Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 1–15

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. IV , № 1, (2017)

Medición, Método Axiomático y Medidas de Pobreza: Una Revisión

Measurement, Axiomatic Method and Poverty Measures: A Revision

Pedro Harmath[1], Abelardo Monsalve[2], Josefa Ramoni[3]

[1,2]*Departamento de Investigación de Operaciones y Estadística, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto-Venezuela,* [3]*Facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables, Universidad de Santander Bucaramanga-Colombia.*

[1]*pedro.harmath@ucla.edu.ve,* [2]*amonsalve@ucla.edu.ve,* [3]*j.ramoni@udes.edu.co*

Resumen

En este artículo se presenta una revisión de la literatura referente a la medición de la pobreza a partir de la distribución de los ingresos. Se introduce la definición de indicador clásico de pobreza, para luego, explicar los principales axiomas que han surgido a partir de la metodología de cuantificación propuesta por Sen en 1976. Adicionalmente, son expuestos los indicadores construidos a partir del método axiomático que permiten medir diversos rasgos del fenómeno, para finalmente, proporcionar un conjunto de consideraciones respecto al proceso de cuantificación y análisis de características tan complejas como son la pobreza y la desigualdad.

Palabras claves:
Pobreza, Medición de la pobreza, Axiomas, Medidas de pobreza.

Abstract

In this article we present a review of the literature concerning the measurement of poverty from the income distribution. The definition of the poverty index is introduced, and then, we explain the main axioms that have emerged from the quantification methodology proposed by Sen in 1976. Additionally, we exposed the indicators constructed from the axiomatic method to measure various features of the phenomenon, to finally, provide a set of considerations regarding the process of quantification and analysis of such complex features such as poverty and inequality.

Keywords:
Poverty, Measurement of poverty, Axioms, Measures of poverty.

1. Introducción

La pobreza es una característica común muy arraigada en los países subdesarrollados. Según algunos autores como Acevedo y Harmath (2009, [1]), el fenómeno es objeto de estudio de muchas investigaciones por el trasfondo social y humano que encierra. El proceso de cuantificación y análisis de la pobreza suele ser complejo, ya que, abarca aspectos conceptuales y metodológicos variados que el investigador debe abordar al elegir un método de medición. Por ejemplo, si el objetivo es estudiarla bajo una determinada óptica en el tiempo, suelen combinarse nociones básicas de la *teoría económica* con estructuras de modelización propias de la *teoría de los procesos estocásticos*.

Algunos entes como el Instituto Nacional de Estadística (INE) de Venezuela, se inclinan a definir la pobreza como la circunstancia económica en la que una persona u hogar carece de ingresos suficientes para acceder a las denominadas *necesidades básicas insatisfechas* (NBI) tales como niveles mínimos de atención médica, alimentos, vivienda, ropa, educación entre otros aspectos. Por otra parte, el INE sugiere que un hogar se encuentra en situación de pobreza si sus ingresos percibidos no logran cubrir el costo de la canasta básica de consumo total, el cual incluye alimentos, y otros productos y servicios que cubren un conjunto de necesidades básicas no alimentarias. En este contexto, el proceso de cuantificación corresponde al *método de línea de pobreza por ingreso* (LPI). Para mayores detalles respecto de los dos métodos clásicos de medición referidos en el parágrafo, es recomendable ver [18] y [19].

Considerando el método LPI, el trabajo se encuentra estructurado en cinco secciones incluyendo esta breve introducción. En la segunda, se presenta la definición básica para el desarrollo del artículo. Luego, se explica en detalle el método axiomático propuesto inicialmente por Sen. En la cuarta, se exponen las principales medidas de pobreza soportadas en la metodología antes mencionada. Finalmente, se presentan algunas conclusiones y recomendaciones respecto de la concepción y análisis del problema de la pobreza.

2. Definición y Medidas Objetivas Básicas

Consideremos un *universo estadístico* constituido por un total de N individuos (hogares, personas), tal que, para cada individuo es posible determinar su *nivel de ingreso total disponible*, entre otras características[1]. De ser este el caso, pueden llevarse a cabo diferentes procesos de muestreo, y para cada *muestra aleatoria* determinada de tamaño n, observar la *distribución de ingresos* de las *n unidades de análisis*, representándolas por vectores de la forma $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ tal que $y_j \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$, para todo $j = 1, 2, ..., n$.

Sea $\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n_+, n \geq 1\}$ el *conjunto de todas las posibles distribuciones de ingresos* para el universo estadístico N, con $y \in \mathcal{Y}$ un *vector de ingresos* específico para los individuos de una muestra aleatoria de tamaño $n = n(y)$, con media $\mu(y)$ y varianza $\sigma^2(y)$, respectivamente[2]. Es posible suponer, sin pérdida de

[1] En el artículo nos referimos al nivel de ingreso total disponible de un hogar, jefe del hogar, o de cualquier otra unidad de análisis estadístico para una muestra aleatoria de tamaño n, como al ingreso total percibido a través del trabajo principal, secundario; u otro tipo de remuneraciones como jubilaciones, pensiones o ayudas sociales, entre otras. Claro está, no se puede descartar la posibilidad de que en ciertas ocasiones es viable cuantificar el ingreso para un total de N unidades de análisis, siempre y cuando tal universo sea finito. En el argot económico suelen usarse diversas acepciones respecto de la variable antes mencionada: nivel de ingresos, total de ingresos percibidos, o simplemente ingresos, solamente por nombrar algunos.

[2] Todo vector (distribución) de ingresos $y \in \mathcal{Y}$ se encuentra conformado por y_j componentes, con $j = 1, 2, ..., n$. Cualquiera de sus componentes o entradas, representa el ingreso observado para cada j-ésimo individuo de la muestra aleatoria de tamaño n considerada. Para un vector de ingresos específico, es viable suponer que como *variable aleatoria*, sigue una determinada *distribución de probabili-*

generalidad, que existe un ordenamiento natural no decreciente de los componentes del vector y, acorde a la selección sucesiva de los individuos para la muestra, o que simplemente una vez recabada la información al respecto, el vector es ordenado de forma que $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$.

Al elegir una *línea de pobreza* $z > 0$, tal que el j-ésimo individuo de la muestra se considera en *condición de pobreza* si $y_j < z$. Entonces, según Domínguez y Martín (2006, [10]); Núñez (2006, [23]) y Seck (2011, [24]); entre otros, una *medida o indicador clásico de pobreza* se puede definir como una función real de varias variables reales:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{Y} \times \mathbb{R}_+ &\to [0,1] \\ (y,z) &\mapsto \mathcal{P}(y,z), \end{aligned}$$

tal que el valor $\mathcal{P}(y,z)$ indica el *grado o nivel de pobreza* asociado a la distribución $y \in \mathcal{Y}$, donde $z \in \mathbb{R}_+$ es el umbral de pobreza elegido[3].

Por lo expuesto anteriormente, se deduce que cualquier indicador o medida de este tipo puede ser obtenido directamente a partir de la distribución de los ingresos, y ellas son conocidas en la literatura como *medidas objetivas*. Entre las medidas objetivas básicas destaca el *índice general de pobreza o de proporción de pobres* (the headcount ratio, en inglés) dado por:

$$H(y,z) = \frac{q}{n}, \tag{1}$$

donde $q = q(y,z)$ es el número de individuos considerados en situación de pobreza para la muestra aleatoria de tamaño n. Esta es la medida más simple y recoge lo que se denomina la *incidencia de la pobreza*. La construcción de este indicador se encuentra basada en el *criterio de frecuencia relativa de probabilidad*.

Otro de los indicadores básicos conocidos es el *cociente de pobreza o brecha de pobreza* (the income gap ratio, en inglés). Sea f la función dada por:

$$f(y_j, z) = \begin{cases} z - y_j & \text{si } y_j < z, \\ 0 & \text{si } y_j \geq z. \end{cases}$$

La cual, cuantifica el nivel de ingreso que debería percibir cada j-ésimo individuo para salir de la pobreza. A partir de ella, se define el cociente de pobreza como:

$$I(y,z) = \frac{1}{qz}\sum_{j=1}^{n} f(y_j, z) = \frac{1}{qz}\sum_{j=1}^{q}(z - y_j) = 1 - \frac{\mu_p}{z}, \tag{2}$$

donde $\mu_p = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} y_j$ es el ingreso promedio de los individuos pobres para la muestra. Esta medida compara el monto promedio de ingreso necesario para que todas las unidades de análisis alcancen el umbral de pobreza, con el máximo valor que podría tomar. Acorde con De Lucas y Ortiz (2010, [9]) y Ginzo (2011, [15])

dad; sin embargo, tal suposición no es considerada en la investigación, y nos referimos simplemente a *distribuciones de ingresos*; mas no a *distribuciones estadísticas de probabilidad para los ingresos*.

[3] Cualquier línea elegida define un *umbral* en el sentido que, todo j-ésimo individuo, con $1 \leq j \leq n \leq N$ es considerado en condición de no pobreza siempre y cuando su nivel de ingreso observado y_j sea al menos el valor de z (fijo), esto es: $y_j \geq z$; de lo contrario se considera pobre, pues su nivel de ingreso no alcanza al menos el umbral. Por ello, en Economía es frecuente referirse a distintas líneas o umbrales de pobreza, para efectos de medir el fenómeno.

entre otros, el indicador refleja el *desnivel de pobreza* para los individuos con niveles de ingresos por debajo del umbral establecido.

Por otra parte, el *cociente combinado* (the combined income gap ratio, en inglés) se deriva del producto de las dos medidas anteriores, es decir:

$$H(y,z)\cdot I(y,z) := HI(y,z) = \frac{q}{n}\cdot\frac{1}{qz}\sum_{j=1}^{q}(z-y_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{z-y_j}{z}\right). \tag{3}$$

De esta manera, $HI(y,z)$ mide la cantidad de ingreso necesario para ubicar a los individuos pobres en la línea de pobreza.

Los tres indicadores objetivos básicos referidos anteriormente son bastante aceptados en el ámbito de la medición del fenómeno; de hecho, ellos en general son considerados por diversos Institutos Oficiales de Estadística incluyendo el INE, al momento de hacer estimaciones respecto al problema pobreza en determinados lapsos de tiempo; sin embargo, caben algunas consideraciones:

C1. La medida básica $H(y,z)$ es insensible en cuanto al grado de pobreza de los individuos considerados en tal condición para cualquier muestra; en efecto, el indicador únicamente cuantifica el número de pobres una vez fijado el umbral, pero no refleja como se comportan estadísticamente los ingresos de estos individuos.

C2. En cuanto al indicador $I(y,z)$, de tener dos o más grupos de individuos pobres con iguales niveles de ingreso promedio, ello pudiese conllevar a conclusiones erróneas, pues para estos grupos la medida $I(y,z)$ indicaría el mismo nivel de pobreza; aún y cuando hayan posibles diferencias en cuanto a la incidencia del problema entre al menos dos de ellos.

C3. Con respecto a la medida $HI(y,z)$, de tener dos muestras que reflejen el mismo porcentaje de individuos pobres con iguales niveles de ingreso promedio, tal indicador presentaría el mismo nivel de pobreza para ambas, sin considerar como se distribuyen los ingresos para estos individuos, así como ocurre con $H(y,z)$ e $I(y,z)$.

El famoso enfoque de cuantificación conocido como *método axiomático* desarrollado en principio por el Nobel Amartya Sen (1976, [25]), apunta a la construcción de otras medidas que aparte de recoger elementos como la *incidencia de la pobreza*, sean más sensibles con respecto a la distribución del ingreso de los individuos considerados pobres, con el objetivo de recoger y calibrar mejor la *intensidad de la pobreza* y sus respectivos cambios; en lugar de como lo hacen los indicadores básicos $I(y,z)$ y $HI(y,z)$, respectivamente. Ello, justamente genera la necesidad de presentar las propiedades que comprende el método antes mencionado, así como los principales indicadores construidos sobre su base en las dos secciones presentadas a continuación.

3. Método Axiomático

El enfoque axiomático se encuentra basado en un conjunto de criterios que establecen ciertas propiedades que debe satisfacer un indicador. A tales propiedades se les denomina simplemente *axiomas*, y el método reposa sobre los cuatro primeros en lo que sigue, todos ellos propuestos por Sen.

Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos distribuciones de ingresos, $z > 0$ la línea de pobreza común para ambas, y $r > 0$, entonces:

AF. Focalización: Toda medida de pobreza es invariante ante cambios en los ingresos de los individuos considerados no pobres. Es decir,

$$\mathcal{P}(x, z) = \mathcal{P}(y, z),$$

si existe $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_j \geq z$;
(II) $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$, y $x_j = y_j + r$.

Así, solamente se considera la información correspondiente a las unidades de análisis cuyos ingresos se ubican por debajo de la línea de pobreza en la construcción del indicador. Una vez escogida la línea de pobreza, de observarse cambios en los niveles de ingresos de los individuos considerados pobres, el valor del indicador no varía; a menos que tales cambios hagan que los ingresos de las unidades de análisis se ubiquen por encima de la línea de pobreza establecida. Sen presenta tal axioma de manera implícita en 1976; y explícitamente algunos años más tarde (ver Sen (1981, [26])).

AMD. Monotonía Débil: Dados otros elementos, una reducción de los ingresos de un individuo por debajo de la línea de pobreza debe incrementar la medida de pobreza. O sea,

$$\mathcal{P}(x, z) > \mathcal{P}(y, z),$$

si existe $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_j < z$;
(II) $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$, y $x_j = y_j - r$.

ATD. Transferencias Débiles: Dados otros elementos, si se efectúa una transferencia de ingresos de un individuo por debajo de la línea de pobreza a cualquier otro individuo con un nivel de ingresos más alto, donde una vez realizada tal transferencia la unidad de análisis donante sigue siendo pobre, entonces la medida de pobreza debe incrementarse. Es decir,

$$\mathcal{P}(x, z) > \mathcal{P}(y, z),$$

si existe $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_j < z$, $y_j < y_i$;
(II) $x_k = y_k$ para todo $k \neq i, j$, $x_j = y_j - r < z$ y $x_i = y_i + r$.

ATF. Transferencias Fuertes: Dados otros elementos, una transferencia de ingresos de un individuo por debajo de la línea de pobreza a cualquier otro individuo con un nivel de ingresos más alto, debe incrementar la medida de pobreza. En otros términos,

$$\mathcal{P}(x, z) > \mathcal{P}(y, z),$$

si existe $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_j < z$, $y_j < y_i$;
(II) $x_k = y_k$ para todo $k \neq i, j$, $x_j = y_j - r$ y $x_i = y_i + r$.

La diferencia entre ambos *axiomas de transferencias* propuestos por Sen, es que en la fuerte es posible que la unidad de análisis que realiza la transferencia cruce la línea de pobreza establecida. Como consecuencia de ello, en esta versión, el número de individuos pobres no tiene que permanecer fijo.

Posterior a la propuesta inicial de Sen, Donaldson y Weymark (1986, [11]), introducen una nueva versión del *axioma de monotonía* y dos nuevas del *axioma de transferencias*:

AMF. Monotonía Fuerte: Dados otros elementos, un aumento de los ingresos de un individuo por debajo de la línea de pobreza debe disminuir la medida de pobreza. O sea,

$$\mathcal{P}(x,z) < \mathcal{P}(y,z),$$

si existe $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_j < z$;
(II) $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$, y $x_j = y_j + r$.

Ambos *axiomas de monotonía*, señalan que el indicador debe ser una función decreciente en las unidades de análisis cuyos ingresos son inferiores a la línea de pobreza establecida, pues cualquier disminución en los ingresos de los individuos considerados pobres incrementará los niveles de pobreza. Sin embargo, la versión fuerte permite que toda aquella unidad de análisis cuyo ingreso cambie puede al menos alcanzar la línea de pobreza (umbral); pero la versión débil no lo permite. De hecho, en [11] se verifica que AMF$\Rightarrow$AMD.

ATM. Transferencias Mínimas: Dados otros elementos, una transferencia de ingresos de un individuo por debajo de la línea de pobreza a cualquier otro individuo con un nivel de ingresos más alto también pobre, tal que se mantiene invariante el número de unidades de análisis pobres antes y después de efectuada dicha transferencia, trae como consecuencia un incremento de la medida de pobreza. Matemáticamente:

$$\mathcal{P}(x,z) > \mathcal{P}(y,z),$$

si existe $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_j < y_i < z$;
(II) $x_k = y_k$ para todo $k \neq i, j$, $x_j = y_j - r < z$ y $x_i = y_i + r < z$.

