Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 21–28

Facultad de Ciencias Básicas

Vol. IV , Nº 1, (2017)

Matrices Naturales.

Natural Matrices.

[1]Jhon Eider Ramírez Lopez, [2]José Luis Gorrostola Nadad

[1]*IER Monseñor Escoba Vález, San Juan de Urabá-Antioquia-Colombia.* [2]*IE Diocesano Pablo VI, Cerete-Córdoba-Colombia*

[1]*jhonralo06@hotmail.com, matricesnaturales.com*

Resumen

Las matrices naturales, se definen por medio de una progresión aritmética como $a_{ij} = k(i-1)+j$, permiten en su estructura el uso herramientas de ubicación bidimensional, que están determinadas por los elementos de fila y columna. El presente estudio muestra un análisis en cuanto a la suma y el producto, brindando la oportunidad de ampliar el concepto de matriz natural, al de matrices naturalmente modificada en un factor t y proponer una estructura algebraica para el producto en lo relacionado con matrices cuadradas.

Palabras claves: Columna, fila, matriz natural, progresión, producto de matrices, suma de matrices.

Abstract

Natural matrices are defined by means of an arithmetic progression as $a_{ij} = k(i-1)+j$, these matrices allow the use of two-dimensional location tools in their structure, which are determined by row and column elements. The present study shows an analysis in terms of addition and multiplication by providing the opportunity to extend the concept of natural matrix, to the naturally modified matrix in a factor t and to propose an algebraic structure for the product in relation with square matrices.

Keywords: Visual disabilities, inclusion, thinking spatially, abilities of spatial thinking, tiflologicas areas.

1. Introducción

En el documento en cuestión se muestra como elemento preliminar la definición de matriz natural, desde dos puntos de vista y la ubicación bidimensional (fila y columna). En su segunda parte se realiza un estudio algebraico de las matrices naturales, el cual, explora la suma de tales matrices, albergando el concepto de matriz natural modificada, en cuanto a lo relacionado con el producto se realiza un análisis que permite mostrar una expresión algebraica para tal evento.

2. Preliminares

[Matriz natural (MN)] Dada una matriz, es natural si cumple con las siguientes condiciones [1]:

- Todas sus componentes son números naturales.
- Cada componente es única dentro de este arreglo (no se repiten componentes).
- El elemento 1 (primer número natural) se encuentra ubicado en la primera fila, primera columna
- La primera fila debe de estar conformada por los k primeros números naturales. Donde k corresponde al número de columnas que posee la matriz.
- La segunda fila poseerá el siguiente de k, como primera componente y sus demás componentes en el orden corriente de los números naturales, leídas de izquierda a derecha a partir de dicha componente $(k+1)$, análogamente son construidas las demás filas de dicha matriz. [2]

Definición 1. *Una matriz $N = [a_{ij}]_{nxm}$ es natural cuando cualquiera de sus componentes se puede expresar como:*

$$a_{ij} = k(i-1) + j \qquad [1,2]$$

La fila en una matriz natural

Teorema 1. *Dada una matriz natural $N = [a_{ij}]_n xm$, si se representa cualquiera de sus componentes a_{ij} por λ, entonces el número que representa la fila, en la que se encuentra λ dentro de la matriz natural de k columnas, está dada por [1]:*

$i = [\lvert \frac{\lambda+k}{k} \rvert]$	*En caso que λ no sea múltiplo de k*
$i = \frac{\lambda}{k}$	*En caso que λ es múltiplo de k.*

La columna en una matriz natural

Teorema 2. *Dada una matriz natural $N = [a_{ij}]_n xm$, si se representa cualquiera de sus componentes a_{ij} por λ, entonces el número que representa la columna en la que se encuentra λ dentro de la matriz natural de k columnas, está dada por [1]:*

$j = \lambda - k[\lvert \frac{\lambda+k}{k} \rvert]$	*En caso que λ no sea múltiplo de k*
$j = k$	*En caso que λ es múltiplo de k.*

3. Algebra de matrices naturales

Suma de matrices naturales

Considere dos marices naturales $M_1 = [a_{ij}]_{nxm},\ M_2 = [a_{ij}]_{nxm}$, recordemos que para sumar dos matrices, estas deben de tener el mismo tamaõ, pero cuando se trata de matrices naturales resulta que estas son idénticas, es decir, dos matrices naturales de igual tamaõ son necesariamente iguales componente componente. Por tanto $M_1 = M_2$.

$$M_1 + M_2 = 2(k(i-1) + j) = 2k(i-1) + 2j$$

Matriz natural modificada

Definición 2. *El conjunto de matrices naturales definidas por*

$$\sum_{r=1}^{h} M_h = h(k(i-1)+j) = hk(i-1)+hj = k'(i-1)+j' \qquad [2,8]$$

Donde M es una matriz natural, $h \in N$, k' representa el equivalente al número de columnas en la matriz y j' el equivalente a la columna, se denominan matrices naturales modificadas. Dichas matrices se pueden, observar como el resultado de modificar una matriz natural en un factor h (producto por escalar).

Ejemplo 1. *Una matriz natural modificada puede ser:*

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108
111	114	117	120	123	126	129	132	135	138	141	144
147	150	153	156	159	162	165	168	171	174	177	180

Determinar la respectiva componente matricial $b_{ij'}$ para, $i = 2$, $j' = 33$, remplazando tenemos que

$$b_{ij'} = k'(i-1)+j'$$
$$b_{ij'} = 36(2-1)+33 = 69$$

Lo que se puede verificar visualmente en el arreglo matricial, lo cual, motiva a generalizar el concepto de matriz natural en el concepto de matriz modificada, donde también podemos verificar que se cumplen los teoremas de fila columnas en este tipo de matrices.

Ejemplo 2. *Calcular el valor representativo de columna y la fila en la cual se localiza el número 45 dentro del anterior arreglo natural modificado. Aplicando los teoremas anteriores vía suma sucesiva matrices naturales y generalización de la raíz digital de tenemos que, $k = 36$, $\lambda = 45$, por tanto*

$$j' = \lambda - k'\lfloor\frac{\lambda}{k}\rfloor = 45 - 36\lfloor\frac{45}{36}\rfloor = 9$$

Lo que podemos verificar en la matriz donde el número 45 se encuentra ubicado en $j' = 9$
Para el caso de las fila se tiene que

$$i = \lfloor\frac{\lambda+k'}{k'}\rfloor = \lfloor\frac{45+36}{36}\rfloor = \lfloor 2,25\rfloor = 2$$

Ejemplo 3. *Calcular el valor representativo de columna y columna en la cual se localiza el número 144 dentro del anterior arreglo natural modificado.*

$j' = k'$ $j' = 36$	*En caso que λ sea múltiplo de k'*

Matriz natural modificada en un factor t

Definición 3. *Dada una matriz natural se dice que es matriz una natural modificada en un factor t, con $t \in R - 0$ si se define como:*

$$tA_{ij} = tk(i-1) + tj = A_{iJ} = K(i-1) + J$$

Donde $K = tn$ y $J = tj$, es de notar que las filas i desde el punto de vista de, su carnalidad no presentan alteraciones como si le sucede a la columna j, las cuales presentan un valor representativo j' en la matriz natural modifica.

Ejemplo 4. *Consideremos la matriz natural modificada en un factor $t = -1,5$*

-1,5	-3	-4,5	-6	-7,5	-9	-10,5	-12
-13,5	-15	-16,5	-18	-19,5	-21	-22,5	-24
-25,5	-27	-28,5	-30	-31,5	-33	-34,5	-36
-37,5	-39	-40,5	-42	-43,5	-45	-46,5	-48
-49,5	-51	-52,5	-54	-55,5	-57	-58,5	-60
-61,5	-63	-64,5	-66	-67,5	-69	-70,5	-72
-73,5	-75	-76,5	-78	-79,5	-81	-82,5	-84
-85,5	-87	-88,5	-90	-91,5	-93	-94,5	-96
-97,5	-99	-100,5	-102	-103,5	-105	-106,5	-108

Determinemos la componente que tiene como coordenadas $i = 2$ y $J = -7,5$ en la matriz anterior. Ya que $k = -12$, se tiene que

$$\lambda = a_{2;-7,5} = -12(2-1) + (-7,5) = -19,5$$

Lo que podemos verificar visualmente en la matriz.

Ejemplo 5. *Determine la fila y la columna en la cual se encuentra la componente -79 en la anterior matriz modificada en un factor t.*
Calculemos la columna de -66 en este arreglo

$$J = \lambda - K\lfloor\frac{\lambda}{K}\rfloor = -66 - (-12)\lfloor\frac{-66}{-12}\rfloor$$
$$J = -66 - (-12)\lfloor 5{,}5\rfloor$$
$$J = -66 - (-12)\lfloor 5\rfloor = -6$$

Lo que podemos verificar en la matriz donde el número -66 se encuentra ubicado en $J = -6$.
Para el caso de las fila se tiene que

$$i = \lfloor\frac{\lambda + K}{K}\rfloor = \lfloor\frac{-66-12}{-12} = \lfloor 6,5\rfloor = 6$$

Ejemplo 6. *Determine la fila y columna para $\lambda = -108$.*
Para J se tiene que:
$J = K$ *En caso que λ sea múltiplo de K*
$J = -12$
Estudiemos el caso de la fila, tenemos que:
$i = \frac{\lambda}{K}$ *Si λ es múltiplo de k*
$i = \frac{-108}{-12} = 9$

4. PRODUCTO DE MATRICES NATURALES CUADRADAS DE IGUAL ORDEN

Considere dos marices naturales $M_1 = [a_{ij}]_{nxn}$, $M_1 = [b_{ij}]_{nxn}$, en las que se dan las consideraciones necesarias para el producto

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

donde $a_{ik} = n(i-1) + k$ y $b_{kj} = n(k-1) + j$.

Primero calculemos el producto $a_{ik}b_{kj}$

$$[n(i-1)+k][n(k-1)+j] = n^2(i-1)(k-1) + nj(i-1) + nk(k-1) + kj$$

aplicando sumatorias a este produto tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\{[n(i-1)+k][n(k-1)+j] = n^2(i-1)(k-1) + nj(i-1) + nk(k-1) + kj\}$$

Como se puede observar las sumas solo dependen de k, por tanto muchos factores en los términos quedarán por fuera de las sumas, veamos:

$$nr(i-1)\{\sum_{k=1}^{n}(k-1)\} + nj(i-1)\{\sum_{k=1}^{n}1\} + n\{\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\} + j\{\sum_{k=1}^{n}k\}$$

Desarrollaremos las cuatro sumas por aparte y luego se anexaran al proceso que se trae

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{k=1}^{n}(k+(-1)) = \sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}(-1) = \frac{n(n+1)}{2} + (-n)$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n^2-n}{2} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}1 = n \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}[\frac{2n+1}{3} - 1] = \frac{n(n+1)}{2}[\frac{2n-2}{3}] = \frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{n^3-n}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = \frac{n^3-n}{3} \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (4)$$

Ahora remplazando cada uno de estos resultados en la expresión inicial se tiene que

$$(i-1)(\frac{n^4-n^3}{2}) + j(i-1)n^2 + \frac{n^4-n^2}{3} + j(\frac{n^2+n}{2})$$

$$= i(\frac{n^4 - n^3}{2}) - (\frac{n^4 - n^3}{2}) + ijn^2 + \frac{n^4}{3} - \frac{n^2}{3} + j(\frac{n^2}{2}) + j(\frac{n}{2})$$

Agrupando términos semejantes se tiene

$$ijn^2 + i(\frac{n^4 - n^3}{2}) + j(\frac{n - n^2}{2}) + (\frac{3n^3 - 2n^2 - n^4}{6})$$

Los términos que dependen de n los denominaremos coeficientes naturales y se referenciaran como

$$c_1 = n^2;\ c_2 = \frac{n^4 - n^3}{2};\ c_3 = \frac{n - n^2}{2};\ c_4 = \frac{3n^3 - 2n^2 - n^4}{6}$$

Finalmente el resultado del producto entre dos matrices naturales cuadradas se puede expresar como

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = c_1 ij + c_2 i + c_3 j + c_4$$

5. Conclusiones

- La suma de matrices naturales permite la utilización de la estructura del producto por escalar, permitiendo el origen del concepto de matriz natural modificada.
- Las fórmulas de ubicación para la fila y la columna en una matriz natural permiten el ubicar elementos al interior de una matriz natural modificada.
- Es posible expresar el producto de matrices naturales cuadradas como

$$P_{ij} = c_1 ij + c_2 i + c_3 j + c_4 \qquad [2, 8]$$

Agradecimientos

Primitivo Belén Acosta-Humánez, Hugo Ramón Pérez Carrascal, Antonio María Anaya Bru, José Anaya Díaz, Eulises Ramírez. A nuestros padres Javier, flora, Harvey y María. A nuestras esposas María y Edilsa

Referencias

[1] J.E. Ramírez y J. L. Gorrostola. *Proyecciones de las matrices naturales en el estudio de la teoría del pegar y reversar y en la fundamentación matemática de la raíz digital aplicada en programación*. XI encuentro internacional de matemáticas EIMAT universidad de Atlántico Barranquilla, 2015.

[2] F.Ayres, *Algebra Moderna*, Mexico: McGraw-Hill,1989.

[3] J. Fraleigh, *Algebra Abstracta.* , Wilmington, Delaware, E.U.A: Addison Wesley IberoamÃ©rica, S.A, 1987.

[4] J.L. Gorrostola, *Matrices Naturales y Sumas Sucesivas*, V congreso nacional de estudiantes de matemáticas ACEM, universidad de Córdoba Monterí, 1998.

[5] L. Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica*, 6aEd. México: Harla, 1992, pp. 58-60.

[6] J.E. Ramírez y J. L. Gorrostola, *Matrices Cabalística*, IV congreso nacional de estudiantes de matemáticas ACEM universidad nacional de Colombia sede Medellín, 1997.

[7] J.E. Ramírez y J. L. Gorrostola, *Matrices Naturales*, X encuentro internacional de matemáticas EIMAT universidad de Atlántico Barranquilla, 2014.