Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 1–9

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. III , № 2, (2016)

Funciones definidas positivas en la recta, algunos resultados de representación y ejemplos

Positive defined functions on the line, some representation results and examples

Ramón Bruzual

Laboratorio de Formas en Grupos, Centro de Análisis, Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela
http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/

ramon.bruzual@ciens.ucv.ve , ramonbruzual@gmail.com

Resumen

Se enuncian los resultados de representación de funciones definidas positivas en la recta real dados por S. Bochner, F. Riez y M. Crum. En forma autocontenida se demuestran resultados sobre funciones definidas positivas en grupos abelianos y ecuaciones funcionales. Estos resultados son utilizados para:

(i) Dar ejemplos no triviales de funciones definidas positivas en la recta real que se anulan en casi todo punto.

(ii) Dar ejemplos de funciones definidas positivas en la recta real con infinitos puntos de discontinuidad.

(iii) Mostrar que existen funciones definidas positivas en la recta real que no son medibles.

Palabras claves: definida positiva, función multiplicativa, función aditiva, caracter, medible.

Abstract

The representation results for positive definite functions on the real line given by S. Bochner, F. Riez and M. Crum are stated. In self-contained way, some results about positive definite functions in abelian groups and functional equations are proved. These results are used to:

(i) Give non trivial examples of positive defined functions on the real line which are null at almost every point.

(ii) Give examples of positive definite functions on the real line with infinite points of discontinuity.

(iii) Show that there exits non measurable positive definite functions on the real line.

Keywords: positive definite, multiplicative function, additive function, character, measurable.

1. Preliminares

Como es usual por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se denotarán los conjuntos de los números naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos respectivamente. Sea $(\Omega, +)$ un grupo abeliano.

Definición 1. *Se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es definida positiva si dado un entero positivo n, una colección de puntos $\omega_1, \ldots, \omega_n$ en Ω y una colección de escalares $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{C}$ se tiene que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\omega_j - \omega_k)\, c_j\, \overline{c_k} \geq 0.$$

Ejemplo 1. *Si 0 denota el elemento neutro de Ω se tiene que la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega = 0, \\ 0 & otro\ caso. \end{cases}$$

es definida positiva, ya que

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\omega_j - \omega_k)\, c_j\, \overline{c_k} = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \geq 0.$$

Definición 2. *Se dice que una función $M : \Omega \to \mathbb{C}$ es multiplicativa si*

$$M(\omega_1 + \omega_2) = M(\omega_1)\, M(\omega_2) \quad para\ todo\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

Se dice que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ es un caracter si φ es multiplicativa y $|\varphi(\omega)| = 1$ para todo $\omega \in \Omega$.

Observación 1. *Notar que si M es una función multiplicativa y $M(\omega_o) \neq 0$ para algún ω_o, entonces $M(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, $M(0) = 1$ y*

$$M(\omega_1 - \omega_2) = \frac{M(\omega_1)}{M(\omega_2)} \quad para\ todo\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

Si φ es un caracter, entonces

$$\varphi(-\omega) = \overline{\varphi(\omega)} = \frac{1}{\varphi(\omega)} \quad para\ todo\ \omega \in \Omega.$$

Proposición 1. *Todo caracter es una función definida positiva.*

Demostración. Sea φ un caracter y sean $n \in \mathbb{N}$, $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(\omega_j - \omega_k)\, c_j\, \overline{c_k} = \sum_{j,k=1}^{n} \varphi(\omega_j)\, c_j\, \overline{\varphi(\omega_k)\, c_k} = \left| \sum_{j=1}^{n} c_j\, \varphi(\omega_j) \right|^2 \geq 0.$$

□

Observación 2. *Notar que la función $\varphi(x) \equiv 1$ es un caracter. Por lo tanto la función constante igual a 1 es definida positiva.*

Como toda combinación lineal, con coeficientes positivos, de funciones definidas positivas es una función definida positiva, combinando caracteres se pueden obtener funciones definidas positivas.

2. Representación de funciones definidas positivas en la recta

De acuerdo con la Definición 1, una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si dado un entero positivo n, una colección de puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $\mathbb{R}$ y una colección de escalares $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\, c_j\, \overline{c_k} \geq 0.$$

En el año1932 Salomon Bochner en su trabajo [2] demostró que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si y solo si f es la transformada de Fourier de una medida de Borel positiva y finita en la recta (ver también [7]).