Esta versión postula entonces que el número de individuos pobres permanece invariante una vez realizada la transferencia; y además, establece que las dos unidades de análisis implicadas en la transferencia permanecen en situación de pobreza, antes y después de haberse efectuado ella.

ATE. Transferencias Extrafuertes: Dados otros elementos, si ocurre una transferencia de ingresos de un individuo no pobre a cualquier otro individuo pobre, donde una vez realizada la transferencia tal condición social de la unidad de análisis receptora puede cambiar, y aunado a ello, la transferencia no necesariamente genera un cambio de condición social para la unidad de análisis donante, entonces la medida de pobreza disminuye. Matemáticamente,

$$\mathcal{P}(x,z) < \mathcal{P}(y,z),$$

si existe $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ tal que:

(I) $y_i < z$, $y_j \geq z$;

(II) $x_k = y_k$ para todo $k \neq i, j$, $x_j = y_j - r$ y $x_i = y_i + r$.

El ATE se diferencia del ATM en que solamente exige que el individuo receptor sea pobre, pero no exige que después de la transferencia siga siendo pobre, ni que la unidad de análisis donante sea pobre.

En general, los *axiomas de transferencias* sostienen entonces que si se hacen transferencias para reducir la desigualdad entre los individuos pobres, ello conlleva a una reducción del valor para el indicador de pobreza. Más aún, en [11] prueban que ATE⇒ATF⇒ATD⇒ATM.

Adicionalmente, Kakwani (1980a, [20]), propuso el siguiente *axioma de sensibilidad* respecto a las transferencias de ingresos que pueden darse a partir de una distribución determinada:

ASTD. Sensibilidad de Transferencias Débiles: Sean $x, x^{'} \in \mathbb{R}^n_+$ dos distribuciones de ingresos obtenidas de una en común $y \in \mathbb{R}^n_+$, a través de una transferencia $r > 0$ del nivel de ingresos y_i a y_j, y de y_k a y_l, respectivamente. Si se satisfacen:

(I) $y_i < z, y_k < z$;
(II) $y_k > y_i$;
(III) $y_j - y_i = y_l - y_k > r$;
(IV) $y_j - y_i < z, y_l - y_k < z$.

Entonces, tales condiciones garantizan:

$$\mathcal{P}(x, z) > \mathcal{P}(x^{'}, z).$$

Por otra parte, Watts (1968, [31]), fue el primero en discutir los dos *axiomas de continuidad* explicados en lo que sigue:

AC. Continuidad: La medida de pobreza es continua como función del vector de ingresos de la población estudiada para una línea de pobreza dada. Esto es, para todo $(y, z) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathcal{P}(y, z)$ es continua en (y, z).

ACR. Continuidad Restricta: La medida de pobreza es continua por la izquierda como función de cualquier nivel de ingresos por debajo de la línea de pobreza establecida. O sea, $\mathcal{P}(y, z)$ es continua por la izquierda en todo y_j de $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, para el cual se cumple que $y_j < z$.

En general, ambos axiomas exigen que el indicador sea continuo tanto en los ingresos como en la línea de pobreza; y que a su vez, pequeños cambios en los niveles de ingresos de las unidades de análisis pobres, no traigan consigo cambios significativos en los niveles de pobreza.

Otras propiedades de suma importancia en la literatura, son el *axioma de descomponibilidad aditiva* y el *axioma de consistencia de subgrupos*. El primero de estos aparece por primera vez en Hamada y Takayama (1977, [17]); y fue subsecuentemente discutido por Kakwani (1980b, [21]); y Foster, Greer y Thorbecke (1984, [12]). El segundo fue propuesto por Foster y Shorrocks (1991, [14]):

ADA. Descomponibilidad Aditiva: Hay medidas que pueden expresarse como una suma de indicadores de pobreza de cada grupo de la población, donde cada uno de ellos se encuentra ponderado por su respectivo peso. Esto es, dado un vector de ingresos $y \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $y = (y^1, y^2, ..., y^k)$, con y^j la distribución de ingresos del j-ésimo grupo conformado por n_j individuos del total de la muestra $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$ de la población, entonces:

$$\mathcal{P}(y, z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{n} \mathcal{P}(y^j, z).$$

De manera que este axioma se aplica a poblaciones que pueden ser divididas en grupos según alguna característica económica, social, demográfica, o de cualquier otra índole.

ACS. Consistencia de Subgrupos: Dada una población, tal que ella puede dividirse en dos subgrupos. Una vez establecida cualquier línea de pobreza, si para alguno de estos dos subgrupos la distribución de los ingresos de los individuos que lo conforman no cambia; pero al contrario, para el otro subgrupo se observa una reducción de los ingresos de un individuo por debajo de la línea de pobreza, entonces ello trae como consecuencia un incremento de la medida de pobreza. Visto de otro modo, para $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2)$ dos distribuciones de ingresos, $n = n_1 + n_2$ el tamaño muestral total, $z > 0$ la línea de pobreza común para ambas, y $r > 0$,

$$\mathcal{P}(x, z) > \mathcal{P}(y, z),$$

si:

(i) $\mathcal{P}(x^1, z) = \mathcal{P}(y^1, z)$;
(ii) existe $1 \leq j \leq n_2$ tal que $y_j < z$, $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$, y $x_j = y_j - r$,

pues la condición (ii) implica: $\mathcal{P}(x^2, z) > \mathcal{P}(y^2, z)$.

El espíritu del ACS es el mismo del axioma clásico de monotonía débil; con la diferencia de que el primero referido hace alusión a dos subgrupos. Análogamente, Kundu y Smith (1983, [22]), presentan el siguiente axioma directamente relacionado con el de monotonía fuerte:

ADP. Decrecimiento de la Pobreza: Dada cualquier distribución de ingresos. Una vez calculada la medida, si para uno de los individuos actualmente considerado pobre, por una u otra razón ocurre un cambio en su nivel de ingresos, el cual, hace que ahora al menos alcance la línea de pobreza establecida, entonces el indicador de pobreza disminuye. En otro contexto:

$$\mathcal{P}(x, z) < \mathcal{P}(y, z),$$

si existe $1 \leq j \leq n$ tal que:

(i) $y_j < z$;
(ii) $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$, y $x_j = y_j + r \geq z$.

Para finalizar, otros axiomas propuestos son los siguientes:

AS. Simetría: Dadas dos distribuciones de ingresos, si una se obtiene a partir de una permutación de la otra, entonces la medida de pobreza para ambas distribuciones de ingresos coincide. Esto es,

$$\mathcal{P}(x, z) = \mathcal{P}(y, z),$$

si para $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, $x = P \cdot y$, con P una matriz de ceros y unos tal que todas sus filas y columnas suman uno. La importancia del axioma es que establece la posibilidad de ordenar los ingresos de mayor a menor o viceversa, sin que el valor del indicador cambie. Para mayores detalles al respecto, es recomendable revisar la contribución a la literatura de Foster y Sen (1997, [13]).

AIR. Invarianza de Replicación: Si una distribución de ingresos es obtenida a partir de una k-replicación de la otra, entonces la medida de pobreza para ambas distribuciones de ingresos coincide. Esto es,

$$\mathcal{P}(x, z) = \mathcal{P}(y, z),$$

si para $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, y cualquier entero positivo k se cumple:

(i) $n(x) = k \cdot n(y)$;
(ii) $x = (y, y, ..., y)$,

con $n(x)$ y $n(y)$ los tamaños muestrales de ambas distribuciones consideradas. Chakravarty (1983, [6]) y Thon (1983, [30]) fueron los primeros en introducir tal axioma en el ámbito de la medición de la pobreza.

AILP. Incremento de la Línea de Pobreza: Dadas dos poblaciones idénticas, una con la línea de pobreza mayor debe tener un nivel más alto del indicador. Así,

$$\mathcal{P}(y, z) < \mathcal{P}(y, z^{'}),$$

siempre y cuando $z < z^{'}$. Los primeros en introducir el axioma fueron Clark, Hemming y Ulph (1981, [7]); y posteriormente Chakravarty (1983, [6]).

AN. Normalización: Si para una muestra determinada no existen individuos con niveles de ingresos por debajo de la línea de pobreza establecida, entonces el indicador vale 0. Es decir,

$$\mathcal{P}(y, z) = 0,$$

si $y_j \geq z$, para todo $j = 1, 2, ..., n$ tal que $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

4. Medidas Objetivas de Pobreza

Aparte de las tres medidas objetivas básicas presentadas en la segunda sección, la literatura es amplia respecto de la medición de la pobreza a partir de los ingresos, bajo el enfoque axiomático. Al considerar la función $f(y_j, z)$ definida arriba, la cual recoge los déficits de tal condición, en adelante un *indicador agregado de pobreza* es definido como una media ponderada de tales déficit:

$$\overline{\mathcal{P}}(y, z) = k \sum_{j=1}^{q} w(y_j, z) \cdot f(y_j, z),$$

donde k es una *constante normalizadora*, y $w(.,.)$ es una *función de ponderación*.

Siguiendo el trabajo de Zheng (1997, [32]), dependiendo de la función de ponderación podemos clasificar los indicadores agregados de pobreza en dos grupos, el primero comprende las *medidas de pobreza del tipo Sen*; mientras que el segundo comprende las *medidas de pobreza consistentes por subgrupos sensibles a la distribución* La más conocida del primero, naturalmente es la propuesta en [25] dada por:

$$S(y,z) = \frac{2}{(q+1)nz}\sum_{j=1}^{q}(z-y_j)(q+1-j). \tag{4}$$

Esta medida también puede expresarse como:

$$S(y,z) = H(y,z)\cdot[I(y,z) + \frac{q}{q+1}(1-I(y,z))\cdot G(y,z)], \tag{5}$$

donde

$$G(y,z) = 1 - \sum_{j=1}^{q}[2(q-j)+1]\frac{y_j}{q^2\mu_p}$$

es el *coeficiente de Gini* calculado sobre el ingreso de las unidades de análisis pobres, y $\mu_p = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} y_j$ como en (2). Para Blackwood y Lynch (1994, [5]), lo novedoso de la medida es que refleja (i) el número de unidades de análisis pobres, (ii) el grado de pobreza de los individuos (es decir, que tan pobres son aquellos individuos que se consideran bajo tal situación) y (iii) la distribución del ingreso de los pobres, a través de la incorporación de las medidas objetivas básicas $H(y,z)$ e $I(y,z)$; así como del índice $G(y,z)$, respectivamente.

Diversas medidas de este tipo han sido propuestas luego del trabajo de Sen. Por ejemplo, Thon (1979, [29]) plantea un indicador que pondera el individuo pobre por el lugar que ocupa dentro de la muestra total; y no solamente respecto a los pobres, a diferencia de lo que ocurre en (4). Corresponde al caso:

$$T(y,z) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{q}(n+1-j)\left(\frac{z-y_j}{z}\right). \tag{6}$$

Kakwani (1980a, [20]) por su parte, generaliza la medida de Sen. Tal propuesta se refleja en la expresión:

$$K(y,z,k) = \frac{q}{n\sum_{j=1}^{q} j^k}\sum_{j=1}^{q}(q+1-j)^k\left(\frac{z-y_j}{z}\right), \tag{7}$$

que pondera los déficit a través del parámetro de potencias (k) del número de orden que ocupa cada individuo dentro del subgrupo de los considerados en situación de pobreza para una muestra determinada. El parámetro k refleja cierta “aversión” al lugar ocupado dentro de la sociedad, y para los casos particulares $k = 0$ y $k = 1$, valen las relaciones $K(y,z,0) = HI(y,z)$ y $K(y,z,1) = S(y,z)$, el cociente combinado; y el indicador de Sen, respectivamente. Posterior a ello, Shorrocks (1995, [27]) introduce la medida:

$$Sh(y,z) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{q}(2n-2j+1)\left(\frac{z-y_j}{z}\right). \tag{8}$$

Adicionalmente, sea

$$y_j^* = \begin{cases} y_j & \text{si } y_j < z, \\ z & \text{si } y_j \geq z. \end{cases}$$

Tal que cada j-ésimo elemento forma parte de la *distribución censurada por la línea de pobreza*:

$$Y^*(z) = (y_1^*, y_2^*, ..., y_q^*, y_{q+1}^*, ..., y_n^*),$$

definida en [17] como un vector de componentes en orden no decreciente. Takayama (1979, [28]) define su medida de pobreza:

$$Ta(y,z) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu_0 n^2} \sum_{j=1}^{n} (n+1-j) y_j^*, \tag{9}$$

donde $\mu_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j^*$ es el ingreso promedio de la distribución censurada por encima de la línea de pobreza. Este indicador incorpora información sobre los hogares ubicados por encima del umbral de pobreza, y puede entenderse como el *coeficiente de Gini de la distribución censurada* (distribución en la que los hogares por encima del umbral toman un valor de z para su ingreso).

En general, las medidas del tipo Sen adoptan la forma:

$$J(y,z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{q} w\left(\frac{j}{n}, \frac{q}{n}\right) \cdot f(y_j, z), \tag{10}$$

con $w(.,.)$ la función de ponderación respectiva, y $f(y_j, z)$ una función medible apropiada[4]. Por otro lado, la forma general de las medidas de pobreza consistentes por subgrupos sensibles a la distribución es:

$$J(y,z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{q} f(y_j, z). \tag{11}$$

Dentro del grupo de medidas de pobreza de este tipo, destacan entre otras, el indicador de Watts (1968, [31]) sensible a la distribución de ingresos:

$$W(y,z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{q} (\ln z - \ln y_j). \tag{12}$$

Por su parte, Clark, Hemming y Ulph (1981, [7]) proponen una medida de pobreza que a pesar de no ser aditivamente descomponible (separable), admite una descomposición a través del axioma de consistencia de subgrupos, una vez que hayan sido definidos. Su formulación es la siguiente:

$$CHU(y,z,\beta) = 1 - \frac{1}{z} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\text{mín}\{y_j, z\})^{\beta} \right]^{1/\beta}, \tag{13}$$

con $\beta < 1$. Posteriormente, Chakravarty (1983, [6]) propone otro indicador que se puede interpretar como una medida de la proximidad observada entre el perfil de los ingresos de los individuos pobres y la línea de pobreza considerada:

$$Ch(y,z,\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{q} \left[1 - \left(\frac{y_j}{z}\right)^{\beta} \right], \tag{14}$$

[4]Una discusión detallada en cuanto a los axiomas que se cumplen y no se cumplen para las medidas del tipo Sen y las objetivas básicas aparece en [32].

con $0 < \beta < 1$. La medida de Chakravarty cumple con todos los axiomas explicados arriba, excepto con el ADP.

Ahora, hacemos hincapié en el conocido indicador de Foster, Greer y Thorbecke (1984, [12]). Este viene dado por:

$$FGT(y,z,\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{z-y_j}{z}\right)^{\alpha}, \tag{15}$$

que enfatiza el *grado de aversión a la pobreza,* mediante la inclusión del parámetro $\alpha \geq 0$. Para $\alpha = 0$, $FGT(y,z,0) = H(y,z)$, indicador que recoge la *incidencia de la pobreza*. Si $\alpha = 1$, entonces $FGT(y,z,1) = HI(y,z)$ la cual, refleja la *intensidad de la pobreza* como el producto de la proporción de pobres por el desnivel de pobreza; mientras que para $\alpha = 2$, $FGT(y,z,2)$ se interpreta como la *profundidad o desigualdad de la pobreza*.

En cuanto al último aspecto mencionado en el parágrafo anterior, tenemos que:

$$FGT(y,z,2) = H(y,z)\cdot[I^2(y,z) + (1 - I^2(y,z))\cdot CV_p^2], \tag{16}$$

donde

$$CV_p^2 = \left(\frac{\mu_p}{\sigma_p}\right)^2$$

es el cuadrado del *coeficiente de variación de Pearson* $CV_p = \frac{\mu_p}{\sigma_p}$ para los ingresos de las unidades de análisis pobres de la muestra, con $\mu_p = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} y_j$, y $\sigma_p = \left(\frac{1}{q-1}\sum_{j=1}^{q}(y_j - \mu_p)^2\right)^{1/2}$ la desviación estándar respecto del ingreso promedio de los pobres, respectivamente. Como la medida ahora incorpora un índice de desigualdad para el caso particular $\alpha = 2$, análogamente a la propuesta por Sen definida en (5), la medida de Foster, Greer y Thorbecke refleja tres dimensiones del problema pobreza; esto es, el número de individuos pobres (incidencia), el grado de pobreza de estos individuos (intensidad), y la distribución de sus ingresos (desigualdad), al incorporar en (16) los indicadores básicos $H(y,z)$ e $I(y,z)$; así como el coeficiente de variación de Pearson sobre los ingresos de las unidades de análisis pobres, CV_p.

En contraste con la medida de Sen, que pondera los déficit de pobreza mediante el lugar que ocupa cada individuo entre los pobres, ordenados en forma no decreciente según sus ingresos; Foster, Greer y Thorbecke consideran las ponderaciones a partir de los déficit de pobreza. Así, a diferencia del sistema de ponderaciones por "orden de clasificación" adoptado por Sen; el trabajo de Foster, Greer y Thorbecke (FGT) considera que tales ponderaciones dependen de la distancia del ingreso de una persona a la línea de pobreza elegida, mas no del número de personas pobres que quedan entre su ingreso y el umbral de pobreza.

Debido a la inclusión del *parámetro de aversión a la pobreza* $\alpha \geq 0$ en el trabajo de FGT, cuanto mayor sea su valor, más énfasis se le da al más pobre de las unidades de análisis pobres para la muestra; o sea, a mayores valores de α, más importancia relativa se le da a los desniveles de pobreza relativa mayores. Vale destacar que la medida de FGT cumple con todos los axiomas desarrollados en la tercera sección, para $\alpha \geq 2$. Finalmente, respecto de este grupo de medidas, Hagenaars (1987, [16]) propone el indicador:

$$Ha(y,z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{\ln y_j}{\ln z}\right). \tag{17}$$

5. Conclusiones

En esta investigación se planteó como objetivo fundamental, presentar de forma clara y concisa, una de las principales definiciones propuestas en la literatura económica respecto del problema pobreza; así como las propiedades fundamentales que comprende el método axiomático propuesto a partir del trabajo de Sen publicado en 1976, desde el punto de vista económico-matemático. Además de ello, se planteó realizar una explicación precisa de cada una de las medidas de pobreza unidimensionales más relevantes, obtenidas a partir de la distribución de los ingresos; soportadas todas ellas en la definición axiomática punto de partida.

Abordar el problema pobreza apenas desde el punto de vista teórico requiere de mucho cuidado. Los diferentes matices que el fenómeno puede tomar, y lo álgido que puede que puede tornarse una discusión respecto de él, frecuentemente hace que el tema sea dejado a un lado por muchos agentes que hacen vida en cualquier sociedad (personas, familias conformadas, firmas privadas, organismos públicos). Sin embargo, aspectos fundamentales como el interés de la medición de la pobreza en una sociedad se encuentra completamente justificado, pues de allí debería generarse en un principio para ella, al menos un diagnóstico económico-social.

El proceso de medición debe ser llevado a cabo en dos etapas. Primero, es fundamental adoptar al menos un criterio que permita identificar aquellos individuos considerados pobres. Luego, debe elegirse (o construirse) algún instrumento que "recoja y resuma numéricamente" al menos una característica que refleje el poder adquisitivo o el bienestar de tales unidades de análisis en situación de pobreza.

Al respecto, el enfoque axiomático ha permitido de una forma u otra, "matematizar" diversas características propias de la teoría económica que es recomendable, las satisfagan cualquier medida o indicador clásico de pobreza definido en la segunda sección de esta investigación. Vale destacar que a partir de algunas consideraciones hechas por Sen en su propuesta inicial, el enfoque fue enriqueciéndose en el tiempo, de tal manera que actualmente, es posible caracterizar y clasificar diversos indicadores de tal naturaleza (ver [32], pág. 143 para mayores detalles).

Posteriormente, la revisión general de literatura de ciertos indicadores construidos sobre la base de la metodología axiomática, apuntala al hecho de que el proceso de cuantificación y análisis de la pobreza puede ir mucho más allá de que simplemente a partir de cierto criterio, se considere quienes son pobres y quienes no. En este sentido, aspectos como la medición de la intensidad del fenómeno son de suma importancia para el análisis en conjunto del fenómeno, ya que refleja la magnitud o profundidad de la pobreza que sufre una determinada sociedad.

Al analizar por ejemplo, cada uno de los elementos que pueden ser cuantificados a través de la medida de Sen, es natural ver la relación existente entre la pobreza y la desigualdad. De hecho, Zheng en el trabajo antes citado, divide los indicadores en cuatro grupos. Las básicas expuestas en la segunda sección las denomina *medidas de clase 0*. Por otro lado, se refiere a las del tipo Sen como *medidas de clase 1*; mientras que a las de pobreza consistentes por subgrupos sensibles a la distribución las denomina *medidas de clase 3*. Justamente en el medio de ellas, el autor denomina *medidas de clase 2* a las comúnmente conocidas en la literatura como *medidas éticas o normativas de pobreza*, construidas todas ellas a partir de funciones de bienestar o de valoración social, y soportadas en el denominado *método del bienestar*, destacando en el ámbito de tal procedimiento, el trabajo de Dalton y los trabajos de Atkinson que aparecen en las referencias, entre otros.

Debido al abordaje de nuestra investigación, el problema de la desigualdad fue apenas "implícitamente y someramente " abordado; sin embargo, es fundamental destacar que en diversas ocasiones, la combinación de algunos métodos de identificación y agregación puede ser la mejor alternativa para la medición de fenómenos económico-sociales de este tipo. La metodología propuesta por Sen puede convivir y complementarse con el enfoque del bienestar; y este hecho deja abierto un abanico de posibilidades respecto al desarrollo de investigaciones futuras por nuestra parte, que incluyan las medidas éticas o normativas de pobreza antes mencionadas. Más aún, no descartamos la posibilidad de hacer inferencia estadística acerca de los niveles de pobreza y desigualdad en Venezuela para un lapso de tiempo específico, utilizando algunos de los indicadores propuestos en la literatura, los cuales miden distintas características o dimensiones de los problemas propiamente dichos.

Como una reflexión final, en concordancia con algunos entes como el Fondo Monetario Internacional (FMI), el Banco Mundial (BM), la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), o el Banco Interamericano de Desarrollo (BID), entre otros, saber cuantos pobres hay en una sociedad, indagar acerca de las posibles causas que los llevaron a tal condición, y tener al menos una noción de las diferencias económicas y sociales entre ellos, son entre otros aspectos, factores que deben ser tomados en cuenta para diseñar políticas públicas y económicas que permitan sacarlos de tal condición social, insertarlos adecuadamente en el aparato productivo de la sociedad, y hacerlos menos desiguales entre ellos y respecto al resto de los individuos que la conforman.

Referencias

[1] R. Acevedo y P. Harmath (2009). Determinantes económicos de la pobreza total en Venezuela: 1975–2000. *Economía*. **XXXIV(28)**, 161–189.

[2] A. B. Atkinson (1970). On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*. **2**, 244–263.

[3] A. B. Atkinson (1983). *The Economics of Inequality*. Oxford: Clarendon Press.

[4] A. B. Atkinson (1987). On the Measurement of Poverty. *Econometrica*. **55**, 749–764.

[5] D. L. Blackwood and R. G. Lynch (1994). The Measurement of Inequality and Poverty: A Policy Maker's Guide to the Literature. *World Development*. **22(4)**, 567–578.

[6] S. Chakravarty (1983). A new index of poverty. *Mathematical Social Sciences*. **6(3)**, 307–313.

[7] S. Clark, R. Hemming and D. Ulph (1981). On Indices for the Measurement of Poverty. *The Economic Journal*. **91(362)**, 515–526.

[8] H. Dalton (1920). The Measurement of the Inequality of Incomes. *The Economic Journal*. **30**, 348–361.

[9] S. De Lucas y S. Ortiz (2010). Análisis regional de la pobreza para el colectivo de la tercera edad: inferencia clásica vs. técnicas bootstrap. *Estadística española*. **52(173)**, 155–191.

[10] J. Domínguez y A. M. Martín (2006). Medición de la pobreza: una revisión de los principales indicadores. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*. **2**, 27–66.

[11] D. Donaldson and J. A. Weymark (1986). Properties of fixed-population poverty indices. *International Economic Review*. **27(3)**, 667–688.

[12] J. Foster, J. Greer and E. Thorbecke (1984). A Class of Decomposable Poverty Measures. *Econometrica*. **52(3)**, 761–766.

[13] J. Foster and A. Sen (1997). *On Economic Inequality*. Oxford University Press, New York.

[14] J. Foster and A. Shorrocks (1991). Subgroup Consistent Poverty Indices. *Econometrica*. **59(3)**, 687–709.

[15] M. J. Ginzo (2011). Índices de pobreza en Galicia. *X Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións. Pontevedra, 3-4-5 de novembro*.

[16] A. Hagenaars (1987). A class of poverty indices. *International Economic Review*. **28(3)**, 583–607.

[17] K. Hamada and N. Takayama (1977). Censored Income Distributions and the Measurement of Poverty. *Bulletin of the International Statistical Institute*. **47**, 617–630.

[18] Instituto Nacional de Estadística (2016). Ficha Técnica de Línea de Pobreza por Ingreso. Disponible en: http://www.ine.gob.ve [Accedido 1 de Febrero de 2017].

[19] Instituto Nacional de Estadística (2016). Ficha Técnica de las Necesidades Básicas Insatisfechas (NBI). Disponible en: http://www.ine.gob.ve [Accedido 1 de Febrero de 2017].

[20] N. C. Kakwani (1980a). On a Class of Poverty Measures. *Econometrica*. **48(2)**, 437–446.

[21] N. C. Kakwani (1980b). *Income Inequality and Poverty*. Oxford University Press, New York.

[22] A. Kundu and T. E. Smith (1983). An Imposibility Theorem on Poverty Indices. *International Economic Review*. **24**, 423–434.

[23] J. Núñez (2009). Estado actual y nuevas aproximaciones a la medición de la pobreza. *Estudios de Economía Aplicada*. **27(2)**, 325–344.

[24] C. T. Seck (2011). *Estimation Non-paramétrique et Convergence Faible des Mesures de Pauvreté*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

[25] A. Sen (1976). Poverty: an ordinal approach to measurement. *Econometrica*. **44(2)**, 219–231.

[26] A. Sen (1981). *Poverty and Famines: An Essay on Entitlement and Deprivation*. Oxford: Clarendon Press.

[27] A. Shorrocks (1995). Revisiting the Sen poverty index. *Econometrica*. **63**, 1225–1230.

[28] N. Takayama (1979). Poverty, income inequality, and their measures: Professor Sen's axiomatic approach. *Econometrica*. **47(3)**, 747–759.

[29] D. Thon (1979). On measuring poverty. *Review of Income and Wealth*. **25(4)**, 429–439.

[30] D. Thon (1983). A Poverty Measure. *The Indian Economic Journal*. **30**, 55–70.

[31] H. Watts (1968). *An Economic Definition of Poverty*. In D. P. Moynihan (ed.). *On Understanding Poverty*. New York: Basic Books.

[32] B. Zheng (1997). Aggregate Poverty Measures. *Journal of Economic Surveys*. **11(2)**, 123–162.