Universidad del Atlántico

MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de matemáticas
Vol 10 | No 1 (2023) p20-33

Research Article

Aplicación del Algebra primordial a la ecuación diofántica

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = k.$$

Application of Primordial Algebra to the Diophantine Equation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = k$$

[1]Eduardo Jose Acuña Tarazona[Φ], [2]*Paul FranciscoMarrero Romero*[†]

Abstract.
The following article seeks to show the relationship between the integer matrix and the Diophantine equations, specifically the three cube problem, proposing a classification system for the identification of results.
Keywords. Pattern, Sequence, Diophantine, Sum of 3 cubes.

Resumen. El siguiente artículo busca mostrar la relación entre la matriz entera y las ecuaciones diofánticas, específicamente el problema de los tres cubos, proponiendo un sistema de clasificación para la identificación de resultados.
Palabras clave. Patrón, Secuencia, Diofántica, Suma de 3 cubos

1. Introducción:

La matriz entera es una extensión de la matriz natural "LÓPEZ J." (2015) [1], en el cual define una serie de ecuaciones que nos permiten determinar un numero en una matriz natural de "j" columnas, donde $j \equiv modulo\ (n)$.

En el caso de la matriz entera o E_{ϕ}^{9}, el modulo es 9, el cual permite un mejor ordenamiento de los enteros por un conjunto de congruencias entre ellos que se dan en este ajuste, además que nos permite trabajar también con los enteros negativos, la relación que se forma entre los entero crea un algebra primordial "TARAZONA, FLORES, MARRERO." (2021) [2]. Que simplifica las operaciones al demostrar la existencia de una serie de grupos algebraicos para cada combinación de operaciones. En el caso de la

Date: Received: 05 10 2023; Accepted: 23 12 2023.
Author https://orcid.org/0000-0002-4023-2434.
Author https://orcid.org/0000-0003-4219-2074.

matriz entera o E_{ϕ}^{9}, el modulo usado es 9, el cual permite un mejor ordenamiento de los números enteros en conjuntos congruentes bajo el modulo 9. Además, este tipo de arreglo nos permite trabajar con los enteros negativos. Al estudiar las relaciones que se forman entre estos conjuntos de enteros congruentes con el módulo 9, vemos como se abre la posibilidad de usar una algebra primordial “TARAZONA, FLORES, MARRERO.” (2021) [2], con el objetivo de simplificar el uso de operaciones algebraicas entre los elementos pertenecientes a los conjuntos mencionados. Esta algebra se encuentra sustentada en la existencia del grupo primal.

Es también importante denotar el uso de números negativos pues para el problema que se va a tratar en este artículo están muy presentes, aunque los números negativos no son comúnmente visto como un enigma, es importante resaltar que entender bien el comportamiento aritmético es la base para comprender problemas complejos.

Gracias a todas estas propiedades podemos realizar análisis profundos a problemas complejos, para este articulo usaremos el caso particular del problema de los 3 cubos como sujeto de nuestro análisis, con el propósito de demostrar que el Algebra Primordial si puede predecir resultados para todo tipo de operaciones.

2. Conjunto de la Matriz entera E_{ϕ}^{9}

La definición de la Matriz entera [2], nos dice que toma en cuenta todos los números enteros incluyendo los negativos, en el mismo artículo se menciona un sistema de clases que ordenan todos los elementos enteros por características en común, una de ellas es su suma digital (Z_{ϕ}) , pero lo suma digital no es igual para los positivos que para los negativos, Marrero P. Acuña E. (2021) [5]. Como se muestra a continuación:

$\{\mathbb{Z}^{+}\}$	$\{\mathbb{Z}^{-}\}$
$Z_{\phi} = v - 9\left(\left\lfloor \frac{v-1}{9} \right\rfloor\right)$	$Z_{-\phi} = v - (-9)\left(\left\lfloor \frac{v+1}{-9} \right\rfloor\right)$
Función Suma digital, mod 9 para enteros positivos. 2.1. ecuación.	Función Suma digital, mod 9 para enteros negativos. 2.2. ecuación.

Tabla: 1

Estas ecuaciones son la forma más simple de clasificar los números en Base 10, también porque es la más coherente, aunque en el álgebra modular existen muchas clases referentes a los módulos que sean congruentes, en base 10 el módulo 9, nos permite agrupar todos los enteros en 9 clases positivas y 9 negativas unidos al 0.

3. i-coordenadas en la matriz entera E_{ϕ}^{9}

Las i-coordenadas de una matriz son las filas que le corresponde a cada número entero dentro de la misma [1], junto con la columna se puede descomponer un número primal [2] en un numero entero.
Ahora se muestra como calcular la i fila de un numero entero:

1) Ecuación 1.

$$i_{v} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{9} + 1 \right\rfloor & si\ n \neq 9c,\ para\ \ c \in \mathbb{Z}^{+} \\ \frac{n}{9}\ si\ n = 9c, & para\ \ c \in \mathbb{Z}^{+} \end{cases}$$

3.1 Ejemplo:

$$154 = i_{(154)}$$
$$i_{(154)} = \left\lfloor \frac{154}{9} + 1 \right\rfloor$$
$$i_{(154)} = 18$$

Si se desea verificar también se puede usar la siguiente formula:

2) Ecuación 2. $i_n = \frac{(n-j)}{9} + 1$

4. Conjetura Primordial: Matriz E_{ϕ}^{9}

En Algebra Primal (2021) [2], se presenta el Teorema de Acuña, que dice:

$Z_{\phi a} \odot Z_{\phi b} = Z_{\phi c} \cong v_a \odot v_b = v_c$ (mod 9).

A partir de dicho enunciado podemos conjeturar [8]:

Si el Teorema de Acuña se cumple, entonces $\exists\, Z_a, Z_b$ *tal que* $Z_a \odot Z_b = k$, *para un* $k \neq 0$ *fijo*.

Como se describe en el preprint [8] la conjetura primal dice que para toda operación o ecuación que involucre enteros, siempre que el sistema primal tenga un resultado viable, existe una solución en los enteros dentro de la o las clases resultantes para la ecuación, así el resultado sea desconocido la conjetura indica que existe y en que clase o clases existe.

Esta conjetura en su forma general implicaría que, dada las condiciones, siempre existirán resultados enteros en mod 9, para una base 10, lo cierto es que es más complejo que esa simple afirmación, pues también existen condiciones en el resultado para que esta sea verdad, así que lo más probable es que esta conjetura sea solo validad en ciertas condiciones como el problema de los 3 cubos como se tratara de exponer en este artículo.

5. Cálculo de coordenadas-i en una suma:

Ya con todo lo anterior expuesto procedemos a mostrar de manera aplicada como calcular las coordenadas de un número que es resultado de una suma.

Para un

$Z^{*}_{i^*j^*} = Z_{ij} + Z'_{i'j'} \leq 9_{i^*j^*}$

Entonces

$$i^* = (i + i')$$

5.1. Demostración:

Sea

$$Z^{*}_{i^*j^*} = 9(i^* - 1) + j^*$$

Por hipótesis sabemos que:

$$Z^{*}_{i^*j^*} = Z_{ij} + Z'_{i'j'}$$

Podemos justificar que

$$\begin{aligned} 9(i^* - 1) + j^* &= 9(i - 1) + j + 9(i' - 1) + j' \\ &= 9i - 9 + j + 9i' - 9 + j' \\ &= 9i + 9i' + j + j' - 18 \\ &= 9(i + i') + j + j' - 18 \end{aligned}$$

Luego de acuerdo al teorema de acuña tenemos que $j^* = j + j'$ por consiguiente

$$\begin{aligned} 9(i^* - 1) &= 9(i + i') + j + j' + j^* - 18 \\ 9i^* - 9 &= 9(i + i') - 18 \\ 9i^* - 9 &= 9(i + i') - 9 \\ i^* &= 9(i + i') - 1 \end{aligned}$$

Si $Z_{ij} + Z'_{i'j'} \geq 10$ *la suma de coordenadas sera de la siguiente forma*: $i^* = 9(i + i')$

5.2. Ejemplo:

$$20 + 99 \equiv 2_{(3,2)} + 9_{(11,9)}$$

$$2_{(3,2)} + 9_{(11,9)} = 2_{((3+11)-1,2)}$$
$$= 2_{(14,2)} \equiv 119$$

Si buscáramos las coordenadas $6_{(4,6)}$, observaríamos que corresponden con el resultado 33, que es el mismo obtenido mediante el cálculo de las coordenadas y el numero primal.
Este proceso es así con todos los enteros para la suma, no importa el tamaño del número, a continuación, se presentarán unas tablas que determinan la forma de las operaciones suma y resta para las i-coordenadas.

6. Construcción de tablas aritméticas para las i-coordenadas. (suma y resta)

Con estas tablas se pretende simplificar, el método de cálculo de las coordenadas donde obviaremos la suma de columnas y nos concentraremos en las iteraciones de las filas, en ellas también se evidencian un patrón cerrado determinado que las combinaciones posibles son limitadas a dichas tablas.

Para simplificar la notación en las tablas usaremos:

$$Z_y$$

Donde "y" puede ser:

$$\hat{y} = i + i'$$
$$\check{y} = |i - i'|$$

Cada una representa la operación de suma y resta respectivamente.
Tabla de ordenamiento de la tabla i-coordenadas para la suma.

+	1_{ϕ}	2_{ϕ}	3_{ϕ}	4_{ϕ}	5_{ϕ}	6_{ϕ}	7_{ϕ}	8_{ϕ}	9_{ϕ}
1_{ϕ}	$2_{\hat{y}-1}$	$3_{\hat{y}-1}$	$4_{\hat{y}-1}$	$5_{\hat{y}-1}$	$6_{\hat{y}-1}$	$7_{\hat{y}-1}$	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$
2_{ϕ}	$3_{\hat{y}-1}$	$4_{\hat{y}-1}$	$5_{\hat{y}-1}$	$6_{\hat{y}-1}$	$7_{\hat{y}-1}$	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$
3_{ϕ}	$4_{\hat{y}-1}$	$5_{\hat{y}-1}$	$6_{\hat{y}-1}$	$7_{\hat{y}-1}$	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$
4_{ϕ}	$5_{\hat{y}-1}$	$6_{\hat{y}-1}$	$7_{\hat{y}-1}$	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$	$4_{\hat{y}}$
5_{ϕ}	$6_{\hat{y}-1}$	$7_{\hat{y}-1}$	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$	$4_{\hat{y}}$	$5_{\hat{y}}$
6_{ϕ}	$7_{\hat{y}-1}$	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$	$4_{\hat{y}}$	$5_{\hat{y}}$	$6_{\hat{y}}$
7_{ϕ}	$8_{\hat{y}-1}$	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$	$4_{\hat{y}}$	$5_{\hat{y}}$	$6_{\hat{y}}$	$7_{\hat{y}}$
8_{ϕ}	$9_{\hat{y}-1}$	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$	$4_{\hat{y}}$	$5_{\hat{y}}$	$6_{\hat{y}}$	$7_{\hat{y}}$	$8_{\hat{y}}$
9_{ϕ}	$1_{\hat{y}}$	$2_{\hat{y}}$	$3_{\hat{y}}$	$4_{\hat{y}}$	$5_{\hat{y}}$	$6_{\hat{y}}$	$7_{\hat{y}}$	$8_{\hat{y}}$	$9_{\hat{y}}$

Tabla: 2

6.1. Tablas de ordenamiento de i-coordenadas para la resta.

En el caso de la resta, tenemos dos tablas, debido a la propiedad de la resta de ser no conmutativa, por lo tanto ordenamos en una tabla los resultados positivos y en otra paralela los resultados negativos de la resta, es importante poder comprender este apartado, pues de no hacerlo no será posible comprender los cálculos que se efectuaran más adelante, los números negativos se comportan de manera paralela a los positivos por esta razón aunque sean parte de los enteros, es mejor tratarlos de forma independiente con su propio sistema de clases y congruencias.
En esta tabla se exponen los resultados de una resta convencional entre dos números enteros positivos, los minuendos son las filas y los sustraendos son las columnas, lo que está adentro son los restos resultantes.

-	1_{ϕ}	2_{ϕ}	3_{ϕ}	4_{ϕ}	5_{ϕ}	6_{ϕ}	7_{ϕ}	8_{ϕ}	9_{ϕ}
1_{ϕ}	$9_{\check{y}}\ o\ 0$	$1_{\check{y}+1}$	$2_{\check{y}+1}$	$3_{\check{y}+1}$	$4_{\check{y}+1}$	$5_{\check{y}+1}$	$6_{\check{y}+1}$	$7_{\check{y}+1}$	$8_{\check{y}+1}$
2_{ϕ}	$8_{\check{y}}$	$9_{\check{y}}\ o\ 0$	$1_{\check{y}+1}$	$2_{\check{y}+1}$	$3_{\check{y}+1}$	$4_{\check{y}+1}$	$5_{\check{y}+1}$	$6_{\check{y}+1}$	$7_{\check{y}+1}$
3_{ϕ}	$7_{\check{y}}$	$8_{\check{y}}$	$9_{\check{y}}\ o\ 0$	$1_{\check{y}+1}$	$2_{\check{y}+1}$	$3_{\check{y}+1}$	$4_{\check{y}+1}$	$5_{\check{y}+1}$	$6_{\check{y}+1}$
4_{ϕ}	$6_{\check{y}}$	$7_{\check{y}}$	$8_{\check{y}}$	$9_{\check{y}}\ o\ 0$	$1_{\check{y}+1}$	$2_{\check{y}+1}$	$3_{\check{y}+1}$	$4_{\check{y}+1}$	$5_{\check{y}+1}$

5_ϕ	$5_{\check{v}}$	$6_{\check{v}}$	$7_{\check{v}}$	$8_{\check{v}}$	$9_{\check{v}}\ o\ 0$	$1_{\check{v}+1}$	$2_{\check{v}+1}$	$3_{\check{v}+1}$	$4_{\check{v}+1}$
6_ϕ	$4_{\check{v}}$	$5_{\check{v}}$	$6_{\check{v}}$	$7_{\check{v}}$	$8_{\check{v}}$	$9_{\check{v}}\ o\ 0$	$1_{\check{v}+1}$	$2_{\check{v}+1}$	$3_{\check{v}+1}$
7_ϕ	$3_{\check{v}}$	$4_{\check{v}}$	$5_{\check{v}}$	$6_{\check{v}}$	$7_{\check{v}}$	$8_{\check{v}}$	$9_{\check{v}}\ o\ 0$	$1_{\check{v}+1}$	$2_{\check{v}+1}$
8_ϕ	$2_{\check{v}}$	$3_{\check{v}}$	$4_{\check{v}}$	$5_{\check{v}}$	$6_{\check{v}}$	$7_{\check{v}}$	$8_{\check{v}}$	$9_{\check{v}}\ o\ 0$	$1_{\check{v}+1}$
9_ϕ	$1_{\check{v}}$	$2_{\check{v}}$	$3_{\check{v}}$	$4_{\check{v}}$	$5_{\check{v}}$	$6_{\check{v}}$	$7_{\check{v}}$	$8_{\check{v}}$	$9_{\check{v}}\ o\ 0$

Tabla: 3, para soluciones positivas

En esta tabla igualmente el minuendo son las filas y el sustraendo son las columnas.

+	-1_ϕ	-2_ϕ	-3_ϕ	-4_ϕ	-5_ϕ	-6_ϕ	-7_ϕ	-8_ϕ	-9_ϕ
1_ϕ	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$	$-6_{\check{v}}$	$-5_{\check{v}}$	$-4_{\check{v}}$	$-3_{\check{v}}$	$-2_{\check{v}}$	$-1_{\check{v}}$
2_ϕ	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$	$-6_{\check{v}}$	$-5_{\check{v}}$	$-4_{\check{v}}$	$-3_{\check{v}}$	$-2_{\check{v}}$
3_ϕ	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$	$-6_{\check{v}}$	$-5_{\check{v}}$	$-4_{\check{v}}$	$-3_{\check{v}}$
4_ϕ	$-3_{\check{v}+1}$	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$	$-6_{\check{v}}$	$-5_{\check{v}}$	$-4_{\check{v}}$
5_ϕ	$-4_{\check{v}+1}$	$-3_{\check{v}+1}$	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$	$-6_{\check{v}}$	$-5_{\check{v}}$
6_ϕ	$-5_{\check{v}+1}$	$-4_{\check{v}+1}$	$-3_{\check{v}+1}$	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$	$-6_{\check{v}}$
7_ϕ	$-6_{\check{v}+1}$	$-5_{\check{v}+1}$	$-4_{\check{v}+1}$	$-3_{\check{v}+1}$	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$	$-7_{\check{v}}$
8_ϕ	$-7_{\check{v}+1}$	$-6_{\check{v}+1}$	$-5_{\check{v}+1}$	$-4_{\check{v}+1}$	$-3_{\check{v}+1}$	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$	$-8_{\check{v}}$
9_ϕ	$-8_{\check{v}+1}$	$-7_{\check{v}+1}$	$-6_{\check{v}+1}$	$-5_{\check{v}+1}$	$-4_{\check{v}+1}$	$-3_{\check{v}+1}$	$-2_{\check{v}+1}$	$-1_{\check{v}+1}$	$-9_{\check{v}}\ o\ 0$

Tabla: 4, para soluciones negativas

La iteración que procede a dar dos resultados ocurre cuando dos clases iguales se restan, la explicación a este fenómeno de congruencias está en el capítulo 6.2.2, caso 2 de "Tarazona, Flores, Marrero. (2021)". [2]; Otra acotación importante que siempre se tiene que tener en cuenta, es que el resultado de una resta primal depende del tamaño que representa, esto se explica en el mismo capítulo anteriormente mencionado, es la razón por la cual, en una resta primal, si se desconocen los tamaños de los números representantes puede haber dos posibles resultados.

6.2. Ejemplo:

Supongamos que tenemos la siguiente operación primal:

$$2_\phi - 8_\phi = ?$$

Con aritmética básica supondríamos que la respuesta es un -6_ϕ pero la resta no es tan intuitiva como la suma.

Antes de exponer los casos usaremos la notación $\bar{\bar{Z}}_\phi$ cuando en la operación queramos señalar el numero con el mayor valor absoluto.

- Caso 1: cómo podemos ver en la tabla 3, la resta de $2_\phi - 8_\phi = 3_\phi$, esto es cierto para todos los casos donde $|2_\phi| > |8_\phi|$ veamos los ejemplos:

$\bar{\bar{2}}_\phi = 29$ y $8_\phi = 17$, entonces la resta aritmética seria

$$29 - 17 = 12 \rightarrow \bar{\bar{2}}_\phi - 8_\phi = 3_\phi$$

Lo mismo puede ser:

$$20 - 17 = 3 \rightarrow \bar{\bar{2}}_\phi - 8_\phi = 3_\phi$$

Utilizando el complemento modular podemos resolver estos casos de manera más simple:

$$(Z_{a\phi} - Z_{b\phi}) + 9 = Z_{c\phi}$$

Aplicándolo al mismo caso obtenemos el resultado.

$$(\bar{\bar{2}}_\phi - 8_\phi) + 9 = 3_\phi$$

Caso 2: donde el $|2_\phi| < |8_\phi|$

$$2 - 17 = -15 \rightarrow 2_\phi - \bar{\bar{8}}_\phi = -6_\phi$$

Correspondiendo a la **tabla 4** donde se expresan los resultados negativos.

7. Aplicación del Algebra primordial para el cálculo del Problema de los 3 cubos.

El álgebra primordial puede ser utilizado para cualquier problema que involucre enteros y que no puede ser demostrado por inducción, ya que nos muestra las posibles clases resultantes, a través del análisis de las mismas al ser operadas.

El problema de los 3 cubos es un excelente ejemplo de cómo aplicar el álgebra primordial, debido a su grado de complejidad a la hora de realizar cálculos, al tener las clases de los cubos.

7.1. Conjunto de cubos congruentes mod 9.

<u>Definición</u>. Sea el conjunto $C = [-9, -8, -1, 1, 8, 9]$, de donde $C \in \mathbb{Z}$, el conjunto cuyos 6 elementos representan a los únicos valores primales obtenidos luego de elevar al cubo a cualquier número entero.

7.2. Funciones generadoras $3n + m$.

<u>Definición 0</u>. Sea f la función generadora tal que, $f(n) = (3n + m)^3$, con n, m enteros y $m \in \{-3, -2, -1, \ 1, \ 2, \ 3\}$ de donde:

$$f(n) \equiv c \ (mod\ 9) \ \ para\ un\ c \in C.$$

7.3. Casos específicos $(3n + m)$

<u>Definición 1</u>. Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) \begin{cases} m^3, \quad si \quad n = 0 \\ 3n + m \ / \ 1 \le m \le 3, \qquad si \ \ n > 0 \\ 3n + m \ /-3 \le m \le -1, si \ \ n < 0 \end{cases}$$

<u>Definición 2</u>. Para $n > 0$ tenemos que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Por lo tanto las funciones generadoras $3n + m$ tienen la forma:

$$f(n) = (3n + 1)^3 \equiv 1 \ \ (mod \ \ 9)$$
$$f(n) = (3n + 2)^3 \equiv 8 \ \ (mod \ \ 9)$$
$$f(n) = (3n + 3)^3 \equiv 9 \ \ (mod \ \ 9)$$

En los caso de funciones $3n + 1$ donde $n < 0$, tenemos que $f: \mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}^-$

$$f(n) = (3n - 1)^3 \equiv -1 \ \ (mod \ \ 9)$$
$$f(n) = (3n - 2)^3 \equiv -8 \ \ (mod \ \ 9)$$
$$f(n) = (3n - 3)^3 \equiv -9 \ \ (mod \ \ 9)$$

7.4. Propiedad de potencias cubicas en números enteros.

<u>Propiedad.</u>

Si un número entero no-negativo v esta elevado al cubo, entonces el resto resultante de dividirlo por 9 será tal que:

$rem(v^3, 9) \equiv c \ \ (mod\ 9)$, donde $c \ \in \boldsymbol{C}$.

Demostración:

Tenemos que $rem(v^3, 9) \not\equiv c \ \ (mod\ 9)$. Ahora por teorema de la división y asumiendo la hipótesis propuesta, podemos definir nuestro entero v en la forma $v = 9q + rem\ (v, 9)$, para cualquier entero q. Luego, elevando nuestro entero v al cubo tendremos que:

$$v^3 = (9q + rem\ (v, 9))^3$$
$$= 729q^3 + 243q^2 rem\ (v, 9) + 27q[rem\ (v, 9)]^2 + [rem\ (v, 9)]^3$$
$$= 9(81q^3 + 27q^2 rem\ (v, 9) + 3q[rem\ (v, 9)]^2) + [rem(v, 9).$$

Luego como $v, q \in \mathbb{Z}$ y nuevamente por el teorema de la división sabemos que:

$(81q^3 + 27q^2 rem\,(v, 9) + 3q[rem\,(v, 9)]^2) = t$, donde $t \in \mathbb{Z}$. Además, podemos reescribir a v^3 como se sigue:

$$v^3 = 9t + [rem\,(v, 9)]^3.$$

Finalmente, de acuerdo con $0 \leq rem\,(v, 9)$, es fácil ver que $rem(v^3, 9) \in \boldsymbol{C}$, entonces $rem(v^3, 9) \equiv c\ (mod\ 9)$, lo cual resulta ser absurdo, ya que $rem(v^3, 9) \not\equiv c\ \ (mod\ 9)$.

(Q.E.D)

-<u>Una breve ilustración de forma aplicada de la demostración matemática anterior, así como también explicación del génesis de las funciones generadoras de cubos en ***C***.</u>

De forma didáctica, procedo a explicar en forma de aplicación matemática, el argumento lógico utilizado para construir la demostración de la propiedad anterior.

-Ahora bien, tomemos el siguiente entero en su forma definida por el teorema de la división, entonces tengamos que:

$$v = 9q + 2, donde\ q = 2.$$

Substituyendo

$$\begin{aligned} v &= 9(2) + 2 \\ &= 20. \qquad \text{"}Forma\ primal\ de\ v\ es\ 2.\text{"} \end{aligned}$$

Elevemos al cubo

$$\begin{aligned} v^3 &= 9(7992) + 8 = (20)^3 \\ &= 8000. \qquad Forma\ primal\ es\ 8. \end{aligned}$$

Por ello, como argumenta la demostración anterior $v^3 = 9t + 8$, de donde en este caso, nuestro t será t=7992.

Además de lo anteriormente explicado, si realizamos el mismo tratamiento a la función generadora $f(v) = (3v + 2)^3$, vemos que:

$$\begin{aligned} (3v + 2)^3 &= 81v^3 + 54v^2 + 36v + 8, \text{ que al factorizar es} \\ &= 9(9v^3 + 6v^2 + 4v) + 8, \end{aligned}$$

donde igualmente $(9v^3 + 6v^2 + 4v) = t \in \mathbb{Z},\ ya\ que\ v\ es\ un\ número\ entero.$

Del ejemplo anterior, tomemos a nuestro $v = 20$ y substituyendo en la expresión anteriormente desarrollada, comprobaremos su valor primal.

-Aplicación:

$$\begin{aligned} (3(20) + 2)^3 &= 9(9(20)^3 + 6(20)^2 + 4(20)) + 8 \\ &= 9(74480) + 8 \\ &= 670328. \end{aligned}$$

Del resultado anterior, podemos concluir en que luego de substituir nuestro entero $v = 20$ en la función generadora, obtuvimos un valor primal 8. Y por esto último, también podemos observar la congruencia de dicha función como se sigue:

$$(3v + 2)^3 \equiv 9t + 8\ (mod\ 9).$$

8. Usando las i-coordenadas para encontrar el número 33 del problema de los 3 cubos.

Queda entendido que los únicos valores que puede tomar cualquier clase elevada al cubo son los de las siguientes clases:

$$\mathbb{Z}^3 \equiv (\phi^K)^3 = \begin{cases} \phi^1 \\ \phi^8 \\ \phi^9 \\ \phi^{-1} \\ \phi^{-8} \\ \phi^{-9} \end{cases}, el\ signo\ dependera\ si\ \phi^K\ era\ positivo\ o\ negativo\ desde\ un\ principio.$$

Prueba para calcular 33 como solución de $X^3 + Y^3 + Z^3 = K$, con base de algebra primal a través de sus Números Primales y filas en la matriz, a la combinación de estos datos se le conoce como Z_i, donde "Z" representa el numero Primal e "i" su posición en fila de la matriz.
Utilizando los números obtenidos por Booker (2019) [4], procederemos a dar con el 33 tanto en su forma primal como obtenerlo mediante sus coordenadas en la matriz.

Para $X^3 + Y^3 + Z^3 = k$:

$$X = 8866128975287528$$
$$Y = -8778405442862239$$
$$Z = -2736111468807040$$
$$k = 33$$

Calculando los cubos de las variables obtenemos:

$$X^3 = 696950821015779435648178972565490929714876221952$$
$$Y^3 = -676467453392982277424361019810585360331722557919$$
$$Z^3 = -20483367622797158223817952754905569383153664000$$

La suma de estos valores dará como resultado el número 33.
Procedemos a convertir los números en su forma Primal:

$$X = 8866128975287528 = 2_\phi$$
$$Y = -8778405442862239 = -7_\phi$$
$$Z = -2736111468807040 = -4_\phi$$
$$k = 33 = 6_\phi$$

Continuamos elevando al cubo esos números primales.

$$(2_\phi)^3 + (-7_\phi)^3 + (-4_\phi)^3 = 8_\phi + (-1_\phi) + (-1_\phi)$$

Con la operación que nos queda obtenemos:

$$8_\phi + (-1_\phi) + (-1_\phi) = 6_\phi$$

Esto es congruente con la operación original debido al teorema de Acuña [2], pero para hacer una prueba más relacionada con la matriz E_ϕ^9, utilizaremos las coordenadas i de los números encontrados por Booker, (2019) [4], usando la ecuación 1, en el capítulo 3 de este artículo.
Estas son las coordenadas i de cada uno de los números de Booker, elevados al cubo.

$$i_X = 77438980112864381738686552507276769968319580217$$
$$i_Y = 75163050376998030824929002201176151147969173103$$
$$i_Z = 2275929735866350913757550306100618820350407112$$

Ahora que poseemos todos los datos de los números obtenidos, tanto sus filas como su Numero Primal que a su vez representa su coordenada j, ahora que poseemos con seguridad sus ubicaciones en la Matriz, y utilizando la notación $Z_{(i)}$, en este caso como las i son muy grandes las acompañaremos con la letra que representan, así no tendremos que escribir los números.
Nos quedaría la ecuación así:

$$Z_{(iX)} + Z_{(iY)} + Z_{(iZ)} = Z_{(ik)}$$

Procedamos a calcular:

$$8_{(iX)} + (-1_{(iY)}) + (-1_{(iZ)}) = 6_{(4)}$$

Como nos queda $6_{(ik)}$, la coordenada i de 33 es 4, para comprobar que este cálculo es correcto debemos operar con las i, de la manera que se explicó en el capítulo 3 de este documento.
Lo primero será hacer una suma iterativa, primero sumaremos las dos coordenadas de los números negativos, utilizando la fórmula del cuadro de sumas de coordenadas de la tabla 2.

$$-1_{(iY)} + (-1_{(iZ)}) = -2_{(iY+iZ)-1}$$

Eso nos da como resultado:

$$i\ de\ Y + Z = 77438980112864381738686552507276769968319580214$$

Ahora nos quedaría la siguiente manera:

$$8_{(iX)} + (-2_{(iY+iZ)})$$

Lo cual es una resta de coordenadas, la cual se calcula de la siguiente forma

$$Z_{(i)} - Z_{(i')} = Z_{(i-i')+1}$$

El ejemplo exacto está en la tabla 3. Ya que al final nos queda una resta donde se ve

$$8_{(i)} - 2_{(i')} = 6_{(i-i')+1}$$

Continuamos con la operación

$$8_{(iX)} + \left(-2_{(iY+iZ)}\right) = 6_{(3)+1} = 6_{(4)}$$

Y como sabemos:

$$6_{(4)} \equiv 33 \ (mod\ 9)$$

9. Resultados del Algoritmo S.A.M. para el problema de los 3 cubos.

Como sabemos el algoritmo S.A.M [3] Fue creado utilizando los teoremas de [2] con el propósito de simplificar y clarificar la búsqueda de soluciones para el problema de los 3 cubos, esto con el propósito de disminuir la búsqueda por fuerza bruta, como sabemos por el Teorema de Acuña y el Criterio de Marrero [2], existen soluciones congruentes cuando las clases son operadas y gracias al criterio podemos operar las clases para obtener la única resultante.
Entonces podemos buscar para un resultado deseado, la combinación de clases que elevadas al cubo darán el numero deseado y no tener que probar con cada número entero.

9.1. primer paso:

Sabemos que las posibles clases resultantes de elevar al cubo son las siguientes seis:

$$(\phi^Z)^3 = \{-1_\phi, -8_\phi, -9_\phi, 1_\phi, 8_\phi, 9_\phi\}$$

El primer paso sería entonces sumar de forma iterativa, primero hacemos la combinación de los dos primeros términos del problema $X^3 + Y^3$, y vamos anotando todos estas primeras combinaciones en una tabla la cual nos debería quedar de la siguiente forma.

	Combinaciones $(X_a)^3 + (Y_b)^3$	C_ϕ
A	$(1_a)^3 + (1_b)^3 =$	2_ϕ
B	$(-1_a)^3 + (-1_b)^3 =$	-2_ϕ
C	$(1_a)^3 + (-1_b)^3 =$	0
D	$(1_a)^3 + (-1_b)^3 =$	9_ϕ
E	$(1_a)^3 + (-1_b)^3 =$	-9_ϕ
F	$(8_a)^3 + (8_b)^3 =$	7_ϕ
G	$(-8_a)^3 + (-8_b)^3 =$	-7_ϕ
H	$(8_a)^3 + (-8_b)^3 =$	0
I	$(8_a)^3 + (-8_b)^3 =$	9_ϕ
J	$(8_a)^3 + (-8_b)^3 =$	-9_ϕ
K	$(9_a)^3 + (9_b)^3 =$	9_ϕ
L	$(-9_a)^3 + (-9_b)^3 =$	-9_ϕ
M	$(9_a)^3 + (-9_b)^3 =$	0
N	$(9_a)^3 + (-9_b)^3 =$	9_ϕ
O	$(9_a)^3 + (-9_b)^3 =$	-9_ϕ
P	$(1_a)^3 + (8_b)^3 =$	9_ϕ
Q	$(-1_a)^3 + (-8_b)^3$	-9_ϕ
R	$(1_a)^3 + (-8_b)^3 =$	2_ϕ
S	$(1_a)^3 + (-8_b)^3 =$	-7_ϕ

T	$(-1_a)^3 + (8_b)^3 =$	7_ϕ
U	$(-1_a)^3 + (8_b)^3 =$	-2_ϕ
V	$(1_a)^3 + (9_b)^3 =$	1_ϕ
W	$(-1_a)^3 + (-9_b)^3 =$	-1_ϕ
X	$(1_a)^3 + (-9_b)^3 =$	1_ϕ
Y	$(1_a)^3 + (-9_b)^3 =$	-8_ϕ
Z	$(-1_a)^3 + (9_b)^3 =$	-1_ϕ
AA	$(-1_a)^3 + (9_b)^3 =$	8_ϕ
AB	$(8_a)^3 + (9_b)^3 =$	8_ϕ
AC	$(-8_a)^3 + (-9_b)^3 =$	-8_ϕ
AD	$(8_a)^3 + (-9_b)^3 =$	8_ϕ
AE	$(8_a)^3 + (-9_b)^3 =$	-1_ϕ
AF	$(-8_a)^3 + (9_b)^3 =$	-8_ϕ
AG	$(-8_a)^3 + (9_b)^3 =$	1_ϕ

Tabla: 5

En los casos donde se ve la misma operación es porque como se explica en [2] para la resta, existen tres posibles resultados para una resta de dos clases iguales, y dos posibles para una resta de dos clases diferente, esto por la no conmutatividad de la operación.

Hay que tomar en cuenta cada posible resultado para obtener todas las combinaciones que en total fueron C_ϕ =33. Y a cada combinación le asignamos un nombre.

9.2. Segundo paso sumando el ultimo termino.

Ahora que tenemos las primeras 33 combinaciones solo nos queda combinarlo con las 6 posibles resultados que tiene Z^3 lo que nos quedaría como

$$Z^3 * C_\phi = 33 * 6 = 198 = K$$

En K estan todas las posibles clases que se pueden obtener, es decir dentro de esas combinaciones están todos los resultados posibles para el problema de los 3 cubos, esto también incluye a los resultados negativos.

Por motivos de espacio, es complicado colocar un cuadro combinatorio con los 198 resultados, por eso se empleará una gráfica la cual mostrara los resultados, en la parte horizontal se encuentran las combinaciones y en la vertical veremos la clase alcanzada.

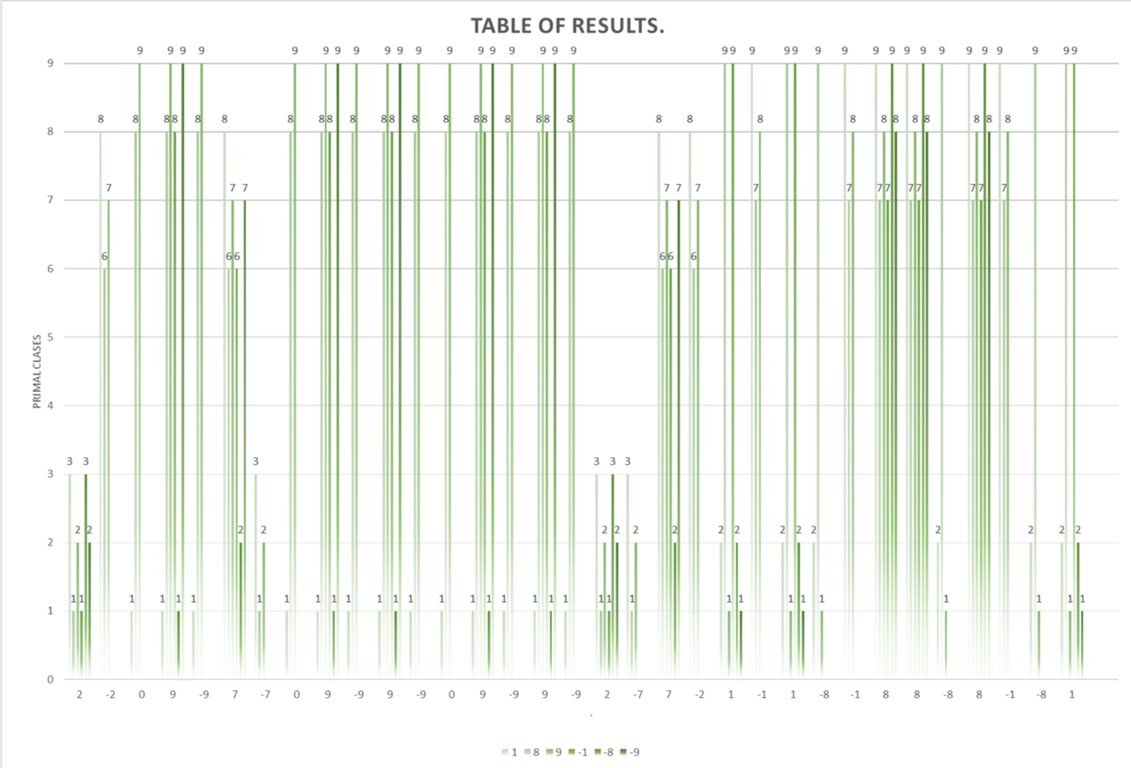

imagen: 1

A partir de estos resultados podemos saber la frecuencia con la que aparecen las clases en el problema, esto puede explicar porque algunas soluciones son más difíciles de encontrar que otras.
En la siguiente grafica podemos ver dicha frecuencia, en la parte horizontal son las clases primales y en la parte vertical son los numero de veces que dichas clases aparecen en las combinaciones.

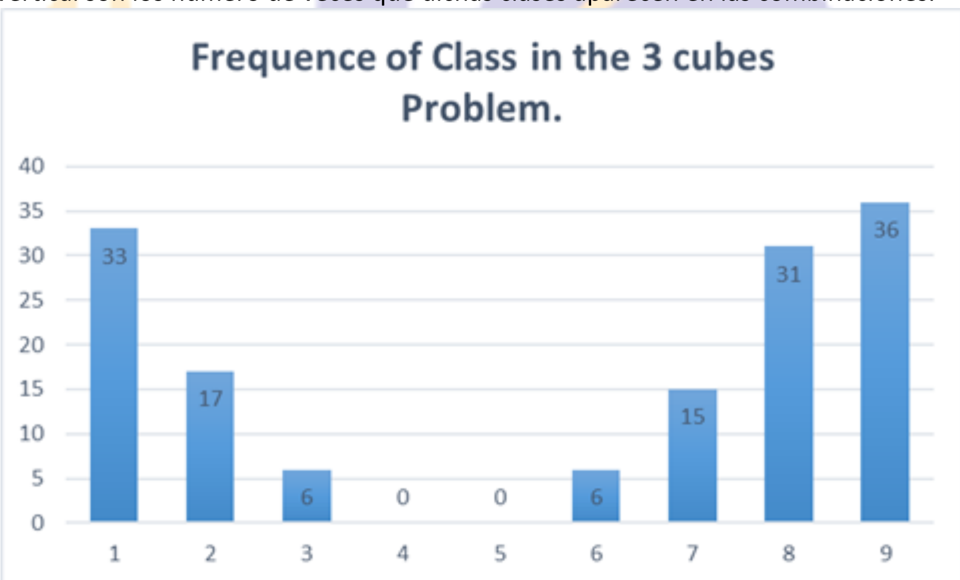

Imagen: 2

Como se puede ver las clases con más apariciones son la del 1 y el 9, mientras que la clase 3 y 6 solo aparecen seis veces ambas, lo que explica por qué números como el 33 que es de clase 6, sean tan difíciles de encontrar, siempre será más frecuente encontrar las otras.
También podemos observar que las clases 4 o 5 que corresponden a números que divididos entre 9 tienen dichos restos no son soluciones, comprobando que el Teorema de Acuña para estas operaciones está fuertemente relacionados con las operaciones.

9.3. Aplicación para la identificación de las combinaciones.

Ya hemos expuesto el sistema de combinaciones, ahora vamos a probar el para el caso 33 en el **capítulo 7**, se mostró la combinación de clase para dicho número, la cual se compone de la siguiente forma:

$$\bar{\bar{8}}_{\phi} + \left(-1_{\phi} + (-1_{\phi})\right) = 6_{\phi}.$$

Y como observamos a partir del **capítulo 8**, podemos tomar cualquier combinación validad para esto en el caso de $\left(-1_{\phi} + (-1_{\phi})\right) = B$ en la **Tabla 5.** Así nos quedaría de la siguiente forma: $8_{\phi} + B = 6_{\phi}$. Donde $6_{\phi} = 33$. Este mismo procedimiento lo podemos aplicar para cualquier resultado valido para el problema de los 3 cubos.

Como por ejemplo los casos resueltos en por Booker & Sutherland (2021) [7].:

$$8_{\phi} + 8_{\phi} + (-\bar{\bar{1}}_{\phi}) = 6_{\phi} \equiv 42$$
$$\bar{\bar{1}}_{\phi} + 1_{\phi} + (-8_{\phi}) = 3_{\phi} \equiv 165$$
$$\bar{\bar{1}}_{\phi} + (-8_{\phi} + \left(-8_{\phi}\right)) = 3_{\phi} \equiv 579$$
$$-\bar{\bar{1}}_{\phi} + (8_{\phi} + 8_{\phi}) = 6_{\phi} \equiv 906$$

Además, nos queda entendido por el grafico en la **Imagen 2.** Que existen seis combinaciones más que nos pueden dar 6_{ϕ}, por lo cual podemos conjeturar los siguiente, pero por propiedad conmutativa de la suma quedarían tres combinaciones generales.

9.4. Diferentes combinaciones para encontrar resultados.

Por los resultados mostrados en la **Imagen 1** e **Imagen 2** tenemos que existen otras formas aparte de la que ya conocemos para encontrar el número 33, esto apoya la Conjetura de Heat-Brown [6], de que existen infinitas tripletas de combinaciones para un mismo resultado.

De esta manera podemos saber si existen más formas de calcular un mismo número con el problema, sin embargo, he de acotar que es necesario tener un gran conocimiento en el uso del algebra primal, de otra manera el uso de las tablas para tomar anotaciones y las operaciones pueden parecer confusas, pero una vez entendido el funcionamiento es más claro en su uso, no solo para el problema de los 3 cubos sino para cualquier otro que se desee probar que involucre solo enteros.

La siguiente tabla muestra la relación de las combinaciones con los números expuestos en este artículo:

$\bar{\bar{8}}_{\phi} + \left(-1_{\phi} + (-1_{\phi})\right)=$	33
$-1_{\phi} + \left(8_{\phi} + (8_{\phi})\right)=$	42, 906
$8_{\phi} + 8_{\phi} + 8_{\phi}$	6

Tabla: 6.

Por propiedad de conmutatividad de la suma al final terminamos con tres fórmulas para el cálculo de cualquier entero de clase 6 para el problema de los 3 cubos.

$$(a).\, 8_{\phi} + \left(-1_{\phi} + (-1_{\phi})\right)$$
$$(b).\, 8_{\phi} + \left(8_{\phi} + 8_{\phi}\right)$$
$$(c).\, 8_{\phi} + \left(8_{\phi} + (-1_{\phi})\right)$$

Ya para la clase 3 tendríamos las siguientes combinaciones:

$\bar{\bar{1}}_{\phi} + \left(-8_{\phi}\right) + \left(-8_{\phi}\right)$	579
$1_{\phi} + 1_{\phi} + \left(-8_{\phi}\right)$	165
$1_{\phi} + 1_{\phi} + 1_{\phi}$	3

Tabla: 7.

Como se puede ver el algoritmo tomaría en cuenta cada combinación, para al final de manera algebraica poder sintetizarlas en tres diferentes fórmulas.

De ser demostrada la conjetura primal expuesta en el **capítulo 4.** no habría necesidad alguna de recurrir a la fuerza bruta ya que dicha conjetura demostraría que la solución siempre existirá, siempre que las combinaciones de clases sean las correctas, aunque desconozcas los números de las incógnitas si el resultado es congruente con las operaciones (mod 9), existirá la solución.

Tomando en cuenta todo lo anterior procederemos a dejar unas predicciones de la forma que tendrán los siguientes números a encontrar.

10. Predicciones para los números sin encontrar.

En el artículo de Booker & Sutherland (2021) [7], se deja claro que para k ≤ 1,000 aún quedan siete números que no se han podido calcular que son los siguientes:
$114, 390, 627, 633, 732, 921, 975$.
No es de extrañar que estos números sean difíciles de calcular, porque pertenecen todos a las clases 3 o 6, las cuales por el Teorema de Acuña y la forma misma de la ecuación diofántica del problema de los 3 cubos, poseen las combinaciones con menos frecuencia de entre todas.
Aplicando todo lo anteriormente expuesto podemos predecir que de hallarse las soluciones indudablemente tendrían las formas expuestas en las **tablas 6 y 7**. Para:

$$3_{\phi} = \{390, 633, 732, 921, 975\}$$

Las combinaciones serían las de la **tabla 7.** Con una alta probabilidad que sean de la forma de las primeras dos filas y para:

$$6_{\phi} = \{114, 627\}$$

De igual manera las combinaciones para esta clase son los de la **tabla 6.** Igualmente, las dos primeras filas son las mejores candidatas como combinación para estos números, ya que poseen interacciones con los números negativos, haciéndolas aún más complejas de calcular.

Conclusiones

Una ecuación diofántica es una operación polinómica que busca soluciones en los enteros, para el muy mencionado problema de los 3 cubos $X^3 + Y^3 + Z^3 = k$, la pregunta es cuales números son resultados para válidos para k, como se sabe con anterioridad y como los comprueba el teorema de acuña en la **imagen 2.** no existen soluciones para números enteros cuyo resto sea 4 o 5 al ser divididos entre 9, modulo 9.
También es observable el hecho que los números que posean resto 3 y 6 modulo 9, son los más difíciles de encontrar, al tener muy pocas combinaciones que puedan dar como resultado dichos números como se expone a partir del **Capítulo 8.**
Finalmente concluyendo que aplicando el álgebra primordial podemos exponer dichas combinaciones para poder determinar cuáles serían los números que pueden dar las soluciones faltantes, donde están e incluso el tamaño en relación con su valor absoluto.
Podemos decir que el problema de los 3 cubos es muy complejo y difícil de abordar, la pregunta a una serie de soluciones infinitas necesita muchos enfoques para poder ser respondida, lo propuesto en este documento no es más que la evidencia obtenida por aquellos que han dado luz a este enigma.
Lo que nos deja a la pregunta de ¿cuáles son las soluciones para k, que no sean resto 4 o5 módulo 9? La respuesta posiblemente sea: "todos aquellos que cumplan la condición de no poseer dichos restos al ser dividas entre 9", respaldado por el Teorema de Acuña que da paso al algebra Primordial y por la conjetura primordial que es una consecuencia de dicho teorema.

Agradecimientos especiales

En el año 2012 empecé un borrador de lo que sería todo este sistema matemático, junto con Eduardo Pinto un amigo de la facultad, en el año 2015 se lo muestro al Profesor Samuel Flores en el departamento de matemáticas de la UC. En el 2016 después de empezar a darle un tratamiento más serio el profesor me propone aplicarlo al problema de los 3 cubos, en este tiempo se une Paul Marrero, quien es la persona que le da un impulso a la investigación y me ayuda a dar las bases del algebra primordial, en el año 2020 durante la pandemia, ambos utilizamos nuestro tiempo para darle fin a esas bases a medidas que dejábamos resultados en la ya mencionada ecuación diofántica, durante esta

investigación gracias a John Eider, descubrimos que vamos por el mismo camino, y con los resultados encontrados por Andrew Booker y Andrew Sutherland, pudimos obtener la evidencia numérica necesaria para poder armar el rompecabezas y calcular todas las combinaciones de cada clase, por esta razón y al apoyo dado por nuestras familias y amigos, quiero dar las gracias por todo lo aprendido en este viaje.

"Superbia custodit nos stantes."

Referencias

1]LÓPEZ, J. E. R., & NADAD, J. L. G. (2015). Suma sucesiva. *Revista MATUA ISSN: 2389-7422*, *2*(2).

[2] Tarazona, E. J. A., Flores, S., & Marrero, P. F. (2021). MatrizE_φ^ 9. Clasificación de números enteros. Algebra primordial. *Revista MATUA ISSN: 2389-7422*, *8*(1), 10-45.

[3] Flores, S., Acuña, E., & Marrero, P. (2021). Existencial refinament on the search of integer solutions for the diophantine equation $ x^ 3+ y^ 3+ z^ 3= n$. *arXiv preprint arXiv:2103.17037*.

[4] Booker, A. R. (2019). Cracking the problem with 33. *Research in Number Theory*, *5*(3), 1-6.

[5] Paul Francisco Marrero Romero, Eduardo J. Acuña T. ABOUT THE NEGATIVE DIGITAL ROOT AND SOME OF ITS PROPERTIES RELATED TO MODULAR ARITHMETIC. 2021. ⟨hal-03387683⟩

[6] D. R. Heath-Brown, The density of zeros of forms for which weak approximation fails. Math. Comp. 59, 613–623 (1992)

[7] Booker, A. R., & Sutherland, A. V. (2021). On a question of Mordell. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *118*(11).

[8] Eduardo J. Acuña T, Paul Marrero. PRIMALCONJECTURE INMATRIXE9ϕ. 2021. ⟨hal-03431591⟩

[1] *Eduardo Jose Acuña Tarazona*
Department of Mathematics Universidad de Carabobo
Email address: Eduardonumberst9@gmail.com
[2] *Paul FranciscoMarrero Romero*
Department of Mathematics Universidad Abierta de Venezuela
Email address: Paulqed0@protonmail.com