Posteriormente, en el año 1933 Frigyes Riesz en su trabajo [8] extendió el teorema de Bochner, demostrando que una función medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si y solo si f coincide en casi todo punto con la transformada de Fourier de una medida de Borel positiva y finita en la recta. Es decir, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es definida positiva y medible, entonces

$$f = f^c + f^o,$$

donde f^c es continua y definida positiva y f^o es nula en casi todo punto. Luego en el año 1956 M. M. Crum ([4]) demostró que f^o también es definida positiva.

Una demostración geométrica del resultado de M. M. Crum se puede encontrar en [3]. Al estudiar estos resultados, surgen de manera natural las siguientes preguntas e interrogantes: ¿Existen funciones definidas positivas no medibles? ¿Se pueden dar ejemplos de funciones definidas positivas que se anulan en casi todo punto y que tienen un conjunto infinito de puntos de discontinuidad?

Las respuestas a ambas preguntas son afirmativas, sin embargo una revisión bibliográfica muestra que no es fácil encontrar una respuesta autocontenida de estas interrogantes. Es usual que los ejemplos que se dan siempre refieren a construcciones dadas en diferentes trabajos sobre ecuaciones funcionales.

En lo que sigue se resolverán estas interrogantes de una manera autocontenida y usando técnicas bastante básicas de análisis. Antes de llegar a los ejemplos concretos será necesario obtener una serie de resultados auxiliares que se dan en las Secciones 3, 4 y 5.

3. Un resultado sobre funciones definidas positivas en grupos abelianos

Teorema 1. *Sean $(\Omega, +)$ un grupo abeliano, Ω_o un subgrupo de Ω y $g : \Omega_o \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Entonces si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se define por*

$$f(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & si\ \omega \in \Omega_o, \\ 0 & si\ \omega \notin \Omega_o. \end{cases}$$

se tiene que f es definida positiva.

Para la prueba es necesaria la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sean $(\Omega, +)$ un grupo abeliano, Ω_o un subgrupo de Ω y $g : \Omega_o \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Si $\omega_1, \dots, \omega_n$ es una colección de puntos de Ω tales que $\omega_j - \omega_k \in \Omega_o$ para $j, k = 1, \dots, n$, entonces*

$$\sum_{j,k=1}^{n} g(\omega_j - \omega_k)\, c_j\, \overline{c_k} \geq 0$$

para cualquier colección de escalares $c_1, \dots, c_n$ en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para $j = 1, \dots, n$ sea $\xi_j = \omega_j - x_1$. Entonces $\xi_j \in \Omega_o$ y

$$\xi_j - \xi_k = \omega_j - \omega_k, \quad \text{para } j, k = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto el resultado sigue de que g es definida positiva.

□

Demostración del Teorema 1.
Sean $n \in \mathbb{N}$, $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

Paso 1: Para $j = 1, \dots, n$ sea

$$\Delta_j = \Omega_o + \omega_j = \{\omega + \omega_j \ : \ \omega \in \Omega_j\}.$$

Entonces, si $j, k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset \quad \text{o} \quad \Delta_j = \Delta_k.$$

Supóngase que $\Delta_j \cap \Delta_k \neq \emptyset$. Sea $\omega \in \Delta_j \cap \Delta_k$. Entonces existe ω_o y ω_o' en Ω_o tales que

$$\omega = \omega_o + \omega_j \quad \text{y} \quad \omega = \omega_o' + \omega_k,$$

por lo tanto $\omega_j - \omega_k = \omega_o' - \omega_o \in \Omega_o$, de donde sigue que $\Delta_j = \Delta_k$. Notar que, para $j = 1, \dots, n$, se tiene que $\omega_j \in \Delta_j$.

