UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. 04 , № 2, (2017)

Revista de matemática de la universidad del Atlántico (2017) Pag. 32-40

La estructura de digrupo generalizado

The generalized digroup structure

Olga P. Salazar-Díaz[1]
[1] *Universidad Nacional de Colombia, Medellín - Colombia*
e-mail:opsalazard@unal.edu.co

Raúl Velásquez[2]
[2] *Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia*
e-mail:raul.velasquez@udea.edu.co

Resumen

El concepto de digrupo ha sido propuesto como una extensión de grupos continuos cuyo espacio tangente es un álgebra de Leibniz. En este artículo estudiamos una generalización de la estructura de digrupo en la cual no requerimos que los inversos sean necesariamente bilaterales. Nosotros caracterizamos un digrupo generalizado como una unión de grupos y como un producto directo. También exploramos propiedades algebraicas de tipo grupo. **Palabras claves:** Coquecigrue, diálgebra, digrupo, homomorfismo, unidades barra .

Abstract

The concept of digroup has been proposed as an extension of continuous groups whose tangent space is a Leibniz algebra. In this paper we study a generalization of the digroup structure in which we don't require bilateral inverses. We characterize a generalized digroup as an union of groups and as a direct product. Besides, we explore algebraic properties of group type.

Keywords: Coquecigrue, dialgebra, digroup, homomorphism, bar-units.

---

1. Introducción

Las álgebras de Leibniz fueron introducidas de manera independiente por A. Bloh (en [1] como D-álgebra), en 1965, y por J. L. Loday (en [8]), en 1989, como una generalización de las álgebras de Lie.

Definición 1 *Una* **álgebra de Leibniz sobre un campo** *K es un espacio vectorial L sobre K con un producto bilineal llamado* **corchete de Leibniz** $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ *que satisface la identidad de Leibniz:*

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]], \quad \forall x,y,z \in L.$$

Si el corchete es antisimétrico, entonces L es un álgebra de Lie.

Un problema abierto en el contexto de álgebras de Leibniz, conocido como el problema Coquecigrue, consiste en encontrar una generalización del tercer teorema de Lie theorem el cual consiste en encontrar una variedad con una estructura algebraica compatible que funcione como el concepto de grupo de Lie, cuyo espacio tangente sea la correspondiente álgebra de Leibniz.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Lie group} & \rightarrow & \textbf{Lie algebra} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ? & \rightarrow & \textbf{Leibniz algebra} \end{array}$$

La primera aproximación a resolver el problema del Coquecigrue fue dada por A. Bloh (ver ejemplo 1 en [1]).

De manera independiente M. Kinyon [6], R. Felipe [4] y K. Liu [7] propusieron una generalización de grupos como un candidato para el problema Coquecigrue, los digrupos.

La estructura de *digrupo de Lie* conduce a consideraciones en ciertas álgebras de Leibniz basadas en el estudio de vectores en el espacio tangente de algunos elementos especiales. De aquí se obtiene una solución parcial al problema Coquecigrue (ver [6] y [13]).

Nosotros estudiamos una estructura ligeramente diferente, permitiendo inversos no bilaterales. Aquí presentamos las propiedades básicas conceptos que de manera natural surgen al comparar los digrupos generalizados con los grupos.

Todo el trabajo presentado está basado en el artículo [18] y por eso no hacemos ninguna prueba aquí.

2. Digrupos generalizados

Definición 2 *Un* **digrupo generalizado** *D es un conjunto con dos operaciones asociativas $\dashv$ y $\vdash$ que satisfacen:*

(1) Para todo x, y, z en D:
$x \vdash (y \dashv z) = (x \vdash y) \dashv z$,
$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z)$,
$(x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z$.

(2) Existe (por lo menos) un elemento e en D, tal que para todo x en D:
$x \dashv e = x = e \vdash x$. Tales elementos e son llamados **unidades barra***, al conjunto de unidades barra lo denotamos por E y lo llamamos el halo de D.*

(3) Para una unidad barra específica e y para cada x en D, existen inversos $x_{r_e}^{-1}$ y $x_{l_e}^{-1}$ en D tales que $x \vdash x_{r_e}^{-1} = e$ y $x_{l_e}^{-1} \dashv x = e$.

Nota 1 *Un digrupo generalizado es un grupo si las operaciones binarias $\dashv$ y $\vdash$ coinciden.*
En particular, si existe $\eta \in D$ tal que $\eta \dashv x = x$, para todo $x \in D$, $x \vdash \eta = x$, para todo $x \in D$, entonces las operaciones coinciden.

Ejemplo 1 *Sea G un grupo con unidad e, y X un G-conjunto bajo la acción $a \bullet \alpha$. Entonces, $D = G \times X$ tiene estructura de digrupo generalizado con las operaciones*

$$(a, \alpha) \vdash (b, \beta) = (ab, a \bullet \beta),$$
$$(a, \alpha) \dashv (b, \beta) = (ab, \alpha)$$

En este caso, $E = \{(e, \alpha) : \alpha \in X)\}$. Más aún si $(e, \xi) \in E$, entonces

$$(a, \alpha)^{-1}_{l_\xi} = (a^{-1}, \xi) \quad y \quad (a, \alpha)^{-1}_{r_\xi} = (a^{-1}, a^{-1} \bullet \xi)$$

Algunas propiedades básicas que pueden enunciarse y que se derivan de las definiciones son:

Proposición 1 *Sea D un digrupo generalizado con una unidad barra específica e. Entonces, para todo x en D,*

1. *$x^{-1}_{l_e} \vdash e$ y $e \dashv x^{-1}_{r_e}$ son inversos a derecha y a izquierda de x, respectivamente.*
2. *$e \dashv x^{-1}_{l_e} = x^{-1}_{l_e}$ y $x^{-1}_{r_e} \vdash e = x^{-1}_{r_e}$.*
3. *$x^{-1}_{l_e}$ y $x^{-1}_{r_e}$ son únicos, $x^{-1}_{l_e} \vdash e = x^{-1}_{r_e}$ y $e \dashv x^{-1}_{r_e} = x^{-1}_{l_e}$.*
4. *$x \dashv x^{-1}_{r_e} = x \dashv x^{-1}_{l_e}$ y $x^{-1}_{l_e} \vdash x = x^{-1}_{r_e} \vdash x$ son unidades-barra en D.*
5. *$(x^{-1}_{r_e})^{-1}_{r_e} = x \vdash e$ y $(x^{-1}_{l_e})^{-1}_{l_e} = e \dashv x$*
6. *$y \dashv x^{-1}_{r_e} = y \dashv x^{-1}_{l_e}$ y $x^{-1}_{l_e} \vdash y = x^{-1}_{r_e} \vdash y$, para cualquier x, y en D.*
7. *$(x \vdash y)^{-1}_{r_e} = (x \dashv y)^{-1}_{r_e} = y^{-1}_{r_e} \vdash x^{-1}_{r_e} = y^{-1}_{l_e} \vdash x^{-1}_{r_e}$ y tenemos identidades similares para los inversos a izquierda.*

Hay otras propiedades que podemos obtener de las anteriores.

3. Subconjuntos especiales de un digrupo generalizado

En el proceso de relacionar con la estructura de grupo podemos obtener unas primeras definiciones.

Definición 3 *Sea $(D; \vdash, \dashv)$ un digrupo generalizado y $S \subset D$. Decimos que S es un subdigrupo de D ($S \leq D$) si S, con los productos en D restringidos a S, es un digrupo generalizado.*

Este subconjunto especial satisface

Proposición 2 *Sea S un subdigrupo de D.*

1. *$E_S = E_D \cap S$*
2. *$S^l_{\xi_S} = G^l_{\xi_S} \cap S \leq G^l_{\xi_S}$ y $S^r_{\xi_S} = G^r_{\xi_S} \cap S \leq G^r_{\xi_S}$.*

Lema 1 *Sea D un digrupo generalizado con unidad barra específica e, entonces*

$$\xi_{l_e}^{-1} = \xi_{r_e}^{-1} = e,$$

para todo $\xi \in E$. Además, $E = \{e\}$ si y solo si D es un grupo.

Los resultados previos implican

$$E = \left\{x_{l_e}^{-1} \vdash x | x \in D\right\} = \left\{x \dashv x_{r_e}^{-1} | x \in D\right\} = \left\{x \in D | x_{l_e}^{-1} = x_{r_e}^{-1} = e\right\}$$

De manera natural surge también el siguiente concepto.

Definición 4 *Sea $(D, \vdash, \dashv)$ digrupo generalizado y sea N un subdigrupo de D.*

Decimos que N es un **subdigrupo normal** *de D, denotado por $N \trianglelefteq D$ si*

$$x \vdash y \dashv x^{-1} \in N, \quad \forall x \in D, \forall y \in N,$$

i.e., si $x \vdash N \dashv x^{-1} \subset N$, para todo $x \in D$.

Lema 2 *Sea N un subdigrupo de D. Si $x \vdash N = N \dashv x$ para cualquier $x \in D$, entonces $N \trianglelefteq D$.*

Por ejemplo $E \trianglelefteq D$.

Si consideramos el corchete en D definido por

$$[\![x, y]\!] := x \vdash y \dashv x^{-1} \dashv y^{-1}, \quad \forall x, y \in D,$$

entonces $N \trianglelefteq D$ iff $[\![D, N]\!] \subset N$.

Teorema 1 *Sea $(D, \vdash, \dashv)$ un digrupo generalizado y $e \in E$. Para cada $x \in D$, tenemos que $x_{l_e}^{-1} = x_{r_e}^{-1}$ si y solo si e satisface la identidad $x \vdash e \dashv x^{-1} = e$, para cada $x \in D$.*

Nota 2 *Podemos ver que el conjunto de elementos en D con inversos bilaterales respecto a e satisface*

$$B_e := \{x \in D \,|\, x_{l_e}^{-1} = x_{r_e}^{-1}\} = \{x \in D \,|\, x \vdash e \dashv x^{-1} = e\}.$$

Dado $B_e^{-1} = \{x^{-1} \,|\, x \in B_e\}$, tenemos que $(B_e^{-1}, \dashv)$ es un subgrupo de $(G_e^l, \dashv)$ y $(B_e^{-1}, \vdash)$ es un subgrupo de $(G_e^r, \vdash)$.

Lema 3 *Sea D un digrupo generalizado. Para cualquier $e \in E$, tenemos que*

$$E \subseteq B_e, \;\; B_e^{-1} = G_e^l \cap G_e^r \subseteq B_e = Stab_e,$$

donde $Stab_e$ es el estabilizador de e respecto a la acción $x \bullet e = x \vdash e \dashv x^{-1}$.

Estos resultados dicen que B_e es un digrupo generalizado igual a D si y solo si $e \in E$ es un punto fijo de la acción definida por $x \bullet e$.

En general, si e no es un punto fijo, tenemos que $B_e \leq D$.

Ejemplo 2 *En el ejemplo previo* $B_0 = B_1 = \{x_0, x_1, x_4, x_5\}$, $B_0^{-1} = \{x_0, x_4\}$ *y* $B_1^{-1} = \{x_1, x_5\}$. *En general,* $B_e \neq B_\xi$, *para* $e \neq \xi$ *in* E.

De manera independiente, K. Liu [7] y A. Magyar et al en [10]; definieron dos nociones de centro de un digrupo como

$$Z^t(D) = \{x \in D \,:\, y \dashv x = x \vdash y \,,\, \forall y \in D\}$$
$$Z^s(D) = \{x \in D \,:\, y \vdash x = x \dashv y \,,\, \forall y \in D\}$$

Como Z^t y Z^s son subestructuras de D y no son equivalentes, A. Magyar et al consideran que ambas definiciones son candidatas para el concepto de centro de un digrupo.

Para nuestro ejemplo, tenemos que $Z^t(D) = \{x_0, x_1, x_4, x_5\}$ and $Z^s(D) = \emptyset$.

En general, $E \subset Z^t(D)$ y $e \in E$ es un elemento en $Z^s(D)$ si y solo si e es un punto fijo de la acción $\bullet$.

Definición 5 *Nosotros definimos el centro como* $Z(D) := \{x \in D \,:\, x \vdash y \dashv x^{-1} = y \,,\, \forall y \in D\}$.

Pasamos ahora a definir un par de conceptos que son de importancia en una de las caracterizaciones de digrupo.

Definición 6 *Sea D un digrupo generalizado, denotamos los conjuntos de inversos a izquierda y a derecha respecto a la unidad barra e por G_e^l y G_e^r respectivamente.*

Proposición 3 *Sea D un digrupo generalizado con una unidad barra específica e, entonces $(G_e^l, \dashv)$ y $(G_e^r, \vdash)$ son grupos isomorfos con unidad e.*

Más aún, el isomorfismo está dado por

$$\begin{array}{cccc} \phi: & (G_e^l, \dashv) & \longrightarrow & (G_e^r, \vdash) \\ & x_{l_e}^{-1} & \longmapsto & x_{l_e}^{-1} \vdash e = x_{r_e}^{-1} \end{array}$$

Lema 4 *Sea D un digrupo generalizado con una unidad barra específica e y $\xi \in E$, entonces*

$$G_\xi^l = \xi \dashv G_e^l \quad y \quad G_\xi^r = G_e^r \vdash \xi.$$

Más aún, $G_\xi^l \cong G_\zeta^l \cong G_\xi^r \cong G_\zeta^r$, *para* $\xi, \zeta \in E$.

Ejemplo 3 *El halo de D es $E = \{x_0, x_1\}$ y los inversos son*

$\dashv$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_0	x_2	x_2	x_4	x_4	x_6	x_6
x_1	x_1	x_1	x_3	x_3	x_5	x_5	x_7	x_7
x_2	x_2	x_2	x_4	x_4	x_6	x_6	x_0	x_0
x_3	x_3	x_3	x_5	x_5	x_7	x_7	x_1	x_1
x_4	x_4	x_4	x_6	x_6	x_0	x_0	x_2	x_2
x_5	x_5	x_5	x_7	x_7	x_1	x_1	x_3	x_3
x_6	x_6	x_6	x_0	x_0	x_2	x_2	x_4	x_4
x_7	x_7	x_7	x_1	x_1	x_3	x_3	x_5	x_5

$\vdash$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	x_3	x_2	x_5	x_4	x_7	x_6	x_1	x_0
x_3	x_3	x_2	x_5	x_4	x_7	x_6	x_1	x_0
x_4	x_4	x_5	x_6	x_7	x_0	x_1	x_2	x_3
x_5	x_4	x_5	x_6	x_7	x_0	x_1	x_2	x_3
x_6	x_7	x_6	x_1	x_0	x_3	x_2	x_5	x_4
x_7	x_7	x_6	x_1	x_0	x_3	x_2	x_5	x_4

$e = x_0$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$x^{-1}_{l_e}$	x_0	x_0	x_6	x_6	x_4	x_4	x_2	x_2
$x^{-1}_{r_e}$	x_0	x_0	x_7	x_7	x_4	x_4	x_3	x_3

$e = x_1$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$x^{-1}_{l_e}$	x_1	x_1	x_7	x_7	x_5	x_5	x_3	x_3
$x^{-1}_{r_e}$	x_1	x_1	x_6	x_6	x_5	x_5	x_2	x_2

4. Caracterizaciones

Los digrupos generalizados pueden describirse en términos de estructuras conocidas. Una de tales expresiones y que se puede verificar usando resultados de la sección anterior está dada por

Proposición 4 *Sea D un digrupo generalizado, entonces*

$$D = \dot{\bigcup}_{\xi \in E} G^l_\xi = \dot{\bigcup}_{\xi \in E} G^r_\xi$$

Para la segunda forma de considerar un digrupo generalizado primero veamos.

Teorema 2 *Sea D un digrupo generalizado y sea E el conjunto de unidades barra.*

Para cualquier $e \in E$, tenemos que E es un G^l_e-conjunto respecto a la acción definida por

$$a \bullet_l \xi = a \vdash \xi \dashv a^{-1}, \quad \forall a \in G^l_e, \ \forall \xi \in E.$$

Además, $G^l_e \times E$ es un digrupo generalizado con operaciones

$$(a, \alpha) \vdash (b, \beta) := (a \dashv b, a \vdash \beta \dashv a^{-1}) = (ab, a \bullet_l \beta),$$

$$(a, \alpha) \dashv (b, \beta) := (a \dashv b, \alpha) = (ab, \alpha)$$

La segunda caracterización de digrupos generalizados es una extensión de los resultados de M. Kinyon (ver [6]) y F. Ongay (ver [14]).

Teorema 3 *Sean D, E y G^l_ξ como en el teorema previo, entonces la función*

$$\varphi_l : D \longrightarrow G^l_\xi \times E \ \text{ definida por } \ \varphi_l(x) = (\xi \dashv x, x \dashv x^{-1}_{l_\xi}),$$

proporciona un isomorfismo de digrupos generalizados con inverso

$$\varphi_l^{-1} : G_\xi^l \times E \longrightarrow D \text{ dado por } (a,\alpha) \mapsto \alpha \dashv a.$$

Un digrupo generalizado puede ser visto como un producto cartesiano entre un G-conjunto E y el grupo G, donde el conjunto de unidades barra es $\{e\} \times E$.

Lema 5 *Sea D un digrupo y sea e una unidad barra específica, entonces $x_{l_e}^{-1} = x_{r_e}^{-1}$, para todo $x \in D$, si y solo si e es un punto fijo respecto a la acción $x \bullet \alpha := x \vdash \alpha \dashv x_{l_e}^{-1}$ (i.e. $x \bullet e = e$, para todo $x \in G_e^l$). En este caso tenemos la definición clásica de digrupos.*

5. Homomorfismos

Con la definición de homomorfismo entre digrupos que además de imitar de nuevo un concepto entre grupos, permite enunciar conceptos que ya habíamos definido pero ahora considerando los digrupos generalizados como producto cartesiano.

Definición 7 *Dados dos digrupos generalizados $(D, \vdash, \dashv)$ y $(D', \vdash', \dashv')$ un homomorfismo $f : D \to D'$ es una función tal que*

1. $f(x \vdash y) = f(x) \vdash' f(y)$

2. $f(x \dashv y) = f(x) \dashv' f(y)$

Teorema 4 *Sea $\Psi : D \longrightarrow D'$ un homomorfismo de digrupos generalizados. Entonce existe un único homomorfismo $\Psi' : G_l^\xi \times E \longrightarrow G_l^\xi \times E$ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\Psi} & D' \\ \varphi_l \downarrow & & \downarrow \varphi_l' \\ G_L^\xi \times E & \xrightarrow[\Psi']{} & G_l^{\xi'} \times E' \end{array}$$

donde $\Psi' \equiv (\varphi, \mu)$, con

1. $\varphi : G_l^\xi \longrightarrow G_l^{\xi'}$, *y $\phi(a) = \xi' \dashv \Psi(a)$, es un homomorfismo de grupos.*
2. $\mu : E \longrightarrow E'$, *con $\mu(\alpha) = \Psi(\alpha)$, es un Ψ y φ una función equivariante, i.e.*

$$\mu(x \bullet \alpha) = \Psi(x) \bullet \mu(\alpha) \quad y \quad \mu(a \bullet \alpha) = \Psi(a) \bullet \mu(\alpha),$$

para todo $\alpha \in E$, todo $x \in D$ y todo $a \in G_\xi^l$.

Dada la factorización de un digrupo generalizado $D \cong G_\xi^l \times E$, podemos enunciar definiciones equivalentes para el concepto de subdigrupo y el de subdigrupo normal.

Lema 6 *Si $S \subset D$, entonces $S \leq D$ si y solo existen $H, F \subseteq S$ tales que $H \leq G^l_\xi$ (o $H \leq G^r_\xi$), $F \subseteq E$, F es H invariante (i.e $H \bullet F = F$) y $S \cong H \times F$.*

Teorema 5 *Sea $G \times E$ un digrupo generalizado. Entonce $H \times K \trianglelefteq G \times E$ si y solos si $[\![(a,\alpha),(b,\beta)]\!] \in H \times K$, para todo $(a,\alpha) \in G \times E$ y $(b,\beta) \in H \times K$.*

De manera equivalente, si $([a,b], a \bullet \beta) \in H \times K$.

Podemos concluir entonces acerca de normalidad de un subdigrupo.

Teorema 6 *Sea $G \times E$ un digrupo generalizado y $H \times K \subseteq G \times E$. Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *$H \times K \trianglelefteq G \times E$.*
2. *$(a,\alpha) \vdash (H \times K) \dashv (a,\alpha)^{-1} \subseteq H \times K$ para todo $(a,\alpha) \in G \times E$.*
3. *$(a,\alpha) \vdash (H \times K) = (H \times K) \dashv (a,\alpha)$ para todo $(a,\alpha) \in G \times E$.*
4. *$H \trianglelefteq G$ y $G \bullet K = K$.*

Teorema 7 *Sea $N \leq D$, entonces $N \trianglelefteq D$ si y solo si para cualquier $e \in E$, tenemos que $N^e_l \trianglelefteq G^e_l$, $N^e_r \trianglelefteq G^e_r$ y $D \bullet E_N = E_N$.*

Finalmente, podemos enunciar el primer teorema de isomorfismos de digrupos.

Teorema 8 *Sea $\Psi : D \longrightarrow D'$ un homomorfismo de digrupos generalizados y sea $\Psi' : G^l_\xi \times E \longrightarrow H^l_{\xi'} \times F$ como en el Teorema 4, entonces μ envía $Ker(\varphi)$-órbitas en E conjuntos unitarios en F.*

Además si definimos $Ker(\mu)$ como la relación de equivalencia dada por $\alpha \sim \beta$ si y solo si $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$, y si llamamos

$$G^l_\xi \times E/Ker(\Psi') := (G^l_\xi/Ker(\varphi)) \times (E/Ker(\mu)),$$

entonces

$$G^l_\xi \times E/Ker(\Psi') \simeq \Psi'(G^l_\xi \times E),$$

es decir,

$$D/Ker(\Psi) \simeq \Psi(D).$$

6. Conclusión

A través de este artículo puede verse la relación estrecha entre las estructuras de grupo y de grupo generalizado lo cual permite hacerse preguntas y en muchos casos obtener respuestas acerca de la segunda estructura a partir de lo que se sabe de la primera. Esto permite hacer un avance en el tema de los digrupos generalizados si se considera su aproximación a partir de estructuras conocidas a pesar de existir otros enfoques bajo los cuales se puede pensar el tema.

Referencias

[1] A. Bloh, *On a generalization of Lie algebras notion*, Soviet Math. Dokladi 165 3 (1965) 1450-1452.

[2] S. Covez, *The local integration of Leibniz algebras*, arXiv:1011.4112 [math.RA] 18 Nov 2010.

[3] C. Crompton and L. Scalici, *The structure of digroups*, American Journal of Undergraduate Research, **5** (2) (2006), 21-27.

[4] R. Felipe. *Digroups and their linear representations*, East-West Journal of Mathematics, **8** (2006), no 1, pp 27-48.

[5] A. Frabetti, *Dialgebra (co)homology with coefficient*, in: Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1763, Springer Verlag, 2001, pp. 66-103.

[6] M. Kinyon, *Leibniz algebras, Lie racks and digroups*, J. Lie Theory **17** No. 4 (2007), 99 - 114.

[7] K. Liu, *A class of group-like objects*, arXiv.math.RA/0311396

[8] J. L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Ens. Math. **39** (1993), 269-293.

[9] J. L. Loday, *Dialgebras*, in: Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. **1763**, Springer Verlag, 2001, pp. 7-66.

[10] A. Magyar, K. Prifogle, D. White and W. Young, *An investigation into the structure of digroups*, Proceedings of the Wabash Summer Institute in Algebra, 2007.

[11] J. Mostovoy, *A Comment on the Integration of Leibniz Algebras*, Communications in Algebra, **41** 1, (2013), 185-194.

[12] J. Monterde and F. Ongay, *Constructing Coquecigrues*, Algebra, **volume 2014** (2014), Article ID 875981, 11 pages.

[13] F. Ongay, *On the notion of digroup*, Comunicaciones del CIMAT, No. I-10-04 (2010), http://www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-10-04.pdf.

[14] F. Ongay, *φ-dialgebras and a class of matrix "Coquecigrue"*, Canad. Math. Bull. **Vol. 50** (1), 2007, p.p 126-137.

[15] J. D. Phillips, *A short basis for the variety of digroups*, Semigroup Forum **70** (2005), 466-470.

[16] G. Restrepo and R. Velásquez, *Immersions of dialgebras in split dialgebras and addition of bar units* (Preprint).

[17] R. Velásquez and G. Restrepo, *Embeding dialgebras in split dialgebras and derivations in dialgebras*, work in progress.

[18] O. P. Salazar-Díaz, R. Velásquez, L. A. Wills-Toro, *Generalized digroups*, Communications in Algebra, 2016

[19] F. Ongay, R. Velásquez, L. A. Wills-Toro, *Normal subdigroups and the isomorphism theorems for digroups*, To appear in Algebra and Discrete Mathematics

[20] O. P. Salazar-Díaz, R. Velásquez, L. A. Wills, *Construction of dialgebras through bimodules over algebras*, Linear and Multilinear Algebra, 2016

[21] R. Velásquez and R. Felipe, *Split dialgebras, split quasi-Jordan algebras and regular elements*, J. Algebra Appl. **8** (2009), No. 2, 191-218.