Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. V , № 2, (2018)

Revista MATUA Páginas: 32–50

LAS RELACIONES ROMÁNTICAS Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Dan Solano

universidad centroccidental lisandro alvarado, barquisimeto, venezuela & universidad nacional abierta, barquisimeto, venezuela

Abstract

We study three romantic relationships with differential equations.

Keywords: romantic relationships, differential equations.

Resumen

Estudiamos tres modelos de relaciones románticas con ecuaciones diferenciales.

Palabras claves: Relaciones romanticas; Ecuaciones diferenciales.

1. Introducción

La ecología humana nos permite conocer como nos relacionamos con los demás y la evolución de dichas relaciones, en nuestro caso particular las relaciones amorosas entre una pareja, pueden ser modeladas mediante ecuaciones diferenciales lineales autónomas. Strogaz en 1988 (ver referencia [1]) introdujo un modelo de relaciones amorosas entre una pareja donde la mujer es una amante voluble en el tiempo. Estudiaremos este modelo en detalle, otro modelo de amores correspondidos en una pareja y un tercer modelo donde la velocidad de crecimiento del amor de la mujer es constante. Estos últimos dos modelos son propuestos por T. P. Dreyer en la referencia [2]. Para el estudio de los dos primeros modelos usaremos la tranformada de Laplace en el caso real y el último modelo lo trataremos como un sistema no acoplado.

2. Preliminares matemáticos

Definición 1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función, la transformada de Laplace dela función f es la función*

$$L[f] = F[s] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

siempre y cuando dicho límite exista. Usaremos indistintamente las notaciones $L[f]$, $F(s)$ o $L[f](s)$, la variable s en general es una variable compleja, pero para nuestro trabajo basta con considerar s y $F(s)$ reales únicamente. Notemos que la transformada de Laplace real que estamos considerando nos provee de un puente entre dos dominios, el dominio tiempo y el dominio de la transformada de Laplace que determinaremos más tarde. A continuación vamos a dar un lema que nos garantiza la convergencia de la integral impropia.

Lema 1. *Si $\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$ converge, entonces $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ converge, o sea, que una integral absolutamente convergente es convergente.*

Proof. Tenemos que $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ por tanto $0 \leq f(t) + |f(t)| \leq 2|f(t)|$, entonces

$$0 \leq \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \int_0^T e^{-st}|f(t)|\,dt \leq 2\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

y tenemos

$$0 \leq \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}[f(t) + |f(t)|]\,dt \leq 2\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}|f(t)|\,dt.$$

Entonces $\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ converge. ■

Definición 2. *Una función f de una variable real a valor real es de orden exponencial en $[0,\infty)$ si existen números c y α, con c positivo, tales que $|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$ para todo $t > 0$. Si f es acotada entonces es de orden exponencial ya que existe M tal que $|f(t)| \leq M = Me^{0t}$. Por tanto, f es de orden exponencial y como las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *son acotadas, entonces son de orden exponencial.*

Ejemplo 1. *Calcular la transformada de Laplace de*

$$I)\ f = \{(t,y) : y = e^{at};\ t \geq 0\} \qquad II)\ g(t) = 1 \qquad III)\ h(t) = e^{-at}.$$

Solución.

I) $L\left[e^{at}\right](s) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}e^{at}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \int_0^T e^{t(a-s)}\,dt$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{t(a-s)}\Big|_0^T\right]$$

$$= \frac{1}{a-s}\lim_{T\to\infty}\left[e^{(a-s)T} - e^0\right] = \frac{1}{s-a} \ \ \text{si } s > a$$

Entonces la función f en el dominio t, es transformada en la función $F = \left\{(s,y) : y = \frac{1}{s-a}\right\}$ en el dominio de s.

II) $g(t) = 1 = e^{at}$. Aquí $a = 0$, entonces por I) $L[1](s) = \frac{1}{s}$.

III) Reemplazando a por $-a$ en I) nos queda $L[e^{-at}](s) = \dfrac{1}{s+a}$ si $a > -s$.

Ejemplo 2. *Calcular la transformada de Laplace de* $f(t) = \operatorname{sen} at$.

Solución.

Tenemos que

$$L[\operatorname{sen} at] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt.$$

Integrando por partes resulta

$$F(s) = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\Big|_0^T - \frac{s}{a}\int_0^T e^{-st}\cos at\,dt\right] = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt.$$

Una segunda integración por partes nos da

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s),$$

de donde resulta

$$\left[\frac{a^2+s^2}{a^2}\right]F(s) = \frac{1}{a}.$$

Entonces $F(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2};\;\; s > a.$

Definición 3. *Decimos que una función f de variable real a valor real es continua por tramos en un intervalo cerrado $[a,b]$ si f es continua con la excepción de un número finito de puntos $\{t_i\}_{i=1}^n$ en el intervalo $[a,b]$, existen los límites laterales $f(t_i^+) = \lim_{h\to 0^+} f(t_i+h)$; $f(t_i) = \lim_{h\to 0^-} f(t_i+h)$ y en los extremos del intervalo $[a,b]$ solo uno de estos límites es pertinente $f(a^+)$ y $f(b^-)$.*

Definición 4. *Decimos que una función f es de clase E si está definida en $[0,\infty)$, es de orden exponencial, continua por tramos en todo intervalo finito y $f(t_i) = \frac{1}{2}\left[f(t_i^+) + f(t_i^-)\right]$ en cada punto de discontinuidad.*

Lema 2. *Sea* $\mathcal{E} = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es de clase } E \text{ y de orden exponencial}\}$*, tenemos que si $f, g \in \mathcal{E}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $(f+g)$ y (βf) pertenecen a $\mathcal{E}$.*

Proof. Como f y g son continuas por tramos en $[a,b]$, entonces existen un número finito de intervalos $(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_n,b_n)$ y $(a,v_1),(v_1,v_2),\ldots,(v_n,b)$ tales que f es continua en $(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_n,b)$ y g es continua en $(a,v_1),(v_1,v_2),\ldots,(v_n,b)$; además existen los siguientes límites laterales: $\lim_{t\to a^+} f(t)$; $\lim_{t\to t_i^-} f(t)$; $\lim_{t\to t_i^+} f(t)$; $\lim_{t\to b^-} f(t)$; para $i = 1,2,\ldots,n$, $\lim_{t\to a^+} g(t)$; $\lim_{t\to t_i^-} g(t)$; $\lim_{t\to t_i^+} g(t)$; $\lim_{t\to b^-} g(t)$; $i = 1,2,\ldots,n$. Por tanto consideremos los subintervalos $(a,u_1),(u_1,u_2),\ldots,(u_p,b)$ donde los u_i los hacemos coincidir con v_i o con t_i según el caso. Es inmediato que $(f+g)$ es continua en los intervalos $(a,u_1),(u_1,u_2),\ldots,(u_p,b)$ y que existen los límites

$$\lim_{t\to a^+}(f+g)(t) = \lim_{t\to a^+} f(t) + \lim_{t\to a^+} g(t)$$
$$\lim_{t\to b^-}(f+g)(t) = \lim_{t\to b^-} f(t) + \lim_{t\to b^-} g(t)$$
$$\lim_{t\to u_i^+}(f+g)(t);\quad \lim_{t\to u_i^-}(f+g)(t)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$; en consecuencia $(f + g)$ es continua por tramos en $[a, b]$. Como $(\beta f)(t) = \beta f(t)$ con $\beta \in \mathbb{R}$, entonces βf es continua por tramos en $[a, b]$ con los mismos puntos de discontinuidad que f, salvo cuando $\beta = 0$, pero entonces $(\beta f)(t) = 0$ es continua en $[0, \infty)$ y por tanto continua por tramos en $[0, \infty)$. Como f y g son de orden exponencial, entonces existen constantes positivas m_1, m_2 y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq m_1 e^{\alpha_1 t}$; $|g(t)| \leq m_2 e^{\alpha_2 t}$ para todo $t \geq 0$. Sea $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ y $\alpha \geq \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2\}$, entonces

$$|(f + g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq m_1 e^{\alpha_1 t} + m_2 e^{\alpha_2 t} \leq m e^{\alpha t} + m e^{\alpha t} = 2m e^{\alpha t}.$$

Entonces $(f + g) \in E$.

Ahora, $|(\beta f)(t)| = |\beta||f(t)| \leq |\beta| m_1 e^{\alpha_1 t} = \overline{m} e^{\alpha_1 t}$, con $\overline{m} = m_1|\beta|$. Entonces $(\beta f) \in E$. Sea t_i un punto de discontinuidad de $(f + g)$ en $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
(f + g)(t_i) &= f(t_i) + g(t_i) = \tfrac{1}{2}[f(t_i^+) + f(t_i^-)] + \tfrac{1}{2}[g(t_i^+) + g(t_i^-)] \\
&= \tfrac{1}{2}(f + g)(t_i^+) + \tfrac{1}{2}(f + g)(t_i^-) \\
&= \tfrac{1}{2}[(f + g)(t_i^+) + (f + g)(t_i^-)]
\end{aligned}$$

Entonces $(f + g) \in \mathcal{E}$.

Análogamente $(\beta f)(t_i) = \beta \frac{1}{2}[f(t_i^+) + f(t_i^-)] = \frac{1}{2}[(\beta f)(t_i^+) + (\beta f)(t_i^-)]$, entonces $\beta f \in \mathcal{E}$. Con las dos operaciones anteriores poddemos dotar a $\mathcal{E}$ de estructura de espacio vectorial. ■

3. Existencia de la transformada de Laplace

Lema 3. *Si f es continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α para $t > T$, entonces existe la transformda de f para todo $s > \alpha$. Además* $\lim\limits_{s \to \infty} L[f](s) = 0$.

Proof. Tenemos que $L[f](s) = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = I_1 + I_2$.

Claramente, f es continua por tramos en $[0, T]$ con $T > 0$, sean $\{t_i\}_{i=1}^J$ los puntos de discontinuidad de f en $[0, T]$, entonces

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{h \to 0^+} \left[\int_{a+h}^{t_1 - h} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1 + h}^{t_2 - h} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_J + h}^{T - h} e^{-st} f(t)\, dt \right] \\
&= \lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^{t_1 - h} e^{-st} f(t)\, dt + \lim_{h \to 0^+} \int_{t_1 + h}^{t_2 - h} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \lim_{h \to 0^+} \int_{t_J + h}^{T - h} e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_J}^{T} e^{-st} f(t)\, dt = m < \infty,
\end{aligned}$$

por ser el integrando continuo. En consecuencia $I_1 = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$ existe. Ahora,

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \int_T^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \\
&\leq c \int_T^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = c \int_T^\infty e^{t(\alpha - s)}\, dt \\
&= \left. \frac{c e^{(\alpha - s)t}}{\alpha - s} \right|_T^\infty = \frac{c e^{(\alpha - s)T}}{s - \alpha} \quad \text{cuando } s > \alpha.
\end{aligned}$$

Entonces, por el lema 1, $I_2 = \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ existe, la existencia de I_1 e I_2 implica que $L[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ existe para $s > \alpha$. Además $|L[f](s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leq c\int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}\,dt = \frac{c}{s-\alpha}$ para todo $t \geq 0$. En consecuencia $\lim_{s\to\infty} L[f](s) = 0$. ■

Por el lema anterior podemos afirmar que el dominio de definición de la transformada de Laplace siempre incluye un intervalo semi-infinito de la forma (β, ∞).

Definición 5. *LLamaremos abcisa de convergencia de la función $F(s) = L[f](s)$ al ínfimo del conjunto de todos los s para los cuales existe la transformada, siempre y cuando este conjunto esté acotado y dicha abcisa la notamos s_0, es decir, $s_0 = \inf\{s :\ \text{existe } F(s) = L[f](s)\}$. En consecuencia el dominio de definición de la transformada de Laplace es de la forma (s_0, ∞) o $[s_0, \infty)$. Si el conjunto de las s tales que $F(s)$ existe no está acotado inferiormente, entonces decimos que la abcisa de convergencia es $-\infty$. Esto sucede, por ejemplo, con las funciones $f(t) \equiv 0$ y $f(t) = e^{-t^2}$.*

Veamos a continuación que existen funciones que no son continuas por tramos y, sin embargo, tienen transformada de Laplace.

Ejemplo 3. *$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$ no es continua por tramos en ningún intervalo cerrado que contenga el cero ya que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} t^{-1/2} = +\infty$. Ahora de los cursos de análisis es conocido que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; calculemos $L[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{-1/2}\,dt,\ \ s > 0$.*

Sea $st = y^2$ entonces

$$t^{-1/2} = \left(\frac{y^2}{s}\right)^{-1/2} = \left(\frac{s}{y^2}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{s}}{y};$$

$dt = \frac{2y}{s}\,dy$, y

$$(e^{-st}y^{-1/2})dt = e^{-y^2}\cdot\frac{\sqrt{s}}{y}\,dt = e^{-y^2}\cdot\frac{\sqrt{s}}{y}\cdot\frac{2y}{s}\,dy = 2s^{-1/2}e^{-y^2}\,dy.$$

Entonces

$$L[f](s) = 2\int_0^\infty s^{-1/2}y^{-2}\,dy = 2s^{-1/2}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = 2s^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Así $L\left[t^{-1/2}\right](s) = F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

El ejemplo anterior nos dice que el lema 3 nos proporciona solo condiciones suficientes pero no necesarias para la existencia de la transformada de Laplace ya que existen funciones que no cumplen la hipótesis de ser continuas por tramos y tienen transformada de Laplace. También muestra que el conjunto $\mathcal{E}$ está estrictamente contenido en el conjunto de las funciones que tienen transformada de Laplace, pero para el desarrollo del trabajo y muchas aplicaciones que usan transformada de Laplace, el conjunto $\mathcal{E}$ es suficiente y nosotros nos restringiremos al conjunto $\mathcal{E}$.

Lema 4 (Linealidad de la transformada de Laplace). *Si f_1 y f_2 son funciones reales cuyas transformadas de Laplace existen para $s > s_1$ y $s > s_2$, entonces*

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]; \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Proof. Para $s = \text{máx}\{s_1, s_2\}$ se tiene

$$\begin{aligned} L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\, dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt \\ &= c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4. *Hallar*

$$I)\ L[\text{senh}\, at] \qquad II)\ L[\cosh at] \qquad III)\ L[\text{senh}\ \sqrt{ab}t] \qquad IV)\ L[\cosh\ \sqrt{ab}t]$$

con a, b positivos.

Solución.

I) Usando el ejemplo I y la linealidad de la transformada de Laplace se tiene

$$\begin{aligned} L[\text{senh}\, at] &= L\left[\tfrac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})\right] = \tfrac{1}{2} L[e^{at} - e^{-at}] \\ &= \tfrac{1}{2} L[e^{at}] - \tfrac{1}{2} L[e^{-at}] = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{a}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

si $s > a$ y $a < -s$, o sea, si $s > |a|$.

II) $L[\cosh at] = L\left[\dfrac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{1}{s+a}\right] = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$ *si $s > |a|$.*

III) y IV) reemplazando a por $\sqrt{ab}$ tenemos

$$L[\text{senh}\ \sqrt{ab}t] = \frac{\sqrt{ab}}{s^2 - ab}$$

si $s > |\sqrt{ab}|$ y

$$L[\cosh\ \sqrt{ab}t] = \frac{s}{s^2 - ab} \quad \textit{si } s > \sqrt{ab}.$$

4. La transformada de la derivada

Lema 5. *Si f es continua en el intervalo $[0, \infty)$, de orden exponencial α y la derivada f' es continua en el intervalo $[0, \infty)$, entonces la transformada de Laplace de f' existe para $s > \alpha$ y se tiene $L[f'] = sL[f] - f(0)$.*

Proof. $L[f'](s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f'(t)\, dt$. Integrando por partes, haciendo $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)\, dt$ entonces $v = f(t)$ y resulta

$$L[f'] = \lim_{T\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\Big|_0^T + s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt\right] = \lim_{T\to\infty}\left[e^{-st} f(T) - f(0)\right] + sL[f(t)].$$

Como f es de orden exponencial, existen constante c y α tales que para $t > T$, $|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$ lo que implica $\left|e^{-st} f(t)\right| \leq ce^{(\alpha - s)t}$, si $s > \alpha$ esto implica que $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ y, además, la existencia de $L[f]$ está garantizada por el lema 3. Así $L[f'] = sL[f] - f(0)$. ■

Ejemplo 5. *Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$.*

Solución.

Sea $f(t) = -\left(\frac{1}{a}\cos at\right)$, entonces $f'(t) = \operatorname{sen} at$, entonces por el lema 5,

$$L[f'] = L[\operatorname{sen} at] = sL[f] - f(0) = sL\left[-\frac{1}{a}\cos at\right] + \frac{1}{a} = -\frac{s}{a}L[\cos at] + \frac{1}{a} = L[f'] = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

Por tanto,

$$L[\cos at] = -\frac{a}{s}\left[-\frac{1}{a} + \frac{a}{s^2+a^2}\right] = -\frac{a}{s}\left[\frac{-s^2-a^2+a^2}{a(s^2+a^2)}\right] = \frac{s}{s^2+a^2}; \qquad s > a.$$

Lema 6. *Si f es de clase E, entonces $F(t) = \int\limits_0^t f(\sigma)\,d\sigma$ es continua y de clase E.*

Proof. Como f es de clase E, entonces es de orden exponencial α, luego existen C, T tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para todo $t \geq T$ y está definida en $[0,\infty)$. Veamos que F es continua en cualquier intervalo $[a,b] \subset [0,\infty)$.

Sean $t_0 \in (a,b)$ y $h > 0$ tal que $(a+h) \in (a,b)$, entonces

$$\begin{aligned}|F(t_0+h) - F(t_0)| &= \left|\int_{t_0}^{t_0+h} f(\sigma)\,d\sigma\right| \leq \int_{t_0}^{t_0+h} |f(\sigma)|\,d\sigma \leq C\int_{t_0}^{t_0+h} e^{\alpha\sigma}\,d\sigma \\ &= \frac{C}{\alpha}e^{\alpha\sigma}\Big|_{t_0}^{t_0+h} = \frac{C}{\alpha}\left|e^{\alpha(t_0+h)} - e^{\alpha t_0}\right| \to 0\end{aligned}$$

cuando $h \to 0^+$, entonces $\lim\limits_{h\to 0^+} F(t_0+h) = F(t_0)$. Si $h < 0$ con $(t_0+h) \in (a,b)$ tenemos

$$|F(t_0+h) - F(t_0)| = \left|-\int_{t_0+h}^{t_0} f(\sigma)\,d\sigma\right| \leq \int_{t_0+h}^{t_0} |f(\sigma)|\,d\sigma \leq C\int_{t_0+h}^{t_0} e^{\alpha\sigma}\,d\sigma = \frac{C}{\alpha}\left(e^{\alpha t_0} - e^{\alpha(t_0+h)}\right) \to 0$$

cuando $h \to \bar{0}$, entonces $\lim_{h\to\bar{0}} F(t_0+h) = F(t_0)$ y deducimos con lo anterior que F es continua en t_0.

Ahora
$$\begin{aligned}|F(a+h) - F(a)| &= \left|\int_0^{a+h} f(\sigma)\,d\sigma - \int_0^a f(\sigma)\,d\sigma\right| = \left|\int_a^{a+h} f(\sigma)\,d\sigma\right| \\ &\leq \int_a^{a+h} |f(\sigma)|\,d\sigma \leq C\int_a^{a+h} e^{\alpha\sigma}\,d\sigma \\ &= \frac{C}{\alpha}\left|e^{\alpha(\alpha+h)} - e^{\alpha a}\right| \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0^+.\end{aligned}$$

Entonces $\lim\limits_{h\to 0^+} F(a+h) = F(a)$. Análogamente se prueba que $\lim\limits_{h\to 0^-} F(b+h) = F(b)$. Entonces F es continua en $[a,b]$.

Como f es de orden exponencial existen C, α, T con C positivo tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para todo $t \geq T$. Sea $t \in [T,\infty)$, entonces

$$\begin{aligned}|F(t)| &= \left|\int_T^t f(\sigma)\,d\sigma\right| \leq C\int_T^t e^{\alpha\sigma}\,d\sigma = \frac{C}{\alpha}e^{\alpha\sigma}\Big|_T^t \\ &= \frac{C}{\alpha}\left[e^{\alpha t} - e^{\alpha T}\right] \leq \frac{C}{\alpha}e^{\alpha t}\end{aligned}$$

para todo $t \geq T$ y $\frac{C}{\alpha}$ positivo. Entonces F es de orden exponencial.

Sea t_i un punto de discontinuidad en el dominio de f, tenemos

$$\int_0^{t_i} f(t)\,dt = \int_0^{t_i^+} f(t)\,dt = \int_0^{t_i^-} f(t)\,dt,$$

por lo tanto,

$$F(t_i) = \int_0^{t_i^+} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{t_i^+} f(t)\,dt + \int_0^{t_i^-} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[F(t_i^+) + F(t_i^-)\right].$$

Como F es continua, entonces F es continua a trozos y por ser de orden exponencial está definida en $[0,\infty)$ con $F(t_i) = \frac{1}{2}[F(t_i^+) + F(t_i^-)]$; t_i un punto de discontinuidad, entonces F es de clase E. ■

A continuación vamos a anunciar el teorema de aproximación de Weierstrass, el cual vamos a necesitar para probar el teorema de Lerch. La prueba de dicho teorema se encuentra en la referencia [3].

Teorema 1 (Teorema de aproximación de Weierstrass). *Para cualquier función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y ε un número pequeño y positivo, existe un polinomio $p(x)$ tal que $|h(x) - p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.*

Proof. Ver referencia [3] T. M. Apostol. ■

Lema 7. *Si h es una función continua definida en el intervalo cerrado $[0,1]$ a valor real y, $\int_0^1 x^n h(x)\,dx = 0$ para $n = 0,1,2,\ldots$. Entonces $h(x) \equiv 0$ en el intervalo cerrado $[0,1]$.*

Proof. Como $h(x)$ es continua en el cerrado $[0,1]$, entonces por el teorema de aproximación de Weierstrass existe un polinomio $p(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$; n,k naturales y $\varepsilon > 0$ tales que $|h(x) - p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$, tenemos que

$$\int_0^1 h(x)p(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\sum_{n=0}^{k} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{k}\int_0^1 x^n h(x)\,dx = 0.$$

Sea $M = \text{máx}\{h(x) : x \in [0,1]\}$ y ε positivo arbitrario.

$$\begin{aligned}\int_0^1 h^2(x)\,dx &= \int_0^1 h^2(x)\,dx - \int_0^1 h(x)p(x)\,dx = \int_0^1 h(x)[h(x) - p(x)]\,dx \\ &\leq M\int_0^1 |h(x) - p(x)|\,dx < M\varepsilon\end{aligned}$$

y como ε es arbitrario se sigue que $\int_0^1 h^2(x)\,dx = 0$.

Veamos que $h(x) \equiv 0$ en $[0,1]$. Si $h(x) \neq 0$ para algún $x_0 \in (0,1)$, entonces por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $(\delta - x_0, \delta + x_0) \subset (0,1)$ y $h(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y resulta

$$\int_0^1 h^2(x)\,dx = \int_0^{x_0-\delta} h^2(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^1 h^2(x)\,dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2(x)\,dx > 0$$

contradicción. Por tanto debemos tener $h^2(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ y en consecuencia, $h(x) \equiv 0$ para todo $x \in [0,1]$. ■

5. Unicidad de la transformada de Laplace

Para usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales necesitamos la existencia de la inversa de la aplicación u operador L para resolver la ecuación $L[y] = \varnothing$ y recuperar y con $L^{-1}(\varnothing)$, para ello debemos ver que L es inyectiva, o sea, que debemos ver que si f es una función continua con transformada F, entonces no existe otra función continua g que tenga la misma transformada de Laplace. Este hecho nos lo proporciona el

Teorema 2 (Teorema de Lerch). *Dos funciones de clase E que no son iguales tienen diferentes transformada de Laplace.*

Proof. Sean f, g dos funciones de clase E con orden exponencial α tales que $L[f] = L[g]$ para todo $s > \alpha$ y sea $h(t) = f(t) - g(t)$, entonces por el lema 2 h es de clase E de orden exponencial α y

$$H(s) = L[h] = L[f - g] = L[f] - L[g] = 0 \text{ para todo } s > \alpha.$$

Definamos $\bar{h}(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau$ donde β es cualquier número real $> \alpha$. Como $e^{-\beta\tau}$ es continua y $h(\tau)$ es continua por tramos, entonces por el lema 6 con $f(\tau) = e^{-\beta\tau} h(\tau)$ se tiene que

$$\bar{h}(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau$$

es continua en cualquier intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$ y, además, por dicho lema $\bar{h}(t)$ es de clase E con $\bar{h}(0) = \int\limits_0^0 e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau = 0$ y $\bar{h}(\infty) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau = 0$ por ser $\beta > \alpha$

$$H(\beta) = L[h](\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty e^{-\beta\tau} [f(\tau) - g(\tau)]\, d\tau = L[f](\beta) - L[g(\beta)] = 0.$$

Entonces $\bar{h}(\infty) = H(\beta)$.

Además

$$H(s + \beta) = L[h](s + \beta) = \int_0^\infty e^{-(s+\beta)} h(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{\beta t} h(t)\, dt.$$

Integrando por partes, haciendo $u = e^{-st}$ y $dv = e^{-\beta t} h(t)\, dt$ tenemos

$$du = -se^{-st} \quad \text{y} \quad v(t) = \int_0^t e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau$$

y resulta

$$\begin{aligned} H(s + \beta) &= u(t)v(t)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} v(t)\, dt \\ &= e^{-st} \int_0^\infty e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau + s \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau \right) dt \\ &= e^{-st} \bar{h}(t)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \bar{h}(t)\, dt = 0 + s \int_0^\infty e^{-s\tau} \bar{h}(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

por ser $\bar{h}(0) = \bar{h}(\infty) = 0$. Como $(s+\beta) \geq \alpha$, entonces $H(s+\beta) = \int_0^\infty e^{-(s+\beta)t} h(t)\, dt = 0$ para todo $s \geq 1$ por ser $\beta > \alpha$, lo que implica que $\int\limits_0^\infty e^{-s\tau} \bar{h}(\tau)\, d\tau = 0$ para todo $s \geq 1$. Sea $z(t) = e^{-t}$, entonces $\int\limits_0^1 s^{s-1} \bar{h}(-\ln z)\, dz = 0$ para todo $s \geq 1$, ya que cuando $z = 1$ se tiene $(-\ln z) = 0$, entonces $\bar{h}(-\ln z) = \bar{h}(0) = 0$ y de $z = e^{-t}$ se deduce $t = -\ln z$, por tanto $z \to 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad t \to \infty$ y, en consecuencia,

$$\bar{h}(-\ln z) = \lim_{z\to 0^+} \bar{h}(-\ln z) = \lim_{t\to\infty} \bar{h}(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\beta\tau} h(t)\, d\tau = \int_0^\infty e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau = \bar{h}(\infty) = 0$$

y por consiguiente tenemos que $\bar{h}(-\ln z)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ y el lema 7 implica que $\bar{h}(-\ln z) = 0$ para todo z en el intervalo $[0, 1]$, donde $\bar{h}(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau = 0$ para todo $t \geq 0$, lo que implica a su vez que $I(t) = \int\limits_a^t e^{-\beta\tau} h(\tau)\, d\tau = 0$ para todo a arbitrario con $a \geq 0$; supongamos que h es continua en un intervalo (a, b), como $I(t)$ es idénticamente cero en este intervalo, su derivada $I'(t) = e^{-\beta t} h(t)$ también es idénticamente cero en este intervalo (a, b). Como $e^{-\beta t} \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$, entonces $h(t)$ es idénticamente cero en este intervalo, así hemos probado que $h(t)$ es cero sobre todo intervalo abierto (a, b) donde h es continua. Como h es de clase E es seccionalmente continua, sean $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ los puntos de discontinuidad de h en $[a, \infty)$ entonces $h(t) \equiv 0$ en los intervalos $(a, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$ y existen $h(t_i^+)$, $h(t_i^-)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $h(a^+)$, entonces por la continuidad de h se tiene $h(a^+) = h(a) = 0$; $h(t_i^+) = h(t_i^-) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces hemos demostrado que si $L[f] = L[g]$, entonces $h(t) = f(t) - g(t) = 0$ para todo $t \in [0, \infty)$ y, en consecuencia, la aplicación L es inyectiva y tiene inversa $L^{-1} : L(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ y se tiene que $F(s) = L[f(t)] \;\Leftrightarrow\; f(t) = L^{-1}[F(s)]$. ■

Lema 8. *Sean c_1, c_2 constantes reales arbitrarias y $F_1[s], F_2[s]$ las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Entonces*

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 L^{-1}[F_1(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)].$$

Proof. Sean $F_1(s)$ y $F_2(s)$ las transformadas inversas de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Entonces $F_1(s) = L[f_1(t)] \Leftrightarrow L^{-1}[F_1(s)] = f_1(t)$ y $F_2(s) = L[f_2(t)] \Leftrightarrow f_2(t) = L^{-1}[F_2(s)]$. Por el lema 5 tenemos que

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] &= L^{-1}\{L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\} \\ &= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ &= c_1 L^{-1}[F_1(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)]. \end{aligned}$$

Entonces hemos probado que el operador L^{-1} es lineal. ■

6. Primer modelo a considerar

Supongamos que William está enamorado de Zelda, pero Zelda es una amante inconstante, voluble, cuanto más William le ama ella comienza a no gustarle; pero cuando él pierde interés por ella, sus sentimientos por él reviven. Él por otra parte, tiende a demostrarle que su amor crece cuando ella le ama y se convierte en odio cuando le odia. Determinemos la ley que rige los sentimientos de William y los de Zelda.

Sean $\omega(t)$ = los sentimientos de William por Zelda en el instante t, $z(t)$ = los sentimientos de Zelda por William en el instante t donde los valores positivos de ω y z significan amor, valores negativos significan odio, las unidades exactas en las cuales estas variables pueden ser medidas se dejan a la imaginación de los lectores. Asumimos que las funciones $\omega(t)$ y $z(t)$ son continuamente diferenciables con respecto a t para $t > 0$, con primeras derivadas continuas, son de clase E y de orden exponencial α.

La velocidad con que varían los sentimientos de una persona en el tiempo es directamente proporcional a los sentimientos de la otra. Así tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \omega'(t) = az(t); & \omega(0) = \alpha \\ z'(t) = -b\omega(t); & z(0) = \beta \end{array}\right\} \tag{1}$$

donde a y b son constantes positivas, el signo $(-)$ muestra que z decrece cuando ω es positiva y recíprocamente ω crece cuando z es positiva, α y β denotan los sentimientos iniciales de ω y z respectivamente.

Así hemos construido el modelo matemático 1, ahora debemos hacer su análisis y determinar las soluciones del sistema (1) para ver como evolucionan las relaciones amorosas de William y Zelda; usaremos la transformada de Laplace real en dicho análisi.

Tenemos de (1) que

$$\omega''(t) = az'(t) = a(-b\omega(t)) \Leftrightarrow \omega''(t) + ab\omega(t) = 0. \tag{2}$$

Busquemos una solución de (2) en la forma $\omega(t) = Ae^{\lambda t}$ con A y λ constantes con $A \neq 0$, tenemos que $\omega'(t) = A\lambda e^{\lambda t}$; $\omega''(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$. Reemplazando en (2) resulta

$$\omega''(t) + ab\omega(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t} + abAe^{\lambda t} = Ae^{\lambda t}[\lambda^2 + ab] = 0 \text{ si y solo si } \lambda^2 + ab = 0$$

cuyas raíces son complejas y en consecuencia ω y z son combinaciones de $\cos\sqrt{ab}t$ y $\operatorname{sen}\sqrt{ab}t$, entonces existen constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ tales que

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \alpha_1 \cos\sqrt{ab}t + \beta_1 \operatorname{sen}\sqrt{ab}t \\ z(t) &= \alpha_2 \cos\sqrt{ab}t + \beta_2 \operatorname{sen}\sqrt{ab}t \end{aligned}$$

Como $\omega(0) = \alpha$ y $z(0) = \beta$ tenemos

$$\left.\begin{array}{ll} \omega(t) = \alpha\cos\sqrt{ab}t + \beta_1 \operatorname{sen}\sqrt{ab}t: & \omega(0) = \alpha;\ \omega'(0) = \beta_1\sqrt{ab} \\ z(t) = \beta\cos\sqrt{ab}t + \beta_2 \operatorname{sen}\sqrt{ab}t: & z(0) = \beta;\ z'(0) = \beta_2\sqrt{ab} \end{array}\right\}$$

Continuamos el análisis usando la transformada de Laplace.

Como $\cos\sqrt{ab}t$ y $\operatorname{sen}\sqrt{ab}t$ son acotadas, entonces son de orden exponencial y por el lema 2 $\omega(t)$ y $z(t)$ son de orden exponencial y como son de clase E por hipótesis, entonces por el lema 3 existen las transformadas de Laplace $W(s) = L[\omega(t)]$ y $Z(s) = L[z(t)]$, entonces por el lema 5 y la linealidad de la transformada de Laplace se tiene

$$\begin{array}{l} sL[\omega(t)] - \omega(0) = L[\omega'(t)] = L[az(t)] = aL[z(t)] = aZ(s) \\ L[z'(t)] = sL[z(t)] - z(0) = L[-b\omega(t)] = -bL[\omega(t)] = -bW(s) \end{array} \tag{3}$$

y tenemos el sistema

$$\begin{aligned} sW(s) - \alpha &= aZ(s) \\ sZ(s) - \beta &= -bW(s) \end{aligned}$$

el cual tiene solución única y resulta

$$W(s) = \frac{\alpha + aZ(s)}{s} = \frac{\alpha + a\left[\frac{\beta - bW(s)}{s}\right]}{s} = \frac{\alpha s + a\beta - abW(s)}{s^2}$$

y se deduce

$$s^2W(s) + abW(s) = W(s)[s^2 + ab] = \alpha s + a\beta$$

y se tiene

$$W(s) = \frac{\alpha s + a\beta}{s^2 + ab} = \alpha\frac{s}{s^2 + ab} + \frac{a\beta}{\sqrt{ab}}\frac{\sqrt{ab}}{s^2 + ab}.$$

Como $W(s) = L[\omega(t)]$ de los ejemplos 2; 4 y la linealidad de la transformada se deduce

$$L[\omega(t)] = \alpha L[\cos\sqrt{ab}t] + \frac{a\beta}{\sqrt{ab}}L[\operatorname{sen}\sqrt{ab}t].$$

Aplicando la transformada L^{-1} y el lema 8 resulta

$$\omega(t) = \alpha\cos\sqrt{ab}t + \beta\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{sen}\sqrt{ab}t.$$

En forma análoga se deduce

$$z(t) = \beta\cos\sqrt{ab}t - \alpha\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{sen}\sqrt{ab}t.$$

Podemos escribir las ecuaciones para $\omega(t)$ y $z(t)$ en forma compacta introduciendo el ángulo de fase ϕ y haciendo $\tan\phi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}$, donde $0 \le \phi < 360°$ y el cuadrante está determinado por los signos de α y β. Por ejemplo, $\alpha > 0$ y $\beta < 0$ implican que ϕ está en el cuarto cuadrante donde $270° < \phi < 360°$.

