Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 16–20

Facultad de Ciencias Básicas

Vol. IV , Nº 1, (2017)

Soluciones entre ecuaciones diferenciales de orden dos.

Solutions between two-order differential equations.

José Rosales-Ortega

Escuelas de Matemática UCR-ITCR, Costa Rica.

jrosales@itcr.ac.cr, jose.rosales@ucr.ac.cr

Resumen

En esta nota se probará el siguiente resultado: dadas las ecuaciones diferenciales lineales de orden dos, $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, y $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$ si se conoce una solución, no trivial, de una de ellas, entonces siempre será posible encontrar un conveniente cambio de variables a partir del cual hallaremos una correspondiente solución para la otra ecuación, esto bajo la consideración de un cierto invariante a ser definido.

Palabras claves:
isomorfismo, raíz, solución, wronskiano.

Abstract

In this paper we will prove the following result: given the linear differential equations of order two, $y''+p_1(x)y'+q_1(x)y = 0$, and $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$ if a nontrivial solution of one of them is known, then always It will be possible to find a convenient change of variables from which we will find a corresponding solution for the other equation, this under the consideration of a certain invariant to be defined

Keywords:
isomorphism, root, solution, wronskian.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es poder caracterizar bajo qué condición es posible, a partir del conocimiento de una solución no trivial de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos, digamos, $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, encontrar una solución, también no trivial, de la ecuación diferencial, $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$. Con esto queremos hacer énfasis en el comentario aparecido en [3] sobre la importancia de realizar cambios de variables en ecuaciones de segundo orden.

Si esto fuese posible, entonces al utilizar la famosa fórmula de Abel [1] se pueden encontrar todas las soluciones de esta última ecuación.

Para realizar lo anterior se procede primero a dar algunos resultados sobre ecuaciones diferenciales de orden dos, lineales, y luego indagaremos sobre los ceros de las soluciones de tales ecuaciones.

El teorema que nos permite, y cuya prueba puede ser consultada en [1], el punto de partida para el estudio de la ecuación diferencial lineal de orden dos homogénea, es el llamado teorema de existencia y unicidad de la solución, el cual se enuncia a continuación.

Theorem 1.1. *Sean $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas en el intervalo $]a,b[$. Entonces el problema:*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

posee solución única para cada $x_0 \in]a,b[$, y cualesquiera α,β números reales.

Un sencillo corolario que se deduce del teorema anterior y que vamos a probar es el siguiente.

Corollary 1.2. *Si denotamos con S al conjunto de todas las soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ se tiene que S es un espacio vectorial de dimensión igual a dos.*

Que S es un espacio vectorial es conocido, y el hecho de que S es de dimensión dos sigue al considerar la siguiente función $f : S \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(y) = (y(x_0), y'(x_0))$. Es claro que f es una transformación lineal. Además es inyectiva, ya que si $f(y_1) = f(y_2)$ entonces tenemos que dos soluciones y_1, y_2 comparten las mismas condiciones iniciales, y por el teorema 1.1, de existencia y unicidad, deben ser iguales en $]a,b[$. Por otra parte, si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$, el mismo teorema de existencia y unicidad nos indica que el problema (1) posee solución y tal que $f(y) = (\alpha,\beta)$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo, y se concluye que S y $\mathbb{R}^2$ deben tener la misma dimensión como espacios vectoriales.

□

Nos interesa conocer sobre la cantidad de ceros que puede tener una solución no trivial de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos. Resulta que cada solución de una ecuación diferencial lineal sólo puede tener un número finito de ceros en un intervalo cerrado dado, esto es establecido y probado en el siguiente lema.

Lemma 1.3. *Toda solución, no trivial, de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ posee un número finito de ceros en $[a,b]$.*

Consideremos una solución no trivial, $y(x)$, de la ecuación diferencial. Supongamos que $y(x)$ posee una cantidad infinita de ceros en el intervalo $[a,b]$. Esta cantidad se puede suponer numerable, ya que es conocido que cada conjunto infinito posee un subconjunto numerable. Por lo tanto, se puede suponer que tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada elemento de la sucesión es un cero de $y(x)$. Como $[a,b]$ es compacto, debe existir una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que x_{n_k} converge a algún $x_0 \in [a,b]$. Observe que $y(x_{n_k}) = 0$ para cada k, y además

$$y'(x_0) = \lim_{k\to+\infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0.$$

Por lo tanto, la solución $y(x)$ debe ser la función cero, y esto es absurdo, con lo cual se concluye que no puede haber una cantidad infinita de ceros en $[a,b]$.