Paso 2: Sean $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\Delta_{j_1}, \dots \Delta_{j_p}$ son disjuntos y

$$\{\omega_1, \dots \omega_n\} \subset \Delta_{j_1} \cup \cdots \cup \Delta_{j_p}.$$

Para $r = 1, \dots, p$, sean

$$\Lambda_r = \{j \ : \ \omega_j \in \Delta_{j_r}\}.$$

Entonces los conjuntos $\Lambda_1, \dots \Lambda_r$ son disjuntos y

$$\bigcup_{r=1}^{p} \Lambda_r = \{1, \dots, n\},$$

por lo tanto

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\omega_j - \omega_k) c_j \overline{c_k} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} \sum_{\substack{j \in \Lambda_r \\ k \in \Lambda_s}} f(\omega_j - \omega_k) c_j \overline{c_k}.$$

Si $r \neq s$, $j \in \Lambda_r$ y $k \in \Lambda_s$, se tiene que $\omega_j - \omega_k \notin \Omega_o$ y, por lo tanto $f(\omega_j - \omega_k) = 0$, luego

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\omega_j - \omega_k) c_j \overline{c_k} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{j,k \in \Lambda_r} f(\omega_j - \omega_k) c_j \overline{c_k}.$$

Por la Proposición 2 cada uno de los sumandos es no negativo, de donde sigue el resultado deseado. □

4. Funciones aditivas

Definición 3. *Se dice que una función $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es aditiva si*

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \quad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

Proposición 3. *Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función aditiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es continua.

(ii) Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $A(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Idea de la demostración.
(ii)$\Rightarrow$ (i) es inmediato.
(i)$\Rightarrow$ (ii) De la condición de aditividad sigue que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(n) = nf(1)$ y de aquí se deduce que

$$f(q) = q\,f(1) \quad \text{para todo } q \in \mathbb{Q}.$$

Como A se supone continua, el resultado se obtiene utilizando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. □

La demostración que se va a dar del siguiente teorema fue dada por Stephen Banach en su artículo [1]. Esta demostración también se puede encontrar en el libro de Palaniappan Kannappan [6], que es una excelente referencia para el estudio de ecuaciones funcionales.

Teorema 2. *Si $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función aditiva y medible entonces se tiene que A es continua y, por lo tanto, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que tal que $A(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $x_o \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $\sigma = \frac{b-a}{3}$. Por un teorema de Lusin (ver [9]) existe una función continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$m(\{x \in [a,b] \ : \ F(x) \neq A(x)\} < \sigma,$$

donde m denota la medida de Lebesgue. Como F es continua existe $\delta > 0$, que se puede tomar menor que σ, tal que si $|h| < \delta$ entonces $|F(x+h) - F(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.

Sea h_o tal que $|h_o| < \delta$. Como $A(x) = F(x)$ para $x \in [a,b]$, salvo en un conjunto de medida menor que σ, se tiene que $A(x+h_o) = F(x+h_o)$ para $x \in [a,b]$, salvo en un conjunto de medida menor que $\sigma + |h_o| < \sigma + \delta$.

Por lo tanto la medida del conjunto

$$\{x \in [a,b] \ : \ A(x) \neq F(x) \text{ ó } A(x+h_o) \neq F(x+h_o)\}$$

es menor que $2\sigma + \delta < b - a$.

De lo anterior se concluye que existe $x \in [a,b]$ (que depende de h_o) tal que $A(x) = F(x)$ y $A(x+h_o) = F(x+h_o)$, luego

$$|A(x_o+h_o) - A(x_o)| = |A(h_o)| = |A(x+h_o) - A(x)| = |F(x+h_o) - F(x)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto A es continua y de la Proposición 3 sigue el resto del resultado.

□

Teorema 3. *Existen funciones aditivas no medibles.*

Demostración. Se tiene que el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y por lo tanto tiene una base de Hamel, es decir existe un conjunto $\{r_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{R}$ (Λ un conjunto de índices), tal que todo número real r se puede expresar de manera única de la siguiente manera

$$r = \sum_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda \, r_\lambda,$$

donde $q_\lambda \in \mathbb{Q}$ y $q_\lambda = 0$, salvo para una cantidad finita de índices λ.

Sea λ_o un elemento de Λ, se define

$$A(q_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \lambda_o, \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y se extiende por linealidad a todo $\mathbb{R}$.

Así se obtiene una función $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que es aditiva y que no es de la forma que aparece en la Proposición 3. Por el Teorema 2 esta función no es medible.

□

5. Funciones multiplicativas

Tal como se dijo en la Sección 1 una función $M : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es multiplicativa si

$$M(x + y) = M(x)\, M(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

y una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es un caracter si φ es multiplicativa y además

$$|\varphi(x)| = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4 (Hille and Phillips, [5])**.** *Un caracter $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es medible si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(x) = e^{i\lambda x} \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Si $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces es claro que φ es un caracter medible. Supóngase que φ es un caracter medible. Como φ es acotada se tiene que φ es integrable en todo intervalo acotado.