Lema 9. *Si* $\tan\phi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}$, *entonces*

I) $\alpha = \sqrt{\frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}} \cdot \cos\phi$

II) $\sqrt{\frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}} \cdot \operatorname{sen}\phi = \beta\sqrt{\frac{a}{b}}$

III) $\sqrt{\frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{a}} \cdot \operatorname{sen}\phi = \beta$

IV) $\sqrt{\frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{a}} \cdot \cos\phi = \alpha\sqrt{\frac{b}{a}}$

Proof. Tenemos que $\tan\phi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}$, entonces el cateto opuesto al ángulo ϕ es $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}$. El cateto adyacente al ángulo ϕ es igual a 1 y la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo es

$$\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}}$$

y resulta

I) $\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\cdot\cos\phi=\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}}=\alpha.$

II) $\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\cdot\operatorname{sen}\phi=\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\cdot\dfrac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}}{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}}=\beta\sqrt{\dfrac{a}{b}}.$

III) $\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\cdot\operatorname{sen}\phi=\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\cdot\dfrac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}}{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}}=\dfrac{\frac{\beta}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}=\beta.$

IV) En forma análoga se tiene $\sqrt{\dfrac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\cdot\cos\phi=\alpha\sqrt{\dfrac{b}{a}}.$ ■

De acuerdo al lema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\omega(t)&=\alpha\cos\sqrt{ab}t+\beta\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{sen}\sqrt{ab}t\\
&=\left(\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\cos\phi\right)\cos\sqrt{ab}t+\left(\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\operatorname{sen}\phi\right)\operatorname{sen}\sqrt{ab}t\\
&=\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\left[\cos\phi\cos\sqrt{ab}t+\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\sqrt{ab}t\right]=\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}\cos(\sqrt{ab}t-\phi).
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$\begin{aligned}
z(t)&=\beta\cos\sqrt{ab}t-\alpha\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{sen}\sqrt{ab}t\\
&=\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\operatorname{sen}\phi\cos\sqrt{ab}t-\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\cos\phi\operatorname{sen}\sqrt{ab}t\\
&=\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\left[\operatorname{sen}\phi\cos\sqrt{ab}t-\cos\phi\operatorname{sen}\sqrt{ab}t\right]\\
&=-\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\sqrt{ab}t-\operatorname{sen}\phi\cos\sqrt{ab}t)\right]=-\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}\operatorname{sen}(\sqrt{ab}t-\phi).
\end{aligned}$$

Las gráficas de $\omega(t)$ y $z(t)$ se explicarán a continuación. Tomemos $a>b$. Como $a>b$ tenemos las cadenas de desigualdades

$$-\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}<-\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}<0<\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}<\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}}.$$

Si iniciamos la gráfica de $\omega(t)$ en un t tal que

$$0<\alpha<\omega(t)<\beta<\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{a}}<\sqrt{\frac{b\alpha^2+a\beta^2}{b}},$$

entonces $\omega(t)$ tendrá un máximo en $t_0 = \frac{\phi}{\sqrt{ab}}$ y el valor de dicho máximo es $\sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}}$ y tendrá un mínimo en $t = t_2$ cuando $\sqrt{ab}t_2 - \phi = \pi$, o sea, cuando $t_2 = \frac{\phi+\pi}{\sqrt{ab}}$ con $\omega(t_2) = -\sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}}$ y existirá un t_1 con $t_0 < t_1 < t_2$ tal que $\omega(t_1) = 0$, también un t_4 donde ω tiene un máximo relativo con $\omega(t_4) = \sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}}$ y por continuidad existirá un t_3 con $t_2 < t_3 < t_4$ tal que $\omega(t_3) = 0$.

Si $z(t)$ se inicia en un t tal que

$$0 < \alpha < \beta < z(t) < \sqrt{\frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{a}} = z(t_0)$$

entonces como $\omega(t)$ es positiva para tales t, del sistema (1) se deduce que $z(t)$ debe ser decreciente para dichos t y tendrá un mínimo en un t_1^* donde $\sqrt{ab}\,t_1^* - \phi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_1^* = \frac{2\phi+\pi}{2\sqrt{ab}} = t_1$, ya que $\omega(t)$ y $z(t)$ tienen el mismo ángulo y alcanzará un máximo en un t_3^* tal que

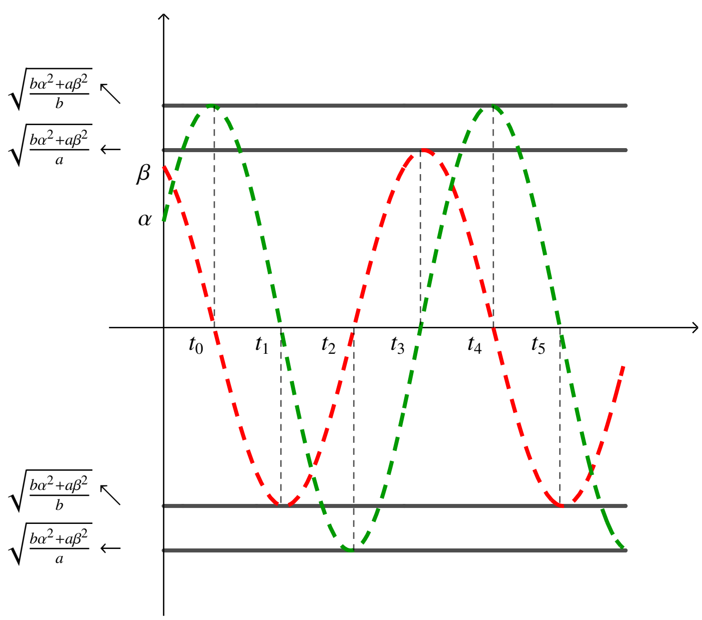
$$\sqrt{ab}\,t_3^* - \phi = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t_3^* = \frac{2\phi + 3\pi}{2\sqrt{ab}}$$

y tendrá un mínimo en un t_4^* tal que

$$\sqrt{ab}\,t_4^* - \phi = 2\pi \Leftrightarrow t_4^* = \frac{\phi + 2\pi}{\sqrt{ab}} = t_4$$

y a partir de $t_4^* = t_4$ comienza la misma situación que en t_0 para $\omega(t)$ y $z(t)$ y el proceso se repite lo que implica que William y Zelda están en un ciclo permamente de amor y odio.

El gráfico de $\omega(t)$ y $z(t)$ se muestra en la gráfica de abajo



Interpretación de las relaciones amorosas de William y Zelda. En el tiempo $t_0 = \frac{\phi}{\sqrt{ab}}$ el amor de William por Zelda se encuentra en los más alto y Zelda es neutral en su amor hacia William, mientras el tiempo transcurre, o sea, para $t > t_0$ Zelda comienza a perderle cariño a William ($z(t) < 0$) y William también disminuye su amor por Zelda hasta cero en $t_1 = t_0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\phi}{\sqrt{ab}} + \frac{\pi}{2}$, donde el amor de Zelda por William ha llegado a un mínimo en $\omega(t_1) = -\sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{a}}$, para $t > t_1$ William inicia su indiferencia hacia Zelda quien comienza a mirar a William con mejores ojos aumentando su cariño hacia él y en t_2 donde $\sqrt{ab}t_2 - \phi = \pi$, o sea, en $t_2 = \frac{\phi+\pi}{\sqrt{ab}}$ donde Zelda ha dejado su indiferencia por William, pero desafortunadamente la falta de cariño por Zelda ha llegado a su mínima expresión en $\omega(t_2) = -\sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}}$. Para $t > t_2$ Zelda comienza a mirar a William con otros ojos aumentando su cariño hasta $t_3 = \frac{2\phi+3\pi}{2\sqrt{ab}}$, donde Zelda está en la cúspide de su cariño por William en $z(t_3) = \sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{a}}$ y el amor de William en t_3 es neutral. Para $t > t_3$ el amor de Zelda hacia William comienza a enfriarse nuevamente pero el amor de William por ella comienza a crecer hata alcanzar su mayor intensidad en $t_4 = \frac{\phi+2\pi}{\sqrt{ab}}$ con $\omega(t_4) = \sqrt{\dfrac{b\alpha^2 + a\beta^2}{b}}$ y entonces volvemos a tener otra vez la misma situación que en t_0 y a partir de aquí, o sea, en t_0 el proceso se repite en cada intervalo de la forma $[t_0 + 2k\pi, t_4 + 2k\pi]$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, por lo tanto estamos en presencia de una relación periódica de amor y odio entre William y Zelda y en efecto ellos se aman el uno al otro simultáneamente solamente en una cuarta parte del ciclo.

7. Espacio de fase

Eliminando el parámetro t en el sistema (1) resulta

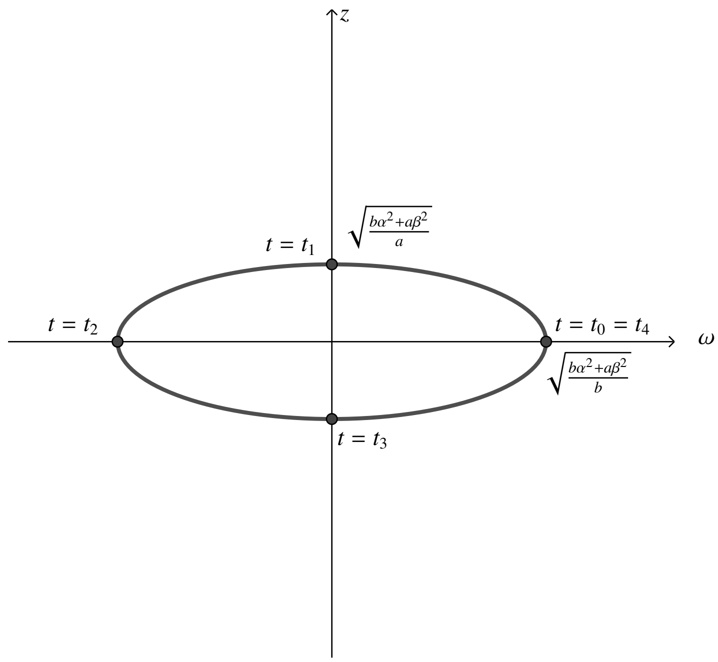
$$\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{d\omega}{dz} = -\frac{az}{b\omega} \Leftrightarrow b\omega\, d\omega + az\, dz = 0,$$

integrando en $[0, t]$ resulta

$$\begin{aligned}\frac{b\omega^2}{2} + \frac{az^2}{2} = \frac{b\omega^2(0) + az^2(0)}{2} &\Leftrightarrow \frac{b\omega^2}{b\omega^2(0) + az^2(0)} + \frac{az^2}{b\omega^2(0) + az^2(0)} \\ &= \frac{b\omega^2}{b\alpha^2 + a\beta^2} + \frac{az^2}{b\alpha^2 + a\beta^2} = 1\end{aligned} \tag{4}$$

cuya gráfica en el plano z, ω es una elipse con $a > b$, en dicha elipse pensamos en t como un parámetro. Los correspondientes valores para $t = t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$ están señalados en la elipse y obtenemos los mismos puntos otra vez cuando nos movemos en sentido contrareloj en la elipse corroborando con esto que estamos, en un movimiento periódico, o sea, en una relación permanente de amor y odio entre William y Zelda.

Gráfico de (2) con $a > b$.



8. Segundo modelo de amores correspondidos

Consideramos un segundo modelo entre William y Zelda, pero ahora con la diferencia que William ama mucho a Zelda y también Zelda ama mucho a William cuando se aman y que sienten mucho odio entre ellos cuando se odian. Estudiamos la evolución de la relación amorosa entre William y Zelda y el espacio de fase asociado al sistema resultante, de acuerdo a nuestra hipótesis en este caso obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \omega'(t) = az(t); & \omega(0) = \alpha \\ z'(t) = b\omega(t); & z(0) = \beta \end{array}\right\} \tag{5}$$

donde a y b son constantes positivas y representan las constantes de proporcionalidad de los sentimientos de la relación amorosa entre William y Zelda, α y β son los sentimientos iniciales de William y Zelda. Consideramos que $\omega(t)$ y $z(t)$ satisfacen las mismas hipótesis aceptadas para el sistema (1), tenemos el sistema (5) que

$$\omega''(t) = az'(t) = ab\omega(t) \Leftrightarrow \omega''(t) - ab\omega(t) = 0.$$

Si buscamos como antes una solución de la forma $\omega(t) = Ae^{\lambda t}$ llegamos a que $\omega(t)$ es solución si y solo si $\lambda^2 - ab = 0$ cuyas raíces reales son $\sqrt{ab}$ y $-\sqrt{ab}$ lo que implica que las soluciones $\omega(t)$ y $z(t)$ son combinaciones lineales de $e^{\sqrt{ab}t}$ y $e^{-\sqrt{ab}t}$, por tanto existen constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ tales que

$$\left.\begin{array}{ll} \omega(t) = \alpha_1 e^{\sqrt{ab}t} + \beta_1 e^{-\sqrt{ab}t}; & \omega(0) = \alpha \\ z(t) = \alpha_2 e^{\sqrt{ab}t} + \beta_2 e^{-\sqrt{ab}t}; & z(0) = \beta \end{array}\right\} \tag{6}$$

Como $\omega(t)$ y $z(t)$ son de clase E y de orden exponencial α, entonces existen las transformadas de Laplace de $\omega(t)$ y $z(t)$, sean estas $W(s) = L[\omega(t)]$ y $Z(s) = L[z(t)]$, entonces por el lema 5 y la linealidad de la transformada de Laplace tenemos

$$
\begin{aligned}
SL[\omega(t)] - \omega(0) = L[\omega'(t)] = L[az(t)] = aL[z(t)] = aZ(s)\\
L[z'(t)] = sL[z(t)] - z(0) = L[b\omega(t)] = bL[\omega(t)] = bW(s).
\end{aligned}
$$

Recordando que $W(s) = L[\omega(t)] = L[\omega(t)](s)$; $Z(s) = L[z(t)](s)$; $\omega(0) = \alpha$ y $z(0) = \beta$ tenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
sW(s) - \alpha = aZ(s); \quad \omega(0) = \alpha\\
sZ(s) - \beta = bW(s); \quad z(0) = \beta
\end{aligned}
$$

el cual tiene solución única y resulta

$$W(s) = \frac{\alpha + aZ(s)}{s} = \frac{\alpha + a\left[\frac{\beta + b\omega(s)}{s}\right]}{s} = \frac{\alpha s + a\beta + abW(s)}{s^2},$$

entonces

$$s^2 W(s) - abW(s) = (s^2 - ab)W(s) = \alpha s \ + a\beta;$$

así

$$
\begin{aligned}
W(s) &= \frac{\alpha s + a\beta}{s^2 - ab} = \alpha\left(\frac{s}{s^2 - ab}\right) + \frac{a\beta}{\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{ab}}{s^2 - ab}\right); \quad s^2 \neq ab\\
&= \alpha L[\cosh \sqrt{ab}t] + \frac{a\beta}{\sqrt{ab}} L[\operatorname{senh} \sqrt{ab}t].
\end{aligned}
$$

Aplicando la transformada inversa y su linealidad se tiene

$$
\begin{aligned}
L^{-1}[W(s)] = L^{-1}(L[\omega(t)]) = \alpha L^{-1}(L[\cosh \sqrt{ab}t]) + \frac{a\beta}{\sqrt{ab}} L^{-1}(L[\operatorname{senh} \sqrt{ab}t])\\
\Leftrightarrow \omega(t) = \alpha \cosh \sqrt{ab}t + \frac{a\beta}{\sqrt{ab}} \operatorname{senh} \sqrt{ab}t.
\end{aligned}
$$

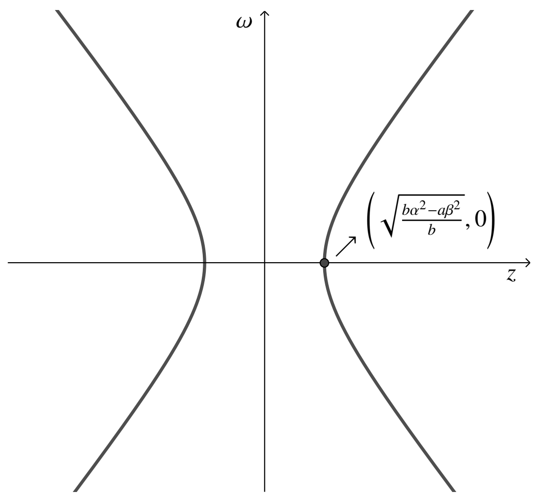
Análogamente se tiene $z(t) = \beta \cosh \sqrt{ab}t + \alpha \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{senh} \sqrt{ab}t$. Determinemos el espacio de fase del sistema (5). Tenemos

$$\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{d\omega}{dz} = \frac{az}{b\omega} \Leftrightarrow b\omega\, d\omega - az\, dz = 0.$$

Integrando en $[0, t]$ resulta

$$
\begin{aligned}
\frac{b\omega^2}{2} - \frac{az^2}{2} &= \frac{b\omega^2(0) - az^2(0)}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{b\omega^2}{b\omega^2(0) - az^2(0)} - \frac{az^2}{b\omega^2(0) - az^2(0)} = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{\omega^2}{\frac{b\alpha^2 - a\beta^2}{b}} - \frac{z^2}{\frac{b\alpha^2 - a\beta^2}{a}} = 1
\end{aligned}
$$

Con la hipótesis adicional $|\alpha| > |\beta|$ se tiene $\frac{|\alpha|}{|\beta|} > 1$, entonces $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > 1 > \frac{b}{a}$. Por tanto $(a\alpha^2 - b\beta^2) > 0$ y en consecuencia $\frac{a\alpha^2 - b\beta^2}{b} > \frac{a\alpha^2 - b\beta^2}{a}$ y por tanto el eje conjugado de la hipérbola es el eje ω, ahora por la proporcionalidad de las razones de crecimiento de los sentimientos de William y Zelda el espacio de fase es la hipérbola señalada abajo.



9. Tercer modelo

En este caso tenemos que la velocidad de crecimiento de los sentimientos de William es proporcional a los sentimientos de Zelda con constante de proporcionalidad $a > 0$ y la velocidad de crecimiento de los sentimientos de Zelda hacia William permanece constante, resultando el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \omega'(t) = az(t); & \omega(0) = \alpha \\ z'(t) = k; & z(0) = \beta \end{array}\right\} \tag{7}$$

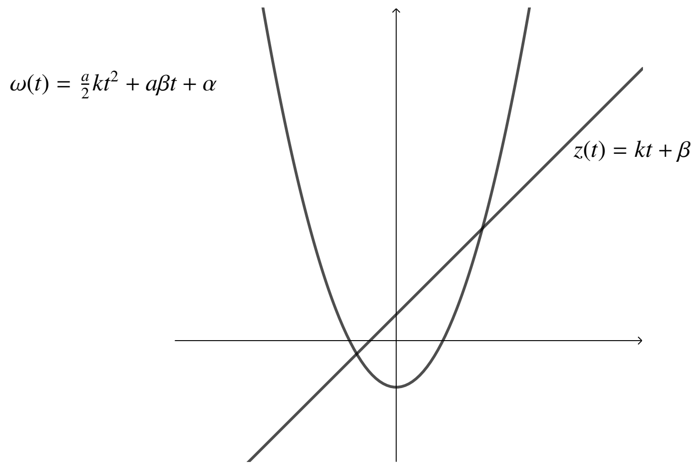
con α y β los sentimientos iniciales de William y Zelda respectivamente, ω y z funciones continuamente diferenciales con respecto a t, t en $\mathbb{R}$, y ω con primeras derivadas continuas. Para estudiar la evolución del sistema (7) podemos usar la transformada de Laplace como en los modelos anteriores, pero como el sistema es no acoplado su solución resulta más sencilla. De la segunda ecuación de (7) deducimos que $z(t) = kt + z(0) = kt + \beta$. Reemplazando en la primera ecuación de (7) obtenemos

$$\omega'(t) = a(kt + \beta) = akt + a\beta$$

de donde resulta

$$\omega(t) = \frac{akt^2}{2} + a\beta t + \omega(0) = \frac{akt^2}{2} + a\beta t + \alpha.$$

Esta es la ecuación de una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si k es positivo o negativo, cuando $k > 0$ el espacio de fase está formado por una parábola que abre hacia arriba y la recta $z(t) = kt + \beta$ con pendiente positiva. Del espacio de fase no podemos deducir si Zelda ama más a William o si William ama más a Zelda.



Referencias

[1] Strogatz, S. H. Love affairs and differential equations. Mathematics 61 (1988), 35.

[2] Dreyer, T. P. Modelling with Ordinary Differential Equations. CRC Pres 1993.

[3] Apostol, T. M. Análisis matemático. Editorial Reverte (1976).