

Control de Sistemas Biológicos Impulsivos mediante operadores maximales

Control of Impulsive Biological Systems by Maximal Operators

Romina Cardo¹ y Alvaro Corvalán²

Pedro Morán 3831 2º C, C.A.B.A., Argentina, C1419HKS

¹*rcardo@ungs.edu.ar*, ²*acorvala@ungs.edu.ar*

Resumen

En este artículo consideramos una estrategia basada en los valores del operador maximal de Hardy-Littlewood a izquierda y el operador de Hardy para controlar sistemas impulsivos. Por ejemplo, la siembra pulsante de alevines en el caso en que interactúan dos o más especies ictícolas competitivas. Esta estrategia puede ocurrir como natural desde el punto de vista de quienes proponen la siembra y también permite controlar las magnitudes resultantes de especies competidoras.

Palabras claves: Sistemas Impulsivos, Operador Maximal de Hardy-Littlewood, Operador de Hardy, Ecología de Poblaciones

Abstract

In this paper we consider a strategy based on the values of the left one-sided maximal Hardy-Littlewood Operator and the Hardy Operator to control impulsive systems. For instance the pulsating seeding of young fish in the case where two or more competitive species interact. This strategy may occur as a natural from the point of view of those who propose seeding and also allows controlling the magnitudes resulting from competing species.

Keywords: Impulsive Systems, Hardy-Littlewood Maximal Operator, Hardy Operator, Population ecology

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de ecuaciones diferenciales impulsivas consiste en un esquema donde la evolución de cierta variable se rige durante ciertos intervalos temporales por una ecuación diferencial, interrumpida por un impulso instantáneo que perturba los valores y que a continuación vuelve al régimen dado por la ecuación diferencial a partir del nuevo valor inicial que se obtiene tras la perturbación.

Una aplicación destacada de las ecuaciones diferenciales impulsivas es su utilidad para la modelización del comportamiento de la biomasa de poblaciones individuales en ambientes donde ocasionalmente se permite la captura pulsante masiva de algunas especies seguidos de períodos de veda. (ver p. ej [4])

Otra situación, quizás menos estudiada, es la que consideraremos donde el impulso consiste en aumentar el valor de cierta variable en lugar de reducirlo. A continuación describimos un caso en que tal situación sucede, pero sin duda esquemas similares pueden ser aplicados en casos análogos:

En ciertos ámbitos lacustres en que se permite de forma habitual la pesca deportiva esta se realiza de manera continua, y se incrementa en forma impulsiva la biomasa de una especie mediante la siembra masiva de alevines de la misma.

En los casos en que interactúan dos o más especies competitivas bajo captura la dinámica se complica considerablemente. Referimos al caso de muchos lagos patagónicos abiertos a la pesca deportiva donde se produce dicha competencia entre especies autóctonas (existentes en la región incluso en el registro fósil), por un lado: las percas (*Percichthys trucha* –o trucha criolla, o perca de boca chica-, y *Percichthys colhuapiensis* –perca de boca grande-), y las especies exóticas: trucha arcoíris (*Oncorhynchus mykiss*) y trucha marrón (*Salmo trutta*), introducidas recientemente por motivos comerciales. La práctica de la siembra intensiva ocasional de alevines de truchas -los pescadores prefieren fuertemente a las truchas debido a la mayor resistencia que oponen- introduce variaciones pulsantes abruptas que fácilmente pueden inducir una dinámica caótica (ver [2]).

Como veremos, en determinadas condiciones las especies autóctonas llegan a veces a puntos cercanos a la extinción en determinado habitat. Si bien es posible reintroducirlas -aunque rara vez se hace-, no es lo ideal, ya que va en sentido contrario a la preservación de la diversidad genética de dichas especies. En otros casos el efecto de las siembras es menor al deseado, y la población de truchas tiende a disminuir en promedio, a pesar de los impulsos.

En este trabajo consideramos una estrategia para la decisión de los momentos de siembra teniendo en cuenta los valores del operador maximal de Hardy-Littlewood (a izquierda), y del operador de Hardy, para la masa de la población a introducir; dicha estrategia puede presentarse como natural desde el punto de vista de quienes propulsan la siembra, y por otra parte podemos obtener en esta situación resultados que permiten controlar las magnitudes resultantes de las especies.

Aquí consideramos ecosistemas relativamente cerrados (estanques, lagunas, lagos) donde puedan desprejarse las migraciones, en latitudes al sur del paralelo 40 S -v.g., Lago Argentino, Laguna Verde, Lago Strobel, Lago Largo, Lago Futalaufquén, etc. En otras provincias argentinas: Córdoba, La Pampa, Buenos Aires, suele realizarse también siembra de truchas pero allí el problema no se presenta debido a que en ellas hay períodos del año en que las temperaturas relativamente altas, lo cual disminuye la cantidad de oxígeno disuelto en el agua. A partir de los 17/18 C las truchas tienen dificultades para digerir el alimento por carencia de oxígeno, y temperaturas superiores a 20 C resultan letales para las truchas (ver [6]). Es verosímil que situaciones similares se presenten también en lagos patagónicos de la República de Chile pero no tenemos al momento datos concretos.

Por simplicidad consideraremos el escenario donde interactúan 2 grupos de peces, ya sea porque sólo hay una especie autóctona de interés y sólo 1 exótica, o bien reuniendo por un lado las poblaciones autóctonas y por otro las foráneas: $X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$, donde X_1 es la biomasa del grupo originario (Percas), y X_2 corresponde a los peces exóticos (Truchas).

2. MODELOS IMPULSIVOS CON TIEMPOS DE IMPULSOS PREFIJADOS

En las ecuaciones diferenciales impulsivas se consideran usualmente dos escalas de tiempo, una continua donde la evolución es regida por una ecuación diferencial, y otra discreta donde para una secuencia de instantes aislados la evolución es impulsiva:

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \text{ si } t \neq \tau_k \\ X(t^+) = g(k, X) \text{ si } t = \tau_k \end{cases}$$

Habitualmente los tiempos $\{\dots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots\}$ de impulso son prefijados (equiespaciados o no) y los impulsos $X(\tau_k^+)$ dependen de k y sólo del valor instantáneo de X (es decir $X(\tau_k^+)$).

3. MODELO IMPULSIVO CON TIEMPOS DE IMPULSOS DEPENDIENTES DE LOS VALORES HISTÓRICOS DE X

Consideramos en cambio un modelo impulsivo en que los tiempos de impulso dependen de la imagen por X de los tiempos previos -así como también las magnitudes de los impulsos.

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \text{ si } t \neq \tau_k \\ X(t^+) = g(K, X((-\infty, \tau_k])) \text{ si } t = \tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : Q(X((-\infty, t])) > \lambda\} \end{cases}$$

4. MODELO CONCRETO CORRESPONDIENTE AL PROBLEMA DE PESCA SIEMBRA

En nuestro problema modelamos la situación en la escala continua por un modelo de competencia logístico en la biomasa total de ambas especies competidoras, donde K indica el valor de saturación, q un factor que indica la tasa de pesca, P un vector que indica el porcentaje no devuelto de las captura y C la matriz que indica las influencias mutuas de las especies (la dependencia de X es solo a fin de la posible consideraciones de masas críticas para cada especie, debajo de las cuales cabe esperar que se extingan aunque sean no nulas -por ejemplo por escasas probabilidades de cruzamiento-). El segundo término podría incorporarse al primero, modificando C , pero es preferible considerarlo aparte para facilitar la interpretación. Los valores de C , q y P fueron tomados a partir de datos del comportamiento conocido de las especies, datos informados de pesca y el relevamiento encuestado del aprovechamiento de los agentes respecto de las presas capturadas.

$$X'(t) = C(X(t)) * X(t) * \left(1 - \frac{\|X(t)\|_1}{K}\right) - q * \langle P, X(t) \rangle$$

Como las masas de las especies, y la contribución de las mismas a la derivada son estimativas, y además pueden sufrir pequeñas perturbaciones de diverso origen en realidad consideramos:

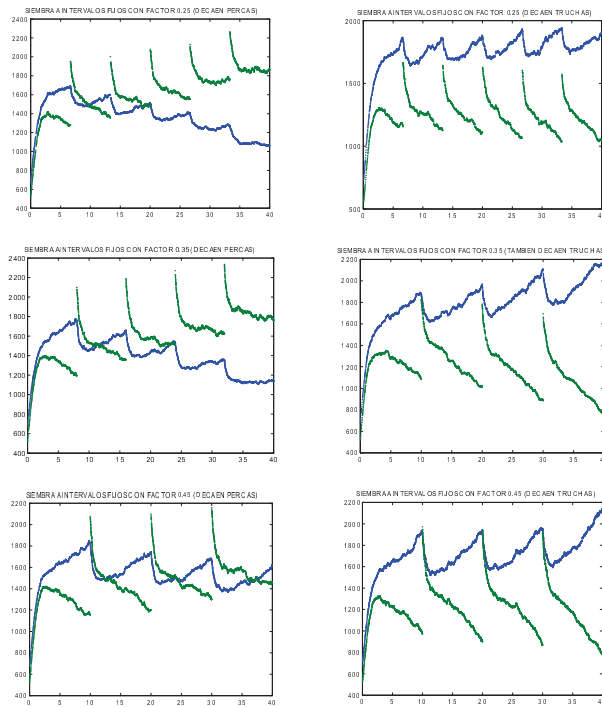
$$X'(t) = C(\tilde{X}(t)) * \tilde{X}(t) * \left(1 - \frac{\|\tilde{X}(t)\|_1}{K}\right) - q * \langle P, \tilde{X}(t) \rangle$$

donde $\tilde{X} = X + \eta$, siendo η un vector aleatorio distribuido normalmente -cuya norma es relativamente pequeña respecto de X . Luego, el modelo impulsivo clásico con impulsos equiespaciados será:

$$\begin{cases} X'(t) = C(\bar{X}(t)) * \bar{X}(t) * \left(1 - \frac{\|\bar{X}(t)\|_1}{K}\right) - q * \langle P, \bar{X}(t) \rangle & \text{si } t \neq \tau_k \\ X(t^+) = g(k, X) & \text{si } t = \tau_k \end{cases}$$

Como mencionamos, el éxito de las políticas de siembra pulsante suele ser relativamente contingente, y frecuentemente ocurren situaciones de inestabilidad no deseadas, donde tiene lugar, a la larga, la prevalencia de una u otra especie, y esto para distintas tasas de siembra, y distintas frecuencias para la escala de tiempo impulsiva.

Esto se ha observado empíricamente en casos reales, y también puede notarse en modelos simulados, por ejemplo:



5. MODELO CON TIEMPOS DE IMPULSOS DEPENDIENDO DE VALORES DE OPERADORES SOBRE $X((-\infty, t])$

Teniendo en cuenta lo anterior hemos considerado una estrategia de siembra determinada por los valores de las biomazas.

$$\begin{cases} X'(t) = C(\tilde{X}(t)) * \tilde{X}(t) * \left(1 - \frac{\|\tilde{X}(t)\|_1}{K}\right) - q * \langle P, \tilde{X}(t) \rangle & \text{si } t \neq \tau_k \\ X(t^+) = g(K, X((-\infty, \tau_k])) & \text{si } t = \tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : Q(X((-\infty, t])) > \lambda\} \end{cases}$$

Es decir donde los impulsos (es decir las siembras) se realizan cuando una cantidad dependiendo de los valores previos de las masas de las especies supera una determinada cota de tolerancia λ . Y el valor del impulso depende también de valores actuales o previos, y posiblemente de la constante de saturación del hábitat.

Es conveniente considerar valores históricos, y no puntuales, ya que una medición aislada no proporciona suficiente información para estimar la evolución del sistema. En la práctica, dos sistemas similares que en un determinado momento registren iguales valores de X_1 y X_2 en general no evolucionarán de la misma manera ya que solamente el valor de la biomasa no da cuenta completa del corte etario general de la especie -cuántos huevos, cuántos alevines, cuántos ejemplares inmaduros, cuántos adultos, etcétera-.

La medición histórica permite tener en cuenta dicha contribución ya que las cantidades de ejemplares inmaduros depende de ella. Un modelo propuesto, en línea con el interés de los lobbys de pesca, es considerar las diferencias entre la masa total de las percas y la de las truchas, y sembrar en el primer instante en que el mayor promedio de una ponderación de las diferencias, en períodos previos supera λ .

Esto equivale a considerar para $f(t) = a_1 X_1(t) - a_2 X_2(t)$, el valor del operador lateral (a izquierda de Hardy-Littlewood) M^-

$$M^- f(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t f(s) ds$$

y el criterio para el impulso será:

$$M^- f(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t f(s) ds > \lambda$$

Es interesante el criterio, y tiene ventajas para el análisis debido a que es un operador de tipo débil (1, 1). Por lo tanto si $|f(t)|$ tiende de manera razonable rápida a 0 (si las poblaciones tienden a equilibrar su diferencia en ciertos valores de coexistencia) está acotada la medida del conjunto de tiempos en que $M^- f(t)$ supera λ , en función de la norma 1 de f .

En el caso del modelo de 2 especies competidoras -con siembra de alevines de una especie preferida (entre las 2 existentes)- nuestro criterio para decidir la siembra depende de si el valor de un operador maximal (a izquierda, es decir en función de valores del pasado) supera o no un valor predeterminado λ .

Un criterio más conservador apuntaría a realizar los impulsos sólo cuando los promedios históricos desde el principio de las mediciones (y no el promedio más favorable), a partir de un instante 0 arbitrario. Esto equivale a considerar el operador de Hardy T :

$$Tf(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds$$

También este es un operador acotado en $L^{1,\infty}$, y podríamos considerar el criterio para el impulso:

$$Tf(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds > \lambda$$

Está claro, en cualquier caso, que $M^- \geq T$, aunque, como dijimos, ambos operadores son acotados en $L^{1,\infty}$, es decir que existe $C > 0 : \forall \lambda \geq 0$

$$|\{t : M^- |f|(t) > \lambda\}| \leq C \|f\|_1$$

Cómo $M^- \geq T$, la acotación en $L^{1,\infty}$ de M^- implica la de T . Aquí $\|\cdot\|$ representa la medida de Lebesgue del conjunto. Pero también es posible probar la acotación en un contexto muy general, con pesos, y con otras medidas. (veáse por ejemplo [5])

Considerando $f(t) = a_1 X_1(t) - a_2 X_2(t)$, tal que $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, es decir siendo $\frac{a_1}{a_2}$ la relación límite entre las dos especies competidoras si no hubiera perturbaciones, resulta que en este tipo de modelo (de Levins, ver [1]), resulta $\|f\|_1 < \infty$

En la práctica se pueden encontrar objeciones a ambos criterios: Consideramos, en ambos casos los valores discretizados, con $a_j = f(j)$:

$$M^- f(n) = \sup_{n \geq k \geq 1} \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^n a_j \right)$$

$$Tf(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

Vayamos ahora a la cuestión de qué es lo que tiene que suceder para que el valor de uno de estos operadores supere un valor prefijado λ en un instante $n+1$, si hasta el instante n el valor del operador estaba por debajo de λ :

En el caso del operador maximal la cuestión depende fuertemente del nuevo valor a_{n+1} . En efecto, supongamos

$$\lambda \geq M^- f(n) = \frac{1}{n-k_0+1} \sum_{j=k_0}^n a_j \geq \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^n a_j$$

(para cierto k_0 y para todo k). Ahora si $M^- f(n+1) > \lambda$ tiene que ser

$$M^- f(n+1) = \frac{1}{(n+1)-k+1} \sum_{j=k}^{n+1} a_j > \lambda$$

para cierto k con $n+1 \geq k \geq 1$, luego

$$\sum_{j=k}^{n+1} a_j > ((n+1)-k+1)\lambda = \lambda + (n-k+1)\lambda,$$

es decir

$$a_{n+1} + \sum_{j=k}^n a_j > \lambda + (n-k+1)\lambda,$$

de donde:

$$a_{n+1} - \lambda > (n - k + 1)\lambda - \sum_{j=k}^n a_j,$$

por lo tanto:

$$\frac{a_{n+1} - \lambda}{(n - k + 1)} > \lambda - \frac{1}{(n - k + 1)} \sum_{j=k}^n a_j \geq \lambda - M^- f(n) \geq 0,$$

y entonces $a_{n+1} - \lambda > 0$, luego $a_{n+1} > \lambda$, que resulta una condición necesaria para que $M^- f(n + 1) > \lambda$ dado que $\lambda \geq M^- f(n)$.

Pero además, como $M^- f(n + 1) = \sup_{n+1 \geq k \geq 1} \left(\frac{1}{(n+1)-k+1} \sum_{j=k}^{n+1} a_j \right)$ resulta que el caso $k = n + 1$ es menor que el caso general, es decir:

$$M^- f(n + 1) \geq \left(\frac{1}{(n + 1) - (n + 1) + 1} \sum_{j=n+1}^{n+1} a_j \right) = \frac{1}{1} a_{n+1} = a_{n+1},$$

de modo que si $a_{n+1} > \lambda$ entonces $M^- f(n + 1) \geq a_{n+1} > \lambda$.

Luego $M^- f(n + 1) > \lambda$. Es decir que si $\lambda \geq M^- f(n)$, entonces $a_{n+1} > \lambda$ es condición necesaria y suficiente para que $M^- f(n + 1) > \lambda$.

Es decir, que en el caso discreto el criterio $M^- f(n) > \lambda$, no difiere de observar la diferencia ponderada puntual $f(t) = a_1 X_1(t) - a_2 X_2(t)$ e impulsar siempre que supere cierto valor λ . La condición es entonces bastante laxa (no depende de n).

Sin embargo uno quisiera tener en cuenta el comportamiento de la función en períodos relativamente extensos del pasado y no sólo en el último valor puntual.

Consideremos por otra parte la situación para el operador de Hardy T . Si $\lambda \geq T f(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$, para que

$$\frac{1}{n + 1} \sum_{j=1}^{n+1} a_j = T f(n + 1) > \lambda$$

necesitamos que $\sum_{j=1}^{n+1} a_j > (n + 1)\lambda$, o sea

$$a_{n+1} - \sum_{j=1}^n a_j > \lambda + n\lambda$$

luego $a_{n+1} - \lambda > n\lambda - \sum_{j=1}^n a_j$, entonces:

$$a_{n+1} - \lambda > n \cdot \left(\lambda - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)$$

De aquí resulta que $a_{n+1} - \lambda > 0$ aún es condición necesaria, pero en este caso ya no es suficiente. En términos de la suficiencia debe ser

$$a_{n+1} > \lambda + n \cdot (\lambda - T f(n))$$

que depende de n y de la diferencia entre λ y $Tf(n)$. Es decir que el a_{n+1} debe ser mayor que λ en una cantidad igual a n veces la diferencia entre λ y $Tf(n)$. Por lo tanto es cada vez más difícil al aumentar n , lo que a la larga representa una condición muy restrictiva.

Decidimos entonces usar como criterio que un promedio entre M^- y T supere λ , es decir $\alpha \cdot M^- f(n) + (1 - \alpha) \cdot Tf(n) > \lambda$, para balancear la puntualidad de M^- y la globalidad de T . Además, como

$$\{t : \alpha \cdot M^- f(t) + (1 - \alpha) \cdot Tf(t) > \lambda\} \subset \{t : \alpha \cdot M^- |f|(t) > \lambda\} \cup \{t : (1 - \alpha) \cdot Tf(t) > \lambda\}$$

se puede obtener la acotación de $\alpha \cdot M^- + (1 - \alpha) \cdot T$ a partir de las de M^- y T . Los valores de a_{n+1} y de $\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_j$ claramente no son independientes, pero la covarianza tiende a 0 junto con n , de modo que si

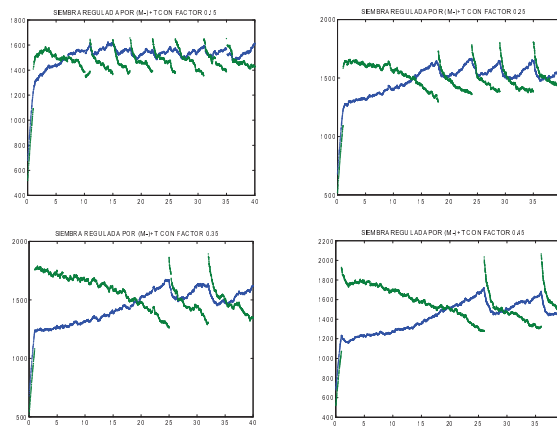
$Tf(n - 1)$ es una fracción de λ , es decir $Tf(n - 1) = (1 - \alpha)c\lambda$ con $0 < c < \frac{1}{(1-\alpha)}$, para que el criterio se dispare es necesario, esencialmente, que $a_{n+1} > \alpha c\lambda$.

En las ensayos simulados, de hecho, con $\alpha = \frac{1}{2}$, es decir con el criterio $\frac{M^- f(n) + Tf(n)}{2} > \lambda$, o sea, promediando sencillamente las condiciones anteriormente consideradas obtuvimos un desempeño estable y bastante adecuado para distintos valores tasas de siembra.

Cabe observar que, como dijimos, cada uno de los operadores está acotado en $L^{1,\infty}$ también el promedio lo está, es decir existe $C > 0 : \forall \lambda \geq 0$

$$\left| \{t : (M^- + T)|f|(t) > 2\lambda\} \right| \leq C \|f\|_1$$

A continuación mostramos algunos ejemplos de evoluciones, cuya estabilidad era similar en varios centenares de ensayos (que incluían perturbaciones aleatorias normalmente distribuidas):



6. CONCLUSIÓN

A modo de conclusión, los resultados de los ensayos sugieren que la estrategia propuesta para la regulación de las poblaciones siguiendo el criterio de siembra determinado por los valores de $M^- + T$ mantendría una evolución tendencialmente estable con distintas combinaciones de criterio de impulso y factor de siembra, y manteniendo acotada la magnitud total de las cantidades a introducir, permitiendo la pesca en los volúmenes y frecuencias habituales y evitando las propensiones a la extinción.

En principio, sobre los modelos numéricos, los impulsos regidos por los operadores propuestos tenderían en general a la estabilidad, ya que los impulsos llevarían los estados de un ciclo en el espacio de fases a otro ciclo contenido en la cápsula convexa del anterior. Los gráficos son representativos de otros muchos ensayos para valores de los parámetros similares a los reportados en casos concretos. Los resultados son heurísticos y no parece fácil obtener criterios de estabilidad generales para modelos de esta complejidad, si bien hay resultados para modelos simplificados (ver [3 y 7]).

En la práctica, hay que tener en cuenta que las especies pueden extinguirse en un determinado nicho ecológico en caso de que la cantidad de ejemplares caiga debajo de cierto umbral crítico y es conveniente obtener datos de los resultados que se producen en el desempeño de estas estrategias en casos reales.

Referencias

- [1] Abramson, Guillermo. "La matemática de los sistemas biológicos", UNC (CNEA). 2013.
- [2] Bayo, Rodrigo E. "Comienzos de la truchicultura en la Provincia de Tierra del Fuego", Asociación Argentina de Acuicultura, 2013.
- [3] Cardo, Romina, Corvalán, Álvaro. "Estabilidad de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas". *MATUA, Revista de Matemática de la Universidad del Atlántico*, Vol. 3, Núm. 1 (2016).
- [4] Córdova Lepe, F., Del Valle, R. Robledo, G. "A pulse fishery model with closures as function of the catch: Conditions for Sustainability.", *Mathematical Biosciences*. Vol. 239, Issue 1, 2012
- [5] Duoandikoetxea Zuazo, J. "Fourier Analysis", Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2001.
- [6] Municipalidad distrital de Ragash, Publicaciones del Centro de Estudios para el desarrollo y la participación. "Manual de Crianza de Truchas" 2009
- [7] Naulin, R.M. y Tapia, C.R., "Estabilidad de Sistemas Lineales Impulsivos", *Revista Colombiana de Matemáticas*, Vol. 29 (1995), págs 103-111.

Para citar este artículo: Romina Cardo y Alvaro Corvalán, 2016, Control de Sistemas Biológicos Impulsivos mediante operadores maximales. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>