Para $x \in \mathbb{R}$ y $a, \delta > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^a \left(\varphi(x+\delta-y) - \varphi(x-y)\right)\, \varphi(y)\, dx &= \int_0^a \left(\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\varphi(y)}\right) \varphi(y)\, dx \\ &= \int_0^a \left(\varphi(x+\delta) - \varphi(x)\right)\, dx \\ &= a\left(\varphi(x+\delta) - \varphi(x)\right).\end{aligned}$$

Luego

$$|\varphi(x+\delta)-\varphi(x)| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |\varphi(x+\delta-y)-\varphi(x-y)|\,dx.$$

Como φ es acotada y medible se tiene que φ es integrable. Por un conocido resultado de medida el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0 si $\delta \to 0$, por lo tanto φ es continua.

También se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varphi(\delta)-1}{\delta}\right)\int_0^a \varphi(x)\,dx =& \frac{1}{\delta}\int_0^a (\varphi(x+\delta)-\varphi(x))\,dx\\ =& \frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta}\varphi(x)\,dx - \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

Como φ no se anula nunca, debe existir $a > 0$ tal que $\int_0^a (\varphi(x)\,dx \neq 0$. Como los límites cuando $\delta \to 0$ del lado derecho de la última igualdad existen, se tiene que φ es diferenciable en 0.

Sea $\beta = \varphi'(0)$. De la propiedad multiplicativa se deduce que φ es diferenciable en todo punto de la recta y

$$\varphi'(x) = \beta\varphi(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto $\varphi(x) = \varphi(0)e^{\beta x}$.

De que $\varphi(0) = 1$ y $|\varphi| = 1$ se deduce que $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Teorema 5. *Existen caracteres no medibles.*

Demostración. Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función aditiva no medible y sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(x) = e^{i\,A(x)}.$$

Entonces φ es un caracter y no puede ser medible, ya que no es de la forma dada en el Teorema 4.

□

6. Ejemplos

6.1. Una función definida positiva que es medible, que tiene infinitas discontinuidades y se anula en casi todo punto

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un grupo aditivo, por lo tanto la función $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{Q}$$

es definida positiva.

Como el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un subgrupo aditivo del conjunto de los números reales, por el Teorema 1, se tiene que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es definida positiva.

Es importante destacar que esta función también es un ejemplo de función definida positiva que se anula en casi todo punto.

Observación 3. *Procediendo de la misma manera se puede demostrar que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\lambda x} & si\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es definida positiva.

Sumando este tipo de funciones con cualquier otra función definida positiva se obtienen una variedad de ejemplos de funciones definidas positivas medibles con infinitas discontinuidades.

6.2. Una función definida positiva que no es medible

Por la Proposición 1 un caracter $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es definido positivo y por el Teorema 5 existen caracteres $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que no son medibles.

Así que un caracter no medible es un ejemplo de función definida positiva no medible.

Observación 4. *Sumando este tipo de funciones con cualquier otra función definida positiva medible se obtienen una variedad de ejemplos de funciones definidas positivas que no son medibles.*

Referencias

[1] Banach, Stefan. Sur l?equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Fundam. Math., 1,(1920), 122-124.

[2] Bochner, Salomon. Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. (German) Math. Ann. 108 (1933), no. 1, 378?410.

[3] Bruzual, Ramón; Domínguez, Marisela. A geometrical proof of a theorem of Crum. (English summary) Factorization, singular operators and related problems (Funchal, 2002), 65?72, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[4] Crum, M. M. On positive-definite functions. Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956), 548?560.

[5] Hille, Einar; Phillips, Ralph S. Functional analysis and semi-groups. Third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.

[6] Kannappan, Palaniappan. Functional equations and inequalities with applications. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009.

[7] Katznelson, Yitzhak. An introduction to harmonic analysis. Third edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[8] Riesz, Frigyes Über Sätze von Stone und Bochner, Acta Univ. Szeged, 6 (1933) 184-98.

[9] Royden, Halsey L. and Fitzpatrick, Patrick M. Real Analysis, Prentice Hall, 2010

Para citar este artículo: Ramón Bruzual, 2016, Funciones definidas positivas en la recta, algunos resultados de representación y ejemplos . Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA