones matriciales, la solución de problemas de aplicación relativos a espacios vectoriales y transformaciones lineales y el calculo de valores y vectores propios asociados a una matriz cuadrada, pero que posterior al desarrollo de los talleres teórico-práctico para afianzamiento de estos temas y la realización de las pruebas finales (los dos test teórico- prácticos), se encontró que al emplear el software Matlab, a los los estudiantes se les facilita tanto la comprensión como la solución de problemas de aplicación de los tópicos sistemas de ecuaciones lineales, operaciones matriciales, espacios vectoriales, trasformaciones lineales y calculo de valores y vectores propios de una matriz cuadrada, no solo por la rapidez en la ejecución de los los cálculos, sino por la variedad de cambios que pueden realizar a estos y obtener resultados veraces y fáciles de comparar; estableciendo similitudes y diferencias.

## 6. Conclusión

Gracias al empleo del software Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de temas centrales del álgebra lineal como los sistemas de ecuaciones lineales, las operaciones matriciales y la solución de problemas inherentes a los espacios vectoriales y a las transformaciones lineales y, el cálculo de los valores y vectores propios asociados a una matriz cuadrada, los estudiantes se sienten motivados a continuar profundizando en el estudio del álgebra lineal, pues además de afianzar sus conocimientos, le encuentran su verdadera esencia mediante la solución de problemas inherentes a estos y a otras áreas del conocimiento. En este sentido, se considera que los resultados de esta investigación sientan las bases para que en cada una de las asignaturas de las matemáticas, se implemente no solo este software, sino que docentes y estudiantes hagan uso de de las distintas herramientas que les brinda las tecnologías de la comunicación y de la información para mejorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que estas se

conviertan en herramientas que contribuyan a la consecución de aprendizaje significativos y a la generación de conocimiento en un mundo cada vez más globalizado.

## Referencias

- [1] Cardenas, C. H. (1993). El Álgebra de viéte y soluciones de ecuaciones de tercer y cuarto grado.
- [2] Santos, N. et al. (2005). Utilización de las nuevas Tecnologías de la Comunicación y de la Información en la enseñanza de la matemática en la educación superior.
- [3] González, Y. (2009). Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior
- [4] Rosales, G. (2012). Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab. (Tesis de Maestría), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- [5] Artigue, M. (2002). Aprendiendo matemáticas en un ambiente CAS: la génesis de una reflexión sobre la instrumentación y la dialéctica entre el trabajo técnico y el conceptual.
- [6] Trouche (2009). De los libros de texto a los recursos en línea: evoluciones tecnológicas y evolución de los acercamientos didácticos
- [7] Moreira, M. (1997). Cambio conceptual: Crítica a modelos actuales y una propuesta a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. Trabajo presentado en la conferencia internacional Science and Mathematics Education for the 21 st Century : Towards Innovatory Approaches, 26 de Septiembre al primero de de Octubre, Concepcion, Chile.
- [8] Ortiz, J., Rico, L., and Castro, E. (2008). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: Un estudio con profesores en formación. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2, 181-189.
- [9] Ramírez, B. Una propuesta didáctica para el estudio del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal. En T. Gutiérrez (presidencia). Sección Matemática. Conferencia llevada a cabo en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, (págs. 1-12). Chiapas, México.
- [10] Sampieri, R., Fernández, C., and Batista, P. (2010). *Metodología de la investigación* Sexta edición edición. México: McGraw-Hill.
- [11] Ausbel, D. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo*. 1-10.

Para citar este artículo: Gabriel Vergara et al. 2016, Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

Situación actual de la enseñanza de la estadística en el nivel de educación primaria en el  
municipio de Valledupar

Current situation of teaching of statistics on the level of primary education in the municipality  
of Valledupar: case study indigenous schools

Liliana Barón Amaris <sup>1</sup>,

Hebert Delgado Mier <sup>2</sup>

*Universidad Popular del Cesar, Colombia*

<sup>1</sup> lilianabaronamaris@gmail.com , <sup>2</sup>heberth12@gmail.com,

---

---

## Resumen

La Estadística hace parte del currículo de matemáticas en la educación primaria y secundaria en Colombia; los estándares elaborados por el Ministerio de Educación Nacional, los numerosos problemas evaluados en las Pruebas Saber y diversas investigaciones reconocen la importancia de los conceptos estadísticos; sin embargo, los tópicos de Estadística son frecuentemente relegados en la enseñanza en la educación primaria.

En este trabajo se presenta los resultados principales de la investigación sobre la Enseñanza de la Estadística en el nivel de Educación Primaria y se hace un análisis en el caso concreto de la enseñanza en las Escuelas o Centros Indígenas.

**Palabras Claves:** enseñanza, estadística, etnomatemáticas, aleatorio, probabilidad,

## **Abstract**

Statistics is part of the mathematics curriculum in primary and secondary education in Colombia; the standards developed by the Ministry of Education, the numerous problems evaluated in the Saber tests and the various researches recognize the importance of statistical concepts; however, Statistics topics are often relegated to teaching in primary education.

In this work, the main results of research on Statistics teaching at the level of primary education is presented, as well as an analysis on the specific case of teaching in schools or Indigenous centers.

**Keywords:** education, statistics, ethnomathematics, random, probability .

---

## **1. Introducción.**

La Estadística hace parte del currículo de matemáticas en la educación primaria y secundaria en Colombia; los estándares elaborados por el Ministerio de Educación Nacional, los numerosos problemas evaluados en las Pruebas Saber y diversas investigaciones reconocen la importancia de los conceptos estadísticos; sin embargo, los tópicos de Estadística son frecuentemente relegados en la enseñanza en la educación primaria.

La investigación se desarrolló desde finales de 2013 hasta mediados de 2015, bajo un enfoque cualitativo naturalista, por cuanto se observó e interpretó la enseñanza de la estadística en la básica primaria en su contexto natural.

Se utilizó el muestreo estratificado, donde cada estrato estuvo conformado por los diferentes núcleos educativos del municipio de Valledupar, mediante asignación proporcional se estableció la muestra de 59 instituciones educativas de las 154 que cumplieron los criterios de inclusión.

Para la recolección de la información se empleó la técnica de la encuesta cuyo instrumento fue un cuestionario aplicado a los docentes sobre la forma como organiza, desarrolla y evalúa los temas de estadística en la asignatura de matemáticas en el nivel de básica primaria. El análisis de la información se realizó desde el enfoque interpretativo-descriptivo.

## **2. La estadística en la Básica Primaria.**

Como referentes internacionales para la Enseñanza de las Matemáticas se tiene: Los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematic NTCM (2003), en los que se presenta lo que debería valorarse en la enseñanza de las matemáticas desde la Educación Básica Primaria hasta Bachillerato. Así mismo, los Estándares Comunes para las Matemáticas de la Common Core State Standards Initiative CCSSI (2010), describen los distintos tipos de conocimientos que los profesores de matemáticas de todos los niveles deberían intentar fomentar en sus alumnos.

Como referentes nacionales, se tuvo en cuenta la normatividad vigente relacionada con el diseño curricular en nuestro país: La Ley 115 de 1994 conocida como Ley General de Educación, Decreto 1860 de 1994, Decreto 1290 de 2009, los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias de las diferentes áreas publicados por el Ministerio de Educación Nacional MEN en 1998 y 2003, respectivamente; y los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA, socializados por el MEN en el mes de Julio del presente año, que permiten identificar, grado a grado, los aprendizajes fundamentales de los estudiantes.

Diversos investigadores se han pronunciado sobre la importancia y necesidad de abordar tópicos de estadística y probabilidad desde la educación primaria. Para Alsina (2012) todas las orientaciones en materia de educación matemática coinciden en que es necesario empezar a trabajar conocimientos de estadística y probabilidad

desde la etapa de educación infantil. Batanero (2013) presenta una descripción de las Teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico de Piaget e Inhelder y Fischbein.

**La estadística en el Currículo.** Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 2003) contempla cinco procesos generales que el estudiante debe realizar en la solución de preguntas planteadas en el área de Matemáticas: Comunicar, razonar, formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Las competencias en matemática se concretan en cada uno de los cinco Pensamientos propuestos en los Lineamientos, dentro de los cuales tenemos, el Pensamiento Aleatorio y Sistema de Datos, llamado también probabilístico o estocástico.

El Pensamiento Aleatorio, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (MEN, 2003).

Los estándares básicos de competencia en Matemática contemplan para la Básica Primaria las siguientes competencias:

De 1º a 3º.

- Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas.
- Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar.
- Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos.
- Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras.
- Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos.
- Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
- Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
- Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.

En 4º y 5º

- Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).



- Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.
- Interpreto información presentada en tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
- Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
- Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos.
- Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.
- Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA, considera para la educación primaria lo siguiente:

Grado 1. Reconoce características de objetos (como color, forma tamaño, longitud, edad, deporte, peso) y los clasifica a partir de estas particularidades.

Grado 2. Ordena objetos y/o eventos de acuerdo a su longitud, distancia, área, capacidad, peso, duración, etc.

Grado 3. Interpreta y representa datos dados en diferentes maneras. Usa correctamente las expresiones posible, imposible, muy posible y poco posible.

Grado 4. Entiende unos datos representados de cierta forma y los representa de otra. Interpreta y presenta datos descritos como puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Grado 5. Interpreta datos que involucran porcentajes. Calcula el promedio e identifica la moda en un conjunto de datos. Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas. Lee e interpreta gráficas.

Por otra parte, el programa TODOS A APRENDER del MEN tiene como objetivo Mejorar las condiciones de aprendizaje en los Establecimientos Educativos focalizados y, con ello, el nivel de las competencias básicas de los estudiantes matriculados en ellos entre transición y quinto grado, específicamente en las áreas de Lenguaje y Matemáticas, dado que la meta para 2014 era que más del 25% de los estudiantes de estos establecimientos educativos ascienda de nivel, al menos en las áreas de Lenguaje y Matemáticas, en la prueba SABER de 3<sup>o</sup> y 5<sup>o</sup>.

En el marco de este programa, el MEN entrega material didáctico a todos los niños y niñas que incluye: textos en papel, cuadernos de trabajo, objetos digitales de trabajo, cuadernillos de evaluación y libro digital; y un plan de formación y acompañamiento para los docentes en sus propias aulas.

Dentro del plan general de contenidos, incluyen en el Pensamiento Aleatorio los siguientes tópicos: Grado Primero: recolección de datos, gráficos de barras, pictogramas; Grado Segundo: tabulación de datos, gráficos de barras, interpretación de gráficos; Grado Tercero: tabla de frecuencias, la moda; Grado Cuarto: frecuencia y moda, gráficos de líneas, probabilidad de un evento; y Grado Quinto: Proceso estadístico, tablas de frecuencias, gráficas de barras y de líneas, construcción e interpretación, medidas de tendencia central: moda, mediana y media; gráficas circulares, construcción e interpretación, probabilidad de un evento.

**El contexto en el Aprendizaje de la Estadística en las Comunidades Indígenas.** El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar –no sólo físico, sino ante todo sociocultural– desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, y por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas. (MEN, 2003).

**El contexto extraescolar.** El municipio de Valledupar está ubicado al nororiente de la costa caribe colombiana, cuenta con 453.215 habitantes, 386.733 en la cabecera municipal y 66.482 en el resto de municipio<sup>1</sup>, posee 7703 km<sup>2</sup> de extensión. Está dividido en seis (6) comunas en la zona urbana y en corregimientos en la zona rural. Su población es pluriétnica, compuesta por grupos indígenas: los kankuamos, wiwa, arhuacos y koguis que habitan tanto en la zona rural como en la urbana<sup>2</sup>; los afrodescendientes en la zona oriental y suroriental; mestizos en la zona centro y occidental.

La población indígena en el municipio no alcanza el 8,52 por ciento, siendo la mayor etnia La kankuama que representa el 3,4% de la población del municipio<sup>3</sup>.

El Municipio de Valledupar cuenta con 202 establecimientos educativos, 170 oficiales y 32 no oficiales; los establecimientos educativos oficiales están distribuidos en 10 núcleos educativos, tres de ellos se encuentran en territorio indígena.

---

<sup>1</sup> Proyección DANE 2015.

<sup>2</sup> Aproximadamente el 40% de su población ha sido desplazada y se han asentado en el casco urbano del municipio.

<sup>3</sup> Según estadística DANE, 2005.

El núcleo 7, formado por 26 instituciones: I.E. Agrícola La Mina, y las escuelas: Cerro Morillo, El Mojao, Hatico 1 y 2, La Mina, Ramalito, Rancho de Goya, San Fernando, Antonio Enrique Díaz (Sede Principal), Alto de la vuelta, Las Raíces, José Celestino Mutis (Sede Principal), El Jabo, Guaochito, Los Corazones, Patillal (Sede Principal), La Vega Arriba, Promoción Social Guatapurí – Chemesquemena (Sede Principal), Chemesquemena, San Isidro Labrador (Sede Principal), El Triunfo, Las Flores, Lucila Carrillo de Díaz y Pontón.

Núcleo 9, con 15 establecimientos: Centro Indígena Cherua, con las escuelas: Ahyumal (Sede Principal), Bernaka, Cherua, Konchurua, Surimena y Tezhumke; Centro Indígena San José, lo conforman las escuelas: Koggi Sarachui (Sede Principal), Maruamake, Pueblo Hernández y San José; Escuela Indígena de Rongoy, pertenecen a éstas las escuelas: Sanabas de Higuerón (Sede Principal), Rongoy, Dungakare, Piedra Liza y Yurrua.

Núcleo 10, lo componen 13 escuelas: Centro Indígena Gun-Aruwan, con las escuelas: Geygekan, Isarwa, Birwa (Sede Principal), Fugaka, Peñimake, Seykun, Umiriwa; Escuela Indígena Donachui, y las escuelas: Aruamake, Donachui, Sogrome, Seynimin y Timaka.

**El Contexto Escolar.** Legislación Etnoeducativa. El Estado Colombiano “reconoce y protege la diversidad étnica y cultural de la Nación colombiana”; establece que “la cultura en sus diversas manifestaciones es fundamento de la nacionalidad por lo que reconoce la igualdad y dignidad de todas las que conviven en el país”, que “los integrantes de los grupos étnicos tendrán derecho a una formación que respete y desarrolle su identidad cultural” y “la enseñanza que se imparte en las comunidades con tradiciones lingüísticas propias será bilingüe”.

La educación para grupos étnicos en Colombia está definida como: “la que se ofrece a grupos o comunidades que integran la nacionalidad y poseen una cultura,

una lengua, unas tradiciones y unos fueros propios y autónomos. Esta educación tiene que estar ligada al ambiente, al proceso productivo, al proceso social y cultural con el debido respeto de sus creencias y tradiciones”

Educación en la Etnia Kankuama. La educación se desarrolla de acuerdo con el Calendario Académico, que consta de 42 semanas, comprendidas desde la segunda semana de enero hasta la tercera semana de octubre, según la cosecha del café; y con base el marco general de la educación de la Etnia Kankuama. Según El Ordenamiento Educativo del Pueblo Indígena Kankuamo (2008), la educación Kankuama tiene como principios una educación integral y colectiva, basada en el desarrollo de valores que hacen posible la formación de kankuamos y kankuamas de acuerdo a su ideología, mediante estrategias y un enfoque pedagógico propios; consideran los principios de: Respeto, reciprocidad, solidaridad, autoprotección, comunidad, unidad.

La educación que recibe el pueblo indígena kankuamo se fundamenta en un proceso escolar basado en estándares y competencias, en conocimientos de información y no en el pensar y reflexionar. Se rige por lineamientos nacionales, es impuesta, se educa para preparar jóvenes a competir en el mercado y no para defender la cultura y la tradición, la pedagogía no articula el proceso con lo tradicional, se evalúa por rendimientos académicos de los estudiantes, no se tiene en cuenta la falta de preparación de algunos docentes ni su desempeño como personas.

El plan de estudios se delimita a partir de ocho áreas para la básica primaria, dentro de las cuales se encuentran las matemáticas y quince asignaturas con una intensidad semanal de 25 horas. Las matemáticas desarrollan desde 1º. hasta 11º. en 5 horas semanales, temas convencionales, con una variación importante en cuanto a la concepción del espacio y el tiempo, los sistemas numéricos, las cifras en lengua y una serie de medidas tradicionales.

**El Contexto de Aula.** El ordenamiento educativo del Pueblo Indígena Kankuamo contempla: Es función de la escuela propiciar en los estudiantes la observación, el análisis y la reflexión constante para afianzar la investigación propia; fortalecer a partir del trabajo colectivo el valor de ser y sentirse indígena kankuamo, la identidad y el respeto por la diferencia; fomentar en la comunidad el respeto por la naturaleza, el agua, las plantas, los animales, los cerros, las piedras y todo lo que existe; y fortalecer la formación de los miembros de la comunidad educativa para la ley de origen, en tanto los docentes no pueden enseñar algo en lo que no están capacitados.

Algunos elementos que pueden ser transmitidos en el aula de clases: Las artesanías, música tradicional en cuanto manipulación y construcción de los instrumentos, danzas propias, la alimentación y el conocimiento cotidiano de las plantas de manejo común, el manejo de la producción y uso tradicional de la tierra, el aprendizaje del idioma e investigación lingüística acerca de la lengua Kankuama, los juegos tradicionales, el respeto por la naturaleza y el equilibrio que debemos mantener, la práctica constante de la observación y la reflexión, las estructuras de gobierno actual (OIK), el valor que tienen los trabajos espirituales; la tradición oral en: la poesía, leyendas, anécdotas, décimas, cantos a la naturaleza, análisis de la musicalidad de las aves; un elemento definitivo en la recuperación cultural y espiritual del pueblo kankuamo como indígena en la Sierra, es el trabajo colectivo; a través de él y para él se debe orientar el proceso escolar, en general todos los conocimientos formales de nuestra cultura .

### **3. Resultados y discusión.**

El nivel de formación académica de los docentes responsables de la asignatura Matemáticas, se distribuyen así: 22.4% son Bachilleres o Normalista Superior, 29.7 son Licenciados en Básica o Administración Educativa, 41.8% son Licenciados en Básica Primaria con énfasis en Matemáticas o Licenciados en Matemáticas y 6.1%

corresponden a otras profesiones. Los años de experiencias como docentes oscilan entre uno y más de 15 años y la experiencia como docentes de matemáticas es en promedio de: 9 años.

En general, los maestros afirman que según cronograma se debe dedicar una hora a la semana a Enseñanza de la Estadística, sin embargo advierten que el tiempo programado no es suficiente.

Los docentes en su mayoría utilizan como estrategia pedagógicas para la enseñanza de la estadística, la recolección de datos dentro del aula, en menor proporción los gráficos que aparecen en los medios de comunicación y en las facturas de los servicios. Realmente, no utilizan los diseños y ejecución de pequeños proyectos o la recolección de información a través de la observación de hechos o situaciones.

Para la clase de estadística utiliza regularmente, el tablero y los libros de textos; algunas veces periódicos y revistas, láminas y otros materiales gráficos; nunca han utilizado programas o paquetes estadísticos, calculadoras, películas y videos. Consideran importantes las TICS en la enseñanza de la Estadística, sin embargo, manifiestan haber recibido poca formación sobre el uso de las TICS en el aula, y ninguna relacionada con la enseñanza de la estadística utilizando las TICS; están en disposición de asistir a sesiones de formación sobre el uso de las TICS.

Los docentes consideran importante los temas de estadística y señalan que dichos tópicos son evaluados en las Pruebas Saber. Los pocos temas desarrollados son escogidos tal como aparecen en los textos, no se organizan de acuerdo a las condiciones y limitaciones contextuales de los estudiantes, por lo tanto no promueven la utilización de estrategias de aprendizaje que se adaptan al interés del estudiante. En general, no articulan las temáticas de la estadística con las ciencias naturales, sociales u otras áreas. En la evaluación de los tópicos de estadística se considera actividades realizadas dentro del aula utilizando gráficos y tablas.

#### 4. Conclusiones.

Existen y han sido socializados los referentes curriculares y características de la evaluación. El MEN ha brindado todas las orientaciones pertinentes, acompañamiento y ha dotado de material didáctico a docentes y estudiantes, sin embargo, se presentan dificultades en cuanto al desarrollo de los contenidos estadísticos, algunas se relacionan a continuación:

- Falta de preparación de los profesores en la enseñanza de la estadística. Un gran número de profesores reconoce que necesitan dominar los conceptos básicos de la estadística para poderlos utilizar no sólo en el aula de clases, también en el contexto extraescolar.

- La enseñanza del Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos se deja para el final del programa, tal y como aparece en algunos texto. En el caso de las Escuelas Indígenas realmente no se contempla en la básica primaria, sólo se aborda en el grado 11º. con una intensidad de 1 hora semanal.

- En el evento que se aborden algunos tópicos del Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos, los mismos se desarrollan muy brevemente, de manera algorítmica y sin relación con otras áreas. De manera general, se omiten dichos conceptos por falta de tiempo.



- Los estudiantes de la básica primaria de las escuelas indígenas son evaluados en igual condiciones y con los mismos parámetros con que se evalúan los demás estudiantes del país.

- Se hace necesario la capacitación tipo Talleres a los docentes de las diferentes instituciones educativas del municipio de Valledupar en los contenidos contemplados en el Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos de la Básica Primaria. Así mismo, diseñar e implementar estrategias didácticas para la enseñanza de este pensamiento, tales como: guías didácticas, proyectos para desarrollar dentro y fuera del aula, estrategias metodológicas que utilizando las TICS.

**Investigaciones en curso y trabajos futuros.** Actualmente se adelanta una investigación con un estudiante de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Popular del Cesar en el Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de la estadística en el grado 5<sup>o</sup> utilizando Excel.

## Referencias

[1] Alsina, A. (2012). Estadística y Probabilidad en Educación Infantil. Revista Didácticas Específicas, número 7, pp. 4-22.

[2] Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación?. En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu, (Eds.) (2013). Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade Do Minho.

[3] Common Core State Standards Initiative CCSSI (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Recuperado el 29 de abril de 2013, de [http://www.corestandards.org/assets/CCSSI\\_Math%20Standards.pdf](http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)

[4] MAKU JOGUKI (2008). Ordenamiento Educativo del Pueblo Indígena Kankuamo. Recuperado el 31 de Octubre de 2013, de [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/articles-213863\\_archivo1.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/articles-213863_archivo1.pdf)

MEN (2015). Ministerio de Educación Nacional. Derechos Básicos de Aprendizaje DBA en Matemáticas. Bogotá. Colombia. <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/w3-article-349446.html>

[5] MEN (2015). Ministerio de Educación Nacional. Programa Todos a Aprender. Disponible en:  
<http://www.mineducacion.gov.co/1621/w3-propertyvalue-48336.html>

[6] MEN (2006). Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Primera Edición. Bogotá. Colombia.

[7] MEN (1998). Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá. Colombia.

[8] National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Para citar este artículo et al. 2016, Liliana Barón Amaris “Situación actual de la enseñanza de la estadística en el nivel de educación primaria en el municipio de Valledupar ” . Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>

## **Análisis sobre el desarrollo de núcleos problémicos en el área de matemáticas en las escuelas del municipio de Valledupar**

Analysis on the development of cores problémicos in the area of mathematics in schools of the municipality of Valledupar

Amalfi Galindo Ospino<sup>1</sup>, Liliana Patricia Barón Amaris<sup>2</sup>

Universidad Popular del Cesar - Colombia

<sup>1</sup>amalfigalindo@unicesar.edu.co, <sup>2</sup>lilianabaron@unicesar.edu.co

---

---

### **Resumen**

Los procesos para develar debilidades en lo que a educación con calidad se refiere, se desarrollan desde el análisis y síntesis de numerosas situaciones que reseñan cómo los problemas en el desarrollo de las competencias cognitivas en las instituciones de educación básica y media se fundamentan en debilidades a nivel curricular y muy seguramente estas son consecuencia de la ausencia de un modelo pedagógico estable, sin previa selección de núcleos formativos que actúen de cara a las necesidades institucionales y al contexto social y temporal que involucra la escuela.

La anterior realidad motivó el interés para plantear la presente investigación, a partir de la cual se va a observar el desempeño profesional y la creatividad del docente de matemáticas del municipio de Valledupar Cesar, para posteriormente generar algunos aportes y planteamientos que logren sugerir algunos cambios en los docentes de matemáticas en relación con la forma de enfocar, practicar, evaluar, y planificar los procesos de enseñanza de las matemáticas. Esto conduce posteriormente a reflexiones sobre la manera cómo se ha hecho hasta ahora, asumiendo la necesidad de buscar y determinar los factores que repercuten en estos y su relación con la utilización de las nuevas tecnologías, para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos.

El resultado de esta investigación, incorpora nuevos elementos, tanto a nivel curricular, metodológico, pedagógico y tecnológico a partir de la comprensión generada desde espacios de gestión curricular colectiva, a partir de la transformación, almacenamiento y uso de los conocimientos que el estudiante de la básica debe construir en el área de matemáticas conforme a los estándares curriculares teniendo como referente el uso de las tecnológicas para la gestión del conocimiento.

**Palabras claves:** Diseños curriculares, debilidades pedagógicas, gestión curricular, nivel básico, estándares curriculares, herramientas metacognitivas.

## **Abstract**

The processes to reveal weaknesses as far as quality education is concerned, are developed from the analysis and synthesis of many situations that outlines how the problems in the development of cognitive skills in primary and secondary education institutions and are based on weaknesses curricular level and most likely these are the result of the absence of a stable teaching model, without prior selection of training centers who act in the face of institutional needs and social context that involves school.

The above fact has prompted interest to raise the present investigation, from which it is to observe professional performance and creativity of teachers of mathematics of the municipality of Valledupar Cesar, also it aims to generate some contributions and approaches that achieve a change in mathematics teachers regarding how to approach, practice, evaluate and plan the teaching of mathematics, generating reflections on the way it has been done so far, assuming the need to seek and identify factors that impact in this and its relationship with the use of new technologies to achieve meaningful learning in students.

The result of this research, will incorporate new elements, both curricular, methodological, pedagogical and technological level from the understanding generated from spaces of collective curriculum management, in order to contribute to solving problems in education from the transformation, storage and use of knowledge that students must build basic math in the area under curriculum standards.

Keywords: curriculum design, pedagogical weaknesses, curriculum management, basic level, curriculum standards, metacognitive tools.

---

## **1. Introducción.**

Según informe sobre Debilidades Pedagógicas, Chamorro (2009), “es necesario la aplicación de la reingeniería curricular y la selección de contenidos y núcleos de formación, que respondan a las necesidades del campo laboral, no existe un proceso evaluativo consolidado... La evaluación continúa siendo un proceso coercitivo, manipulador y poco práctico en el sentido de obtener un efectivo y motivador aprendizaje”, dice el informe (pp.12-13).

En este sentido se hace necesario que la escuela involucre las experiencias vividas en el proceso educativo con el fin de que estas apunten hacia la construcción de un currículo acorde con las necesidades individuales de cada estudiante, con proposiciones que formulen relaciones entre diferentes aspectos de la realidad teórica, a partir de los cuales se generen interrogantes que alimenten el planteamiento de núcleos generadores de problemas, incorporando el componente tecnológico sin transgredir lo formal. Al respecto dice Morales (2011). .. “la capacidad didáctica de los diseños curriculares por núcleos problémicos reside

en la creatividad de la propuesta de aprendizaje; es decir, en la coherencia entre el medio, la mediación, los mediadores, las estrategias de aprendizaje y la propuesta de evaluación.

Con esta propuesta de investigación, se pretende que la escuela involucre las experiencias vividas en el proceso educativo con el fin de que estas apunten hacia la construcción de un currículo acorde con las necesidades individuales de cada entorno educativo actual, fortalecido en las tics.

El marco teórico de esta investigación se constituye en la descripción de ejes articuladores de los ciclos o campos de formación que se concretan en las diferentes disciplinas del conocimiento. En este sentido, es fundamental valorar el desempeño profesional y la creatividad del docente, como instrumento de avanzada, creativos, capaces de ejercer influencia en los resultados obtenidos por los alumnos y su responsabilidad por mejorar el proceso educativo, las técnicas, métodos y procedimientos didácticos, que apliquen para la realización de su labor pedagógica en el aula, y además que proporcionen elementos determinantes para hacer realidad el propósito de la acción pedagógica.

Los resultados obtenidos en la investigación van a permitir observar el desempeño profesional y la creatividad del docente de matemáticas del municipio de Valledupar Cesar, además los avances que se visualizan en la enseñanza de esta área a nivel de la básica, los requerimientos del proceso educativo y las pruebas externas que hacen en pro de mejorar la calidad educativa de los estudiantes. Todos estos insumos pretenden además, generar algunos aportes y planteamientos que logren un cambio en los docentes de matemáticas de básica primaria del municipio de Valledupar, en la forma de enfocar, practicar, evaluar, planificar los procesos de enseñanza de la matemática, generando reflexiones sobre la forma como se ha hecho hasta ahora, asumiendo la necesidad de buscar y determinar los factores que repercuten en este y su relación con la utilización de las nuevas tecnologías, para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos.

## **2. Planteamiento del problema.**

Varios estudios relacionados con el desempeño del docente de matemáticas, ha demostrado que existen una serie de factores o condiciones asociadas al desarrollo de su ejercicio, su dedicación, su creatividad y su didáctica, las cuales se relacionan con el nivel de dificultad, exigencias y características de las asignaturas orientadas hacia el desarrollo de núcleos problémicos que desequilibren su realidad o posición frente al entorno.

Frente a los anteriores argumentos surge la pregunta de investigación:

¿Cuáles deben ser los elementos a incorporar en el ejercicio docente, para que desde lo curricular, metodológico, pedagógico y tecnológico, se contribuya a resolver inconvenientes a nivel educativo a partir de la transformación, almacenamiento y uso de los conocimientos que el estudiante de la básica y la media deben construir en matemáticas?

### **3. Objetivos.**

Diseñar una estrategia metodológica fundamentada en el desarrollo de núcleos problémicos en el área de matemática de la escuela básica, de la ciudad de Valledupar, que incorpore nuevos elementos, tanto a nivel curricular como metodológico pedagógico y tecnológico a partir de la comprensión generada desde espacios de gestión curricular colectiva, y que contribuya a resolver inconvenientes a nivel educativo a partir de la transformación, almacenamiento y uso de los conocimientos por parte de los estudiantes, satisfaciendo sus necesidades principales

### **4. Justificación.**

El presente artículo aborda un tema importante dado que la universidad cumple ;una función social; que consiste en crear los conocimientos, y propagarlos, con el propósito de formar individuos más selectos por su cultura, capaces de desarrollar acciones formativas fundamentadas en la búsqueda de la verdad, y encaminada al servicio social.

En este orden de ideas, a través de este trabajo de investigación se articulan la docencia, la investigación y la extensión asumiendo la cultura de formación de formadores, en lo referente al quehacer de la docencia. La propuesta se desarrolló desde el análisis de documentos e instrumentos que evidencian las debilidades a nivel curricular, ya sea por la falta de actualización de los docentes o por la falta de control institucional en lo referente a la contextualización del currículo en las distintas áreas del saber, pero principalmente en las matemáticas; lo que invita a realizar una reestructuración curricular de cara a los adelantos tecnológico para el fortalecimiento de lo pedagógico y metodológico.

### **5. Marco teórico.**

#### **Aprendizaje basado en problemas.**

El Aprendizaje Basado en Problemas, según Barrows (1996) se define como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos” . Para Barrell, (1999) El ABP, es una estrategia de enseñanza/aprendizaje que intenta desplazar la concepción de la enseñanza basada predominantemente en el profesor como único responsable de transferir conocimientos y los estudiantes meros receptores pasivos de los mismos, hacia la identificación del estudiante como centro y responsable de su propio aprendizaje.

En orden de lo anterior, el docente está llamado a acudir a estrategias estructuradas, que le permitan al estudiante, incrementar sus potencialidades ayudándolo a incentivar su motivación de aprender, enfrentándolo a situaciones en las que tenga que utilizar su capacidad de discernir para llegar a la solución de problemas propios de su entorno.

Royer y Allan (1998), hacen referencia a la teoría desarrollada por Tolman y Barlett, la cual describe:

El ser humano almacena, recupera y procesa la información a través del estímulo que le llega, es decir, el mismo es un participante muy activo del proceso de aprendizaje. En consideración a lo anterior, es importante que el docente se familiarice con las tres teorías (la operante, la asociativa y la cognoscitiva) para que pueda usarlas en la práctica educativa como instrumentos valiosos para resolver problemas de aprendizaje<sup>1</sup>.

### **Estrategias de Motivación para la Enseñanza de la Matemática.**

Las estrategias motivacionales son consideradas como el grupo de las técnicas y recursos que debe utilizar el docente para potencializar el aprendizaje de la matemática logrando la satisfacción de las necesidades de aprendizaje del alumno.

En este sentido se requiere la creación de propuestas creativas que repercutan en el entusiasmo de parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas y sus áreas (Ryan et al., 2007; Chiu and Xihuaa, 2008). Lo que significa que el aprendizaje debe ser motivante y eficiente.

Sobre el particular, Roa (2007), afirma que el aprendizaje eficiente requiere, entre otras cosas, de la creación y mantenimiento de un ambiente que propicie el logro de los objetivos de la educación. Lo anterior significa que las instituciones educativas deberían proporcionar a la población estudiantil lugares óptimos donde se produzca un aprendizaje significativo. Lamentablemente no siempre es así y es común observar que muchas instituciones no cumplen con este principio, lo que justifica el desarrollo de investigaciones que al igual que esta, han propiciado al menos una iniciativa a nivel curricular y metodológico que invita a los docentes a convertir el aula de clase en un entorno generador de inquietudes, de necesidades de aprendizaje y de retorno permanente de acciones motivacionales.

En relación con la motivación y el aprendizaje, se han realizado varios estudios. Decharms (1984) puso especial énfasis en aquello que él denomina motivación intrínseca como un poderoso factor de potenciación del aprendizaje. Algunos estudiosos sobre el tema de la motivación en la enseñanza de la matemática y la administración, afirman que la

---

<sup>1</sup> Martínez, Nury. Universidad de los Andes. (1998).

mayoría de las investigaciones sobre este particular son de tipo documental y que además en ellas se reflejan los enfoques, criterios, conceptualizaciones, reflexiones, conclusiones y recomendaciones que realmente consiste en la mera caracterización de un fenómeno o situación indicando los rasgos más peculiares o diferenciadores, sin que dichas investigaciones generen una propuesta de cambio radical en los procesos en el aula.

En términos generales se puede afirmar que a través de la motivación, el docente tiene a su disposición un gran número de estrategias que le conducen a ayudar a lograr un verdadero aprendizaje en el alumno.

Sobre este particular, los autores Good y Brophy (1998), afirman que los docentes en el proceso de enseñanza deben lograr varios objetivos motivacionales aprendizaje:

1. Crear un ambiente de aprendizaje favorable en el aula, modelando la motivación para aprender, esto ayuda a minimizar la ansiedad haciendo que los alumnos logren un mejor desempeño en sus actividades.
2. Los docentes necesitan estimular la motivación para lograr aprender en conexión con contenidos o actividades específicas proyectando entusiasmo, induciendo curiosidad, disonancia, formulando objetivos de aprendizaje y proporcionando retroalimentación informativa que ayude al alumno a aprender con conciencia sensatez y eficacia.
3. El docente debe ser modelador de los aprendizajes, para esto debe proporcionar a los educandos, las herramientas que le hagan valorar su propio aprendizaje, viéndolo el mismo como un desarrollo recompensante y de autorrealización que les enriquecerá su vida, trayendo consigo satisfacciones personales.
4. Explicar y sugerir al estudiante que se espera que cada uno de ellos disfrute el aprendizaje.
5. Ejecutar las evaluaciones, no como una forma de control, sino como medio de comprobar el progreso de cada alumno.
6. Ayudar al estudiante adquirir una mayor conciencia de sus procesos y diferencias referente al aprendizaje, mediante actividades de reflexión, estimulando la conciencia metacognitiva de los alumnos.



## **La Metacognición.**

La metacognición como herramienta de educación, se entiende como el control de la cognición, (Flevel 1976 ), en (Vargas y Arbeláez, 2002), la define como el enfoque metacognitivo, el cual se refiere al grado de conciencia o conocimiento que los individuos poseen sobre su forma de pensar (procesos y eventos cognitivos). Chadwick (1985 en Vargas y Arbeláez, 2002) por su parte, denomina metacognición a la conciencia que una persona tiene acerca de sus procesos y estados cognitivos.

El diseño de las herramientas cognitivas, posibilitan la necesidad del uso canales de comunicación efectivos, que potencialicen el desarrollo cultural y social de los sujetos actores

como proceso bilateral, para lo cual se requiere de posturas integracionistas abiertas, participativas y reconstructivas, incorporando las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, a partir de las cuales se desarrollen de manera efectiva todas y cada una de las etapas del proceso.

Con lo anteriormente dicho, se requiere que los procesos de motivación en el aula para la enseñanza de las matemáticas en cualquiera de los niveles de formación requiere no solo un cambio de estrategias metodológicas y de procesos sino también de la incorporación de nuevas herramientas cognitivas y tecnológicas, que garanticen no solo el aprendizaje en los estudiantes, sino que dé respuestas a sus inquietudes motivacionales.

## **6. Metodología.**

### **6.1. Tipo de investigación.**

La investigación desarrollada es de tipo cualitativa y se ubica dentro del campo de la investigación etnográfica interpretativa.

### **6.2. Técnicas de recolección de la información.**

El método para la recolección de la información fue la encuesta aplicada. Se seleccionó una muestra representativa de los docentes de matemáticas del Municipio de Valledupar para el conjunto del estudio a realizar, utilizando un muestreo aleatorio simple en la base de datos de los docentes del Municipio de Valledupar

### 6.3. Población y muestra.

Para el cálculo de la muestra se utilizó el Muestreo Aleatorio Simple para poblaciones finitas, con un nivel de confianza de 90%, mediante la siguiente fórmula:

$$n = \frac{Z^2 pqN}{e^2 (N - 1) + Z^2 pq}$$

Donde:

n = Número de elementos de la muestra.

N = Número de elementos del universo.

p = Probabilidad con las que se presenta

q = Probabilidad

Z<sup>2</sup> = Valor crítico correspondiente al nivel de confianza elegido.

E = Margen de error o de imprecisión permitido.

$$n = \frac{(1.645)^2 (0.5)(0.5)(169)}{(0.10)^2 (169 - 1) + (1.645)^2 (0.5)(0.5)}$$

$$n = 49$$

En las 49 instituciones educativas se aplicó un instrumento tipo encuesta y se obtuvo los siguientes resultados:

### 7. Resultados de la investigación.

Los datos obtenidos fueron utilizados para la realización de dos tipos de análisis:

- **Análisis Descriptivos;** con el propósito de conocer cómo los docentes de matemáticas del Municipio de Valledupar contextualizan los contenidos programáticos hacia la construcción de núcleos generadores de problemas en el aula.

- **Análisis Correlacional e inferencial;** con el fin de hacer un estudio predictivo de los resultados obtenidos por los estudiantes de la básica y de la media cuando se analizan situaciones matemáticas contextualizadas

### 8. Análisis e interpretación de los resultados.

Para esta investigación se diseñó y aplicó un instrumento que permitió recoger información general de los docentes, relacionados con su perfil profesional y opiniones acerca de la forma cómo de los docentes orientan el proceso enseñanza de las matemáticas. En relación con los resultados obtenidos del instrumento aplicado se tuvo la siguiente información:

- Perfil profesional de los encuestados:

Perfil profesional de los docentes	Porcentaje de docentes
Título de Pregrado	60%
Título de especialistas	18%
Título de maestría	9%
Otro título	13%

- Tiempo de antigüedad:

Experiencia de los docentes	Porcentaje de docentes
Menos de 10 años	18.1%
Entre 10 y 15 años	0,0%
Entre 15 y 20 años	36,4%
Más de 20 años de experiencia	45,5%

- En relación con las planeaciones de la asignatura:

Un 70 % planean en forma grupal y el 30 % planean en forma individual

- En relación con los recursos utilizados para el desarrollo de la actividad docente:

Rango	Tablero	Libros de texto	Guías	Libros Electrónicos	Internet	Software	Películas	Videos	Tutoriales	Web sites	Otras
Alto	90%	95%	72%	0	0	0	14%	14%	18%	0	25%
Medio	10%	5%	28%	18%	46%	28%	14%	14%	46%	28%	25%
Bajo	0	0	0	82%	54%	72%	72%	72%	36%	72%	50%

- Estandarización de la planeación; respeto a este tema en particular se les preguntó a los docente encuestados sobre si las situaciones que propone en clase conforme los

establecido en los estándares curriculares apuntan hacia el desarrollo del pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio, variacional.

Consideraciones	Porcentajes	
	si	no
Pensamiento Numérico	100%	0%
Pensamiento Espacial	90%	10%
Pensamiento Métrico	100%	0%
Pensamiento Aleatorio	63%	37%
Pensamiento Variacional	63%	37%

•Proceso Evaluativo; se pretendió conocer la forma de evaluación de los docentes en el área de matemáticas.

Consideraciones	Porcentajes	
	si	no
Evaluación Individual	100%	0%
Evaluación grupal	100%	0%
Trabajo colaborativo	90%	10%
Evaluación abierta	63%	37%
Evaluación cerrada	36%	64%
Evaluación tipo prueba saber pro	9%	91%
Evaluación por proyectos	18%	82%
Evaluación por estudio de casos	9%	91%

• Planeación:

Consideraciones	Porcentaje de docentes		
	Alto	Medio	Bajo
Presenta los temas a partir de núcleos generadores de problemas	55%	45%	0%
Reconoce y relaciona el valor del contexto en la formulación de situaciones en matemáticas	55%	45%	0%
Al realizar la planeación articula información con docentes de las distintas áreas de la institución	9%	91%	0%
Reconoce y utiliza el entorno para la formulación de acciones en el aula	36%	63%	0%
Clasifica los ejes temáticos de acuerdo con los estándares curriculares y los procedimientos matemáticos que se deben desarrollar en el área.	73%	27%	0%

## **9. Conclusiones y recomendaciones.**

La presente investigación permite concluir que:

- El 60% de los docentes aún se encuentran con título de pregrado, sin estudios de especialización en el área específica.
- El 45,5% de los docentes encuestados tienen una amplia experiencia en el ejercicio de su profesión, sin embargo su experiencia no garantiza la actualización en lo que a estrategias metodológicas para la enseñanza se requiere.
- La mayoría de los docentes planean en forma grupal y por áreas, sin embargo no existe la transversalidad conceptual.
- En relación con los recursos utilizados para el desarrollo de su actividad docente, la mayoría de los docentes utilizan en un alto rango: el tablero, los libros de textos y las guías para el desarrollo de las actividades de aprendizaje.
- El uso de las TIC, hace parte de un sofisma en la mayoría de los docentes y se reúsan a incorporarlas en el desarrollo de los proceso en el aula.
- En relación con la estandarización en la planeación para el desarrollo de los pensamientos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional; la mayoría de los docentes trabaja más en función del desarrollo de los pensamientos: numérico, métrico y espacial, dejando de lado el desarrollo del pensamiento aleatorio y variacional.
- Se aprecian incongruencias entre lo que los profesores manifiestan respecto a las estrategias de enseñanza y al tipo de evaluación que aplican a sus estudiantes.
- Los docentes encuestados no relacionan las estrategias pedagógicas para la enseñanza con la planeación del proceso educativo, ni tampoco las vislumbran como un componente de una actividad más general dentro de su diario hacer.

- Los docentes encuestados se han basado en el desarrollo de las competencias del hacer y están dejando de lado, las competencias del ser y del saber hacer en contexto.

## **10. Recomendaciones**

Para desarrollar una propuesta pedagógica en la que se visionen nuevos escenarios de construcción académica, se requiere la formulación de núcleos generadores de problemas que vinculen no solo el saber específico del área afín, sino también hechos históricos, culturales, sociales y de responsabilidad ciudadana en un marco holístico.

Lo anteriormente dicho requiere de algunos procesos mínimos por parte del docente que garanticen la construcción de dichos escenarios, en razón a esto; el docente debe:

- Planear la enseñanza; la planeación es el punto de partida para que el estudiante logre identificar el problema objeto de estudio. Esta planeación debe estar ajustada a los estándares curriculares emitidos por el MEN, y además acorde con las necesidades del entorno, las necesidades individuales de los estudiantes y también conforme a las necesidades de la familia.
- Garantizar al estudiante el derecho a tener intereses diferentes sobre el análisis de un contexto específico, dado que ello fortalece el carácter interpretativo de la historia, y garantiza la construcción del hecho histórico que abarca la situación problema.
- Provocar el análisis de relaciones rigurosas entre lo estudiado con otra área del saber, de manera que se logre que los estudiantes: interpreten, argumenten, comparen, propongan y elaboren su propio discurso, bajo criterios de cierta rigurosidad y espíritu crítico.
- Posibilitar el uso de las tecnologías en el aula y fuera de ellas de manera que el estudiante tenga acceso a toda la información que el internet proporciona en la actualidad y de esa manera posibilitar el análisis crítico respecto a las distintas posturas de los autores.
- Procurar que la institución donde labora genere espacios y mecanismos de reflexión y diálogo entre profesores docentes pares en los que se aborden temas relacionados con el currículo y los procesos de transformación del mismo.
- Participar de procesos de actualización y profundización en temas relacionados con las tecnologías.

## Referencias.

- [1] Arteaga, E. 2002. Calidad y creatividad en Educación Matemática. En XiximNº .
- [2] Astolfi, J. P. (2001). Conceptos claves en la didáctica de las disciplinas. Serie Fundamentos nº 17. Colección investigación y enseñanza. Sevilla, España: Díada editora S.l
- [3] Giménez, J, Servat, J. y Sequera, E. 2003. Formación de futuros docentes en matemáticas y tareas prácticas en red. En Congreso de Multimedia Educativa, 2003.Barcelona.
- [4] Godino, J. Batanero y Font, V. 2003. Matemática y su didáctica para maestros. Documento en internet. Consultado el 02-02-04. Disponible en:<http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/fundamentos.pdf>.
- [5] Marcelo, C. (2002). Aprender a enseñar para la sociedad del conocimiento. Education policy Analysis Archives, 10(35). Disponible en <http://epaa.asu.edu/epaa>. Recuperado en marzo 2006.
- [6] Ortega Y Gasset, Jose. Prólogo A Herbart. "Pedagogía General Derivada Del Fin De La Educación". Citado Por Luis Miguel Saravia. "El desempeño del Maestro: Una reflexión desde la Acción".
- [7] Panqueva, J. (2002). Diseño Curricular. Recuperado de <http://integral.objectis.net/Educacion/SeminarioCurriculoPanqueva/>

Para citar este artículo: Amalfi Galindo Ospino & Liliana Patricia Barón Amaris 2016, "Análisis sobre el desarrollo de núcleos problemáticos en el área de matemáticas en las escuelas del municipio de Valledupar". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>