□

Se puede concluir que los ceros de una solución no trivial son simples, no se repiten, esto se puede ver en [2].

2. Soluciones entre ecuaciones

El análisis que nos hemos propuesto tiene que ver con una función, llamada la función invariante, la cual se asocia a cada ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos.

Definition 2.1. *Para la ecuación* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *definimos la siguiente función:*

$$I(x) = q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}. \tag{2}$$

A esta función dada por (2.2) le llamaremos el invariante asociado a la ecuación diferencial.

Theorem 2.2. *Sea* S *el espacio solución de la ecuación* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$*, y sea* S_1 *el espacio solución de la ecuación diferencial* $y'' + I(x)y = 0$*, donde*

$$I(x) = q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2}.$$

Entonces $T : S \to S_1$ *definido por* $T(\phi)(x) = \phi(x)e^{\int \frac{p(x)}{2}\,dx}$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Es claro que T es lineal, y esto se deduce de la linealidad del operador derivación. Lo que vamos a probar es que este operador está bien definido, en el sentido de que si $\phi(x) \in S$, entonces $T(\phi(x)) \in S_1$. Observe que las derivadas sucesivas de $y(x) = \phi(x)e^{\int \frac{p(x)}{2}\,dx}$ son dadas por:

$$y'(x) = \left(\phi'(x) + \frac{p(x)}{2}y(x)\right)e^{-\int p(x)/2\,dx}.$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(\frac{p^2(x)}{4}\}\phi(x) + \frac{p'(x)}{2}\phi(x) + p(x)\phi'(x) + \phi''(x)\right)e^{-\int p(x)/2\,dx} \\ &= ((q(x) - I(x)) + p(x)\phi'(x) + \phi''(x))e^{-\int p(x)/2\,dx} \end{aligned}$$

Al tomar en cuenta los cálculos anterirores, se llega a que:

$$\begin{aligned} y'' + I(x)y &= (\phi'' + p(x)\phi' + q(x)\phi)e^{\int p(x)/2\,dx} \\ &= 0 \cdot e^{\int p(x)/2\,dx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con cálculos similares a los anteriores se puede ver que $T^{-1}(\psi) = \psi(x)e^{-\int p(x)/2\,dx}$ es el operador inverso, con lo cual se concluye que T es isomorfismo.

□

Podemos ver que el isomorfismo dado en el teorema 2.2 deja invariante el número de ceros que posee cada solución. Esto es expuesto en el siguiente corolario.

Corollary 2.3. *Con las mismas hipótesis del teorema 2.2, se tiene que si* $\phi \in S$ *y* $\phi(\alpha) = 0$*, entonces* $T(\phi)(\alpha) = 0$*. Recíprocamente, si* $\psi \in S_1$ *cumple que* $\psi(\beta) = 0$*, entonces* $T^{-1}(\psi)(\beta) = 0$.

El primer resultado interesante que obtenemos sobre la relación entre soluciones de dos ecuaciones lineales homogéneas de orden dos, diferentes, se establece en el siguiente teorema.

Theorem 2.4. *Sean V y W los espacios solución de las ecuaciones $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, y $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$, respectivamente. Sean $I_1(x), I_2(x)$ sus funciones invariantes asociadas. Entonces, si $I_1(x) = I_2(x)$, se tiene que para cada $\phi \in V$ existe un cambio de variable $\psi(x) = \phi(x)f(x)$ tal que $\psi(x) \in W$, para alguna función $f(x)$.*

Sea $\phi \in V$, entonces sabemos por teorema 2.2 que $\phi(x)e^{\int \frac{p_1(x)}{2}\,dx}$ es solución de la ecuación asociada $y'' + I_1(x)y = 0$, y por hipótesis también es solución de $y'' + I_2(x)y = 0$, la ecuación asociada a $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$. Luego, aplicando una vez más el teorema 2.2, la función $e^{-\int \frac{p_2(x)}{2}\,dx}\phi(x)e^{\int \frac{p_1(x)}{2}\,dx}$ es solución de $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$.

Por lo tanto, basta tomar $f(x) = e^{-\int \frac{p_2(x)}{2}\,dx}e^{\int \frac{p_1(x)}{2}\,dx}$ como la función del cambio de variable.

□

El teorema que sigue, y el más importante de este trabajo, demuestra el recíproco del resultado anterior.

Theorem 2.5. *Suponga que para $\phi(x)$ solución de $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$ existe una función positiva $f(x)$ tal que $\phi(x)f(x)$ es solución de la ecuación $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$. Entonces las funciones invariantes asociadas a cada ecuación son iguales, es decir $I_1(x) = I_2(x)$.*

Consideremos las ecuaciones asociadas $y''+I_1(x)y = 0$, y $y''+I_2(x)y = 0$, a las ecuaciones $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$, respectivamente, donde

$$I_1(x) = q_1(x) - \frac{p_1^2(x)}{4} - \frac{p_1'(x)}{2}, \qquad I_2(x) = q_2(x) - \frac{p_2^2(x)}{4} - \frac{p_2'(x)}{2}.$$

Vamos a suponer que $I_1(x) > I_2(x)$, en cierto intervalo abierto, y consideraremos ceros consecutivos de cierta solución, esto es posible gracias al lema 1.3.

Lo primero que vamos a probar es que si ϕ es solución de la primer ecuación asociada, y ψ es solución de la segunda, entonces entre dos ceros consecutivos de ϕ hay un cero de la solución ψ. En efecto, sean $\alpha_1 < \alpha_2$ tales que $\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha_2) = 0$. Si existe $\beta \in]\alpha_1, \alpha_2[$ tal que $\psi(\beta) = 0$ se termina la prueba, en caso contrario podemos suponer que tanto ϕ como ψ son positivas en $]\alpha_1, \alpha_2[$, esto debido a que el conjunto solución de ambas ecuaciones es un espacio vectorial. Observemos que por un lado, al calcular el wronskiano de ϕ y ψ, obtenemos

$$W(\psi,\phi)(\alpha_1) = \begin{vmatrix} \psi(\alpha_1) & \phi(\alpha_1) \\ \psi'(\alpha_1) & \phi'(\alpha_1) \end{vmatrix} = \phi'(\alpha_1)\psi(\alpha_1) \geq 0,$$

y por otro

$$W(\psi,\phi)(\alpha_2) = \begin{vmatrix} \psi(\alpha_2) & \phi(\alpha_2) \\ \psi'(\alpha_2) & \phi'(\alpha_2) \end{vmatrix} = \phi'(\alpha_2)\psi(\alpha_2) \leq 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(W(\psi,\phi)(x)\right) &= \phi(x)\psi''(x) - \psi(x)\phi''(x) \\ &= \phi(x)\psi(x)\left(I_1(x) - I_2(x)\right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

en el intervalo $]\alpha_1, \alpha_2[$. Esto último dice que la función wronskiano, $W(\psi,\phi)(x)$ es creciente en $]\alpha_1, \alpha_2[$, y por lo tanto obtenemos un absurdo, y se concluye que es válida nuestra afirmación.

Supongamos entonces que ϕ es solución, no trivial, de $y''+I_1(x)y = 0$, luego $\phi(x)e^{-\int p_1(x)/2\,dx}$ es solución de la ecuación $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$.

Por hipótesis, se tiene que existe $f(x)$ positiva tal que $f(x)\phi(x)e^{-\int p_1(x)/2}\,dx$ es solución de la ecuación $y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$. A su vez se tiene que la función $e^{\int p_2(x)/2\,dx}f(x)\phi(x)e^{-\int p_1(x)/2\,dx}$ es solución de la ecuación $y'' + I_2(x)y = 0$.

Ahora bien, la función ϕ y la función $e^{\int p_2(x)/2\,dx}f(x)\phi(x)e^{-\int p_1(x)/2\,dx}$ poseen los mismos ceros, lo cual es un absurdo, y por lo tanto debe cumplirse que $I_1(x) = I_2(x)$.

$\square$

Referencias

[1] Coddington, Earl. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Dover. New York, 1989.

[2] Walter, Wolfgang. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag. New York, 1998.

[3] Rota, Gian-Carlo. *TEN LESSONS I WISH I HAD LEARNED BEFORE I STARTED TEACHING DIFFERENTIAL EQUATIONS*, Disponible en: https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf