

Sobre funciones C^2 -convexas y dinámica discreta

On C^2 -convex functions and discrete dynamic

N. Romero

Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Departamento de Matemática. Decanato de Ciencias y Tecnología. Apartado Postal 400. Barquisimeto, Venezuela.

nromero@ucla.edu.ve

Resumen

En este artículo reportamos varios conocidos resultados sobre la dinámica dada por la interacción de endomorfismos de \mathbb{R}^n en los que al menos una de sus funciones coordenadas tiene cierto tipo de convexidad (C^2 -convexidad). Expondremos las propiedades básicas (analíticas y geométricas) de esta clase de funciones convexas que tienen importante influencia en los fenómenos dinámicos que son discutidos; también presentaremos algunos problemas que consideramos interesantes abordar.

Palabras claves: Funciones C^2 -convexas, Dinámica discreta, Endomorfismo de \mathbb{R}^n

Abstract

In this paper we review several known results on the dynamics given by the iteration of endomorphisms on \mathbb{R}^n in which at least one of the coordinate functions has certain type of convexity (C^2 -convexity). We will expose the basic properties (analytical and geometric) of this kind of functions which have important influence in the discussed dynamics phenomena. We will also present some problems that we consider interesting to approach.

Keywords:

C^2 -convex functions, Discrete dynamic, endomorphism's of \mathbb{R}^n .

1. Funciones C^2 -convexas

La convexidad tiene un destacado papel en importantes problemas de diversas áreas de la matemática y otras ciencias. En esta sección presentaremos una clase especial de funciones convexas, incluyendo algunas de sus propiedades analíticas y geométricas que consideramos útiles para abordar el estudio de sistemas dinámicos discretos provenientes de la iteración de endomorfismos de \mathbb{R}^n para los cuales al menos una de

sus funciones componentes pertenece a esa clase especial. Gran parte de ello puede encontrarse, por ejemplo, en [27], [28] y [30].

Recordemos que un subconjunto K de \mathbb{R}^n se dice *convexo* si para todo $x, y \in K$ y cada $\lambda \in [0, 1]$ se tiene $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. Una función $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, K convexo, es dicha *convexa* siempre que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{1}$$

para todo $x, y \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$. La convexidad de f es denominada estricta si la desigualdad en (1) es estricta para todos los valores de λ diferentes de 0 y 1. Es bien conocido, ver Theorem 2.33 en [12] o Corollary 3.9.5 en [25], que si K es además abierto y f de clase C^2 , entonces la convexidad de f equivale a $\langle H_f(x)v, v \rangle \geq 0$ para todo $x \in K$ y cada $v \in \mathbb{R}^n$, donde $H_f(x)$ es la matriz Hessiana de f en x y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar euclidiano de \mathbb{R}^n ; así que la convexidad de cualquier función de clase C^2 en un abierto convexo equivale a que su matriz Hessiana sea no negativa en cada punto $x \in K$.

Definición 1. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice C^2 -convexa si es de clase C^2 y existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\langle H_f(x)v, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2, \tag{2}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma asociada al producto euclidiano.

Obviamente toda función C^2 -convexa f es convexa, su matriz Hessiana $H_f(x)$ es uniformemente positiva definida: para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cualquier valor propio λ de $H_f(x)$ se tiene $\lambda \geq \alpha$, siendo que α es una constante positiva como en (2).

Ejemplo 1. En \mathbb{R} las funciones C^2 -convexas son aquellas funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 para las cuales $f''(x) \geq \alpha$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$ y donde α es una constante positiva independiente de $x \in \mathbb{R}$. Note que $f(t) \geq \frac{\alpha}{2}t^2 + f'(0)t + f(0)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, luego existe $r > 0$ tal que $f(t) > f(0)$ para todo $|t| \geq r$. Esto implica que el valor mínimo de f en $[-r, r]$ se alcanza en un punto $c \in (-r, r)$. Es claro que $f'(c) = 0$; además, como $f'' \geq \alpha$, sigue que f es estrictamente creciente (resp. decreciente) en $[c, +\infty)$ (resp. $(-\infty, c]$). Consecuencia de esto se tiene que para todo $\beta > f(c)$, existen únicos valores $t_\beta^- < c < t_\beta^+$ tales que $f(t_\beta^\pm) = \beta$. La gráfica de f es, por tanto, como una parábola con un valor mínimo absoluto. Observe que si $\text{mín } f$ es suficientemente negativo, entonces f tiene exactamente dos puntos fijos, los cuales se ubican a diferentes lados de c .

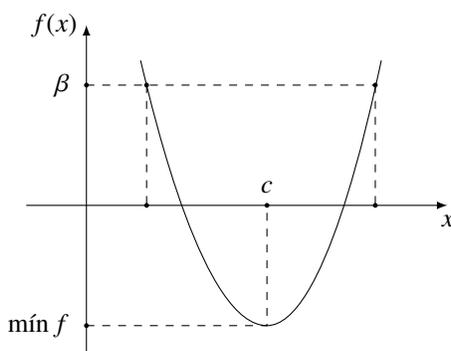


Figura 1. Gráfica de una función C^2 -convexa en \mathbb{R}

Ejemplo 2. En \mathbb{R}^2 , una función cuadrática

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + \alpha x + \beta y + \delta,$$

es C^2 -convexa si, y solo si, $4ab - c^2 > 0$. En este caso su gráfico

$$\text{graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un paraboloides elíptico con valor mínimo y toda sección transversal a $\text{graph}(f)$ por planos horizontales $z = d$ ($d > \min f$) es descrita por la elipse de ecuación $ax^2 + by^2 + cxy + \alpha x + \beta y + \delta = d$

Observación 1. La noción gemela a la convexidad de funciones es la concavidad, la cual se refiere al caso en que la función f , como en (1), satisfaga

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para todo x, y en un conjunto convexo K y todo $\lambda \in [0, 1]$. Por su parte, la noción dual a la C^2 -convexidad es la C^2 -concavidad, que es cuando la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 cumpla con $\langle H_f(x)v, v \rangle \leq \alpha \|v\|^2$, donde α es una constante negativa. Para los efectos de los asuntos dinámicos que trataremos, no tiene importancia considerar funciones C^2 -convexas o C^2 -concavas; por ello consideraremos solo funciones de la primera clase; es decir, C^2 -convexas.

1.1. Propiedades de funciones C^2 -convexas

En este apartado recordaremos algunas propiedades bien conocidas de las funciones C^2 -convexas, en especial aquellas que tienen incidencia importante en la descripción de algunos asuntos de la dinámica de endomorfismos de \mathbb{R}^n . Para cualquier función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 denotaremos por $\nabla f(x)$, $\partial_i f(x)$ y $\partial_{ij} f(x)$ al gradiente de f en x y sus derivadas parciales de primero y segundo orden en x : $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, respectivamente.

Proposición 1. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 -convexa, entonces se cumplen cada una de las siguientes propiedades:

(a) Si α es la constante dada por la definición de C^2 -convexidad, entonces para todo $0 < \alpha' < \alpha/2$ existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \geq \alpha' \|x\|^2 \text{ para todo } \|x\| \geq r. \tag{3}$$

(b) La función f tiene un único punto crítico; además, en ese punto la función f alcanza su valor mínimo.

(c) Si $\beta > \min f$ y $n \geq 2$, entonces $f^{-1}(\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \beta\}$ (conjunto de nivel β) es una hipersuperficie compacta difeomorfa a la esfera unitaria en \mathbb{R}^n .

Demostración. (a) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$ sea $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi_x(t) = f(tx)$. Note que φ_x es de clase C^2 , un simple cálculo muestra que $\varphi_x''(t) = \langle H_f(tx)x, x \rangle$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Por tanto al integrar dos veces consecutivas entre 0 y t se obtiene

$$\varphi_x(t) \geq \frac{\alpha}{2} t^2 + \langle \nabla f(0), x \rangle t + f(0), \text{ cualquiera sea } t \in \mathbb{R}.$$

Dado que $\langle \nabla f(0), x \rangle$ está acotada cuando x varía en la esfera unitaria de \mathbb{R}^n , si α' es cualquier número positivo menor que $\alpha/2$ se tiene que

$$(\alpha/2 - \alpha')t^2 + \langle \nabla f(0), x \rangle t + f(0) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } |t| \rightarrow +\infty.$$

Por tanto podemos escoger $r > 0$ tal que $\varphi_x(t) \geq \alpha' t^2$ siempre que $|t| \geq r$. Al tomar cualquier x con $\|x\| \geq r$, haciendo $y = x/\|x\|$ sigue que $\varphi_y(\|x\|) = f(x) \geq \alpha' \|x\|^2$.

(b) Sea $r > 0$ tal que $f(x) \geq \frac{\alpha}{3} \|x\|^2$ si $\|x\| \geq r$. Consideremos la bola cerrada (por tanto compacta) $\overline{B}_r(0)$ de radio r y centrada en el origen. Es bien conocido que existe $x_0 \in \overline{B}_r(0)$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \overline{B}_r(0)$. Veamos que $\nabla f(x_0) = 0$; es decir, x_0 es punto crítico de f . Sea $\delta > 0$ de forma que la bola abierta $B_\delta(x_0)$ de centro en x_0 y radio δ está contenida en $\overline{B}_r(0)$. Para cada $x \in B_\delta(x_0)$ definimos la función $\psi_x : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi_x(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$, cualquiera sea $t \in (-1, 1)$. Como $x_0 + t(x - x_0) \in B_\delta(x_0)$ para todo $t \in (-1, 1)$ y $\psi_x(0) = f(x_0)$, sigue inmediatamente que $\psi_x(0) \leq \psi_x(t)$ para todo $t \in (-1, 1)$; es decir, ψ_x tiene un valor mínimo en $t = 0$, por tanto $\psi'_x(0) = 0$. Siendo así,

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = 0 \text{ para todo } x \in B_\delta(x_0),$$

de donde $\nabla f(x_0) = 0$. Veamos que $f(y) > f(x_0)$ para todo $y \neq x_0$. Tomemos cualquier $y \neq x_0$ y consideremos $x = x_0 + \frac{1}{\|y-x_0\|}(y - x_0)$. En vista que

$$\psi_x(t) \geq \frac{\alpha}{2} t^2 + f(x_0) \text{ y } \psi_x(\|y - x_0\|) = f(y),$$

la conclusión sigue claramente: $f(y) > f(x_0)$ para todo $y \neq x_0$.

(c) Dado que f es propia y cada $\beta > \text{mín } f$ es un valor regular de f , sigue que $f^{-1}(\beta)$ es una hipersuperficie compacta de \mathbb{R}^n . Sean x_0 el punto crítico de f y $S = \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta - x_0\| = 1\}$ la esfera unitaria en \mathbb{R}^n centrada en x_0 .

Para cada $\theta \in S$ y $t \in \mathbb{R}$ definimos $h_\theta(t) = f(x_0 + t(\theta - x_0))$. Como antes, h_θ es C^2 -convexa con $h_\theta(0) = \text{mín } f$, $h'_\theta(0) = 0$ y $h''_\theta(t) \geq \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$; así que $h_\theta(t) \geq \text{mín } f + \frac{\alpha}{2} t^2$ para cada $t \in \mathbb{R}$. De acá que exista un único $t(\theta) > 0$ tal que $h_\theta(t(\theta)) = \beta$, o equivalentemente $x_0 + t(\theta)(\theta - x_0) \in f^{-1}(\beta)$. Haciendo uso del Teorema de la función implícita en la función $H : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $H(\theta, t) = h_\theta(t)$, sigue que $\theta \mapsto t(\theta)$ es de clase C^2 ; por tanto la función $\varphi : S \rightarrow f^{-1}(\beta)$, con $\varphi(\theta) = x_0 + t(\theta)(\theta - x_0)$ para cada $\theta \in S$, es también C^2 . Ahora tomemos cualquier $y \in f^{-1}(\beta)$ y hagamos $T(y) = \frac{1}{\|y-x_0\|}$. Note que $y \mapsto T(y)$ es continuamente diferenciable siempre que $y \neq x_0$; además, $\theta = x_0 + T(y)(y - x_0) \in S$, $t(\theta) = \frac{1}{T(y)}$ y $\varphi(\theta) = y$. Sigue en consecuencia que φ es un difeomorfismo de clase C^2 . \square

Consecuencias inmediatas de esta proposición son las siguientes:

- a) Cualquier función C^2 -convexa es *propia*; es decir, preimágenes de conjuntos compactos son conjuntos compactos.
- b) Para cada $\beta > \text{mín } f$, la hipersuperficie $f^{-1}(\beta)$ separa \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) en dos componentes: la componente acotada es el conjunto convexo $i(f^{-1}(\beta)) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \beta\}$ que contiene al punto crítico de f ; la componente no acotada del complemento de $f^{-1}(\beta)$ la denotaremos por $e(f^{-1}(\beta))$. Adicionalmente, $f^{-1}(\beta)$ tiene exactamente dos puntos de tangencia con hiperplanos $x_i = \text{constante}$, cualquiera sea $i = 1, \dots, n$.
- c) Cualesquiera sean $\beta, \lambda > \text{mín } f$, la hipersuperficie $f^{-1}(\lambda)$ está contenida propiamente en $i(f^{-1}(\beta))$ si, y solo si, $\beta > \lambda$.
- d) La familia de hipersuperficies $\{f^{-1}(\beta)\}_{\beta > \text{mín } f}$ es una foliación de $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

Observe que los lugares donde ocurren las tangencias de las hipersuperficies $f^{-1}(\beta)$, $\beta > \text{mín } f$, con los hiperplanos $x_i = \text{constante}$ ($i = 1, \dots, n$) es dado por el conjunto

$$\ell_i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_j f(x) = 0 \text{ para cada } j \neq i\},$$

los cuales llamaremos *líneas críticas de f* .

Proposición 2. Para cada $i = 1, \dots, n$, el conjunto $\ell_i(f)$ es una curva de clase C^1 ; de hecho, existe $\tilde{x}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ de clase C^1 tal que $(x_1, \dots, x_n) \in \ell_i(f)$ si, y solo si, $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \tilde{x}_i(x_i)$. Es decir, $\ell_i(f)$ es el gráfico de una función de clase C^1 definida en el i -ésimo eje coordenado.

Demostración. Consideraremos solo el caso cuando $i = n$. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definida por $g(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_{n-1} f(x))$ para cada $x = (x_1, \dots, x_n)$. Es simple verificar que si $x = (\tilde{x}, x_n)$, con $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, entonces la derivada parcial $\partial_{\tilde{x}} g(x)$ en la variable \tilde{x} es la matriz $H_f^{nn}(x)$ obtenida de $H_f(x)$ al retirar su fila y columna n . Aunque puede mostrarse directamente que $H_f^{nn}(x)$ es invertible, emplearemos para ello un clásico resultado del Álgebra lineal, ver [5], el cual establece que si A es una matriz simétrica, B es una submatriz principal de A , $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los valores propios de A y $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ son los valores propios de B , entonces $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$ para cada $i = 1, \dots, m$ (m es el orden de B); este resultado es conocido como *Teorema de interlazado de Cauchy para autovalores*, ver por ejemplo [13] y [16]. Así, los valores propios de $H_f^{nn}(x)$ son todos mayores o iguales a la constante α en (2), por tanto esta matriz es invertible. En vista que $g(x_0) = 0$, x_0 punto crítico de f , el Teorema de la función implícita garantiza que existen una vecindad V de x_n^0 (última componente de x_0) y una única función $\tilde{x}_n : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ de clase C^1 tales que en $g(V) \times V$ los únicos puntos que anulan a la función g son $(\tilde{x}_n(x_n), x_n)$ con $x_n \in V$. Debe notarse que $(\tilde{x}_n(x_n^0), x_n^0) = x_0$ y además

$$H_f^{nn}(\tilde{x}_n(x_n), x_n) \tilde{x}_n'(x_n) = -\widehat{\nabla} \partial_n f(\tilde{x}_n(x_n), x_n) \quad (4)$$

cualquiera sea $x_n \in V$, siendo que $\widehat{\nabla} \partial_n f = (\partial_{1n} f, \dots, \partial_{(n-1)n} f)$. Finalmente, como $\ell_n(f)$ es el conjunto de puntos donde las hipersuperficies $f^{-1}(\beta)$ son tangentes a hiperplanos $x_n = \text{constante}$, sigue que el dominio de \tilde{x}_n se extiende a todo \mathbb{R} . \square

Cerramos esta sección con una importante propiedad para familias uniparamétricas de funciones C^2 -convexas.

Proposición 3. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 -convexa y $f_\mu = f - \mu$ con $\mu \in \mathbb{R}$, entonces existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\mu > \mu_0$ y cada $i = 1, \dots, n$ están definidas funciones $\mu \rightarrow s_i(\mu)$ y $\mu \rightarrow \tilde{s}_i(\mu)$ de forma que:

(a) La hipersuperficie $f_\mu^{-1}(s_i(\mu))$ es tangente a $x_i = s_i(\mu)$ y $x_i = \tilde{s}_i(\mu)$; $s_i(\mu) \rightarrow +\infty$, $\tilde{s}_i(\mu) \rightarrow -\infty$, $\frac{s_i(\mu)}{\mu} \rightarrow 0$ y $\frac{\tilde{s}_i(\mu)}{\mu} \rightarrow 0$ si $\mu \rightarrow +\infty$.

(b) Si $\beta > s_i(\mu)$ y $x_i = h_i^+(\beta)$, $x_i = h_i^-(\beta)$ ($h_i^+(\beta) > h_i^-(\beta)$) definen hiperplanos tangentes a $f_\mu^{-1}(\beta)$, entonces

$$h_i^-(\beta) < \tilde{s}_i(\mu) \text{ y } s_i(\mu) < h_i^+(\beta).$$

Demostración. Como antes, solo trataremos el caso $i = n$. Definamos $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_\mu(t) = f_\mu(\tilde{x}_n(t), t)$, donde \tilde{x}_n es la función obtenida en la proposición anterior, la cual es independiente del parámetro μ . Afirmando que la función φ_μ es C^2 -convexa, de hecho $\varphi_\mu''(t) \geq \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$, con α como en (2). Observe que $\varphi_\mu'(t) = \partial_n f(\tilde{x}_n(t), t)$ y $\varphi_\mu'(t) = 0$ si, y solo si, $t = x_n^0$. Luego

$$\varphi_\mu''(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{in} f(\tilde{x}_n(t), t) u_i'(t) + \partial_{nn} f(\tilde{x}_n(t), t), \quad (5)$$

donde u'_i es la derivada de la componente i -ésima de la función \tilde{x}_n . Haciendo uso de la regla de Cramer y (4) tenemos que

$$u'_i(t) \det(H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)) = -\det(A_i(t)), \tag{6}$$

siendo $A_i(t)$ la matriz obtenida de $H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)$ al reemplazar la columna i por el vector $\widehat{\nabla} \partial_n f(\tilde{x}_n(t), t)$. Por otra parte, es claro que

$$\det(H_f(\tilde{x}_n(t), t)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \partial_{in} f(\tilde{x}_n(t), t) \det(B_i(t)), \tag{7}$$

donde $B_i(t)$ es la matriz obtenida de $H_f(\tilde{x}_n(t), t)$ al retirar su fila n y columna i ; además, $B_n(t) = H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)$ y $B_i(t)$ ($i \neq n$) es igual a $A_i(t)$ excepto que sus columnas i y $n - 1$ están intercambiadas. Consecuentemente de (5), (6) y (7) se tiene

$$\det(H_f(\tilde{x}_n(t), t)) = \det(H_f^{mn}(\tilde{x}_n(t), t)) \varphi''_\mu(t);$$

luego la anterior afirmación sigue de la propiedad de interlazado de los valores propios de matrices simétricas.

Note que para cualquier $\beta > \text{mín } \varphi_\mu$, la preimagen $\varphi_\mu^{-1}(\beta)$ está constituida por dos puntos $h_n^-(\beta) < h_n^+(\beta)$ dispuestos a diferentes lados del punto crítico x_n^0 de φ_μ ; además, $\{x_i = h_n^-(\beta)\}$ y $\{x_i = h_n^+(\beta)\}$ son hiperplanos tangentes a $f_\mu^{-1}(\beta)$. Por la convexidad de φ_μ también podemos escoger μ_0 tal que para todo $\mu > \mu_0$ la función φ_μ tiene dos puntos fijos con diferentes signos y ubicados a diferentes lados de x_n^0 . Denotemos por $s_n(\mu)$ su punto fijo positivo y sea $\tilde{s}_n(\mu) < x_n^0$ tal que $\varphi_\mu(\tilde{s}_n(\mu)) = s_n(\mu)$; de acá que si hacemos $\varphi_\mu = \varphi - \mu$, entonces para todo $\mu > \mu_0$ se tiene

$$\varphi(\tilde{s}_n(\mu)) - s_n(\mu) = \mu = \varphi(s_n(\mu)) - s_n(\mu),$$

lo que junto a la convexidad implican la parte (a) de la proposición. La parte (b) sigue fácilmente de la propia definición de $\varphi_\mu^{-1}(\beta)$ y el hecho que $s_n(\mu)$ es punto fijo de φ_μ . □

Observación 2. *La demostración de la proposición anterior la hemos hecho para $i = n$, con los restantes casos se procede de la misma forma. Note además que si μ es suficientemente grande, entonces para todo $i = 1, \dots, n$ y cualquier $\beta > s_i(\mu)$ no solo se tiene*

$$h_i^-(\beta) < \tilde{s}_i(\mu) < x_i^0 < s_i(\mu) < h_i^+(\beta),$$

sino que además $-\beta < h_i^-(\beta)$ y $h_i^+(\beta) < \beta$.

1.2. \mathbb{C}^2 -convexidad e infinito como atractor

Al estudiar la dinámica discreta proporcionada por la iteración de endomorfismos en espacios no acotados es indispensable analizar el conjunto de puntos con órbita acotada, que es por supuesto el conjunto donde se concentran los comportamientos límites de la dinámica y es, obviamente, el complemento del conjunto de puntos cuyas órbitas crecen ilimitadamente en norma. Como parte del análisis a realizar es conveniente considerar la posibilidad de que existan conjuntos abiertos cuyos puntos tienen órbita no acotada, en estos casos de habla del infinito como un atractor.

Definición 2. *Todo subconjunto W de \mathbb{R}^n que sea complemento de un conjunto compacto es llamado vecindad de ∞ . Un endomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que tiene a ∞ como atractor si existe una vecindad W de ∞ que sea F -invariante ($F(W) \subset W$) y $\|F^k(p)\| \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$, cualquiera sea $p \in W$.*

Si F tiene a ∞ como atractor y W es como arriba, entonces al conjunto

$$B_\infty(F) = \{p \in \mathbb{R}^n : \|F^k(p)\| \rightarrow +\infty \text{ cuando } k \rightarrow +\infty\}$$

se le llama *cuenca de atracción* de ∞ . Note que si F es continuo, entonces $B_\infty(F)$ es un conjunto abierto y $B_\infty(F) = \bigcup_{k \geq 0} F^{-k}(W)$.

Proposición 4. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua con $F = (f_1, \dots, f_n)$. Si para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ la función $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 -convexa, entonces F tiene a ∞ como atractor.

Demostración. Por la parte (a) de la Proposición 1 podemos escoger constantes positivas β y r tales que $|f_i(x)| \geq \beta\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| \geq r$. Sean $\lambda > 1$ y $R = \max\{r, \beta^{-1}\lambda\}$, luego es claro que

$$|f_i(x)| \geq \lambda\|x\|, \text{ si } \|x\| \geq R.$$

Como $\|F(x)\| \geq |f_i(x)|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sigue que $W = \{x : \|x\| > R\}$ es una vecindad de ∞ , F -invariante y además $\|F^k(x)\| \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$, para cada $x \in W$. \square

Consideremos F y f_1, \dots, f_n como en el enunciado de la proposición anterior. Sean $\nu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ en \mathbb{R}^n y $F_\nu = (f_{\mu_1}, \dots, f_{\mu_n})$, donde $f_{\mu_j} = f_j - \mu_j$, cualquiera sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Dado que la i -ésima componente f_i de F es C^2 -convexa, podemos escoger $\mu_i^* \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu_i > \mu_i^*$ están definidas funciones $\mu_i \rightarrow s_i(\mu_i)$ y $\mu_i \rightarrow \tilde{s}_i(\mu_i)$ como en la Proposición 3. Para cada $\nu \in \mathbb{R}^n$ con $\mu_i > \mu_i^*$ definimos

$$C_{\mu_i} = \bigcup_{\beta \in I_i} f_{\mu_i}^{-1}(\beta), \text{ con } I_i = [\tilde{s}_i(\mu_i), s_i(\mu_i)].$$

Obviamente $\mathbb{R}^n \setminus C_{\mu_i}$ es una vecindad de ∞ ; observe que en \mathbb{R}^2 el compacto C_{μ_i} es un anillo cuyos bordes son como elipses. En general, C_{μ_i} es justamente la clausura de $i(f_{\mu_i}^{-1}(s_i(\mu_i))) \cap e(f_{\mu_i}^{-1}(\tilde{s}_i(\mu_i)))$. De la Proposición 3 sigue que si $x \in f_{\mu_i}^{-1}(\delta)$ para algún $\delta \notin I_i$, entonces $F_\nu(x) \in f_{\mu_i}^{-1}(\beta)$ para un único $\beta > |\delta|$; por tanto $\mathbb{R}^n \setminus C_{\mu_i}$ es F_ν -invariante, o equivalentemente $F_\nu^{-1}(C_{\mu_i}) \subset C_{\mu_i}$. Observe que $\|F_\nu^k(x)\| \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$, de lo contrario podemos escoger una sucesión $k_j \nearrow +\infty$ de forma que los puntos $F_\nu^{k_j}(x)$, $j \geq 1$, quedan atrapados en un compacto. Sin pérdida de generalidad suponemos que $F_\nu^{k_j}(x) \rightarrow q$ cuando $j \rightarrow +\infty$. Para cada $j \geq 1$ sea β_j tal que $F_\nu^{k_j}(x) \in f_{\mu_i}^{-1}(\beta_j)$; de lo anterior es claro que

$$\beta_{j+1} > \beta_j > |\delta| > \max\{|\tilde{s}_i(\mu_i)|, s_i(\mu_i)\}.$$

Luego la hipersuperficie $f_{\mu_i}^{-1}(\eta)$ que contiene a q es tal que $i(f_{\mu_i}^{-1}(\eta))$ contiene a C_{μ_i} , por lo que $q \notin C_{\mu_i}$ y $f_{\mu_i}(F_\nu(q)) > \eta$. Sin embargo, como $f_{\mu_i}(F_\nu^{k_{j+1}}(x)) \leq f_{\mu_i}(F_\nu^{k_j}(x))$, la continuidad de F implica que $f_{\mu_i}(F_\nu(q)) \leq \eta$. De esta manera hemos demostrado:

Proposición 5. Si F , f_1, \dots, f_n y μ_i^* son como antes, entonces para cada $\nu \in \mathbb{R}^n$ con $\mu_i > \mu_i^*$, el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus C_{\mu_i}$ es una vecindad de ∞ , F_ν -invariante y contenida en $B_\infty(F_\nu)$.

Como consecuencia de esta proposición, el conjunto de puntos con órbita positiva acotada es dado por $\bigcap_{k \geq 0} F_\nu^{-k}(C_{\mu_i})$. Note también que si además de f_i el endomorfismo F tiene otras componentes C^2 -convexas, entonces la vecindad de ∞ puede expresarse más finamente; por ejemplo, si todas las funciones componentes de F son C^2 -convexas, entonces para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ podemos considerar C_{μ_j} (como se hizo con la componente i), definir $C_\nu = \bigcap_{j=1}^n C_{\mu_j}$ y obtener como cuenca de atracción de ∞ al conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k \geq 0} F_\nu^{-k}(C_\nu)$.

La demostración que hemos presentado para la Proposición 5 contiene, en esencia, el siguiente criterio mediante el cual se asegura que una vecindad de ∞ está contenida en su cuenca de atracción. Una función como en el enunciado de la siguiente proposición es conocida como *función de Lyapunov*.

Proposición 6. Sean $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $W \subset \mathbb{R}^n$ una vecindad de ∞ que es F -invariante. Si existe una función continua L de la clausura \overline{W} de W en \mathbb{R} tal que la diferencia orbital $\Delta L = L \circ F - L$ es positiva para cada $p \in \overline{W}$, entonces ∞ es un atractor de F y $W \subset B_\infty(F)$.

2. Endomorfismos C^2 -convexos: una visión general

Un endomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$, se dice C^2 -convexo si cada una de las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) es C^2 -convexa. Con el objeto de relatar algunas de las propiedades dinámicas de endomorfismos C^2 -convexos expuestas en [27] introducimos las siguientes notaciones. Sea \mathcal{H}_0 la colección de todos los C^1 endomorfismos F de \mathbb{R}^n que satisfacen:

- (a) F tiene a ∞ como un atractor.
- (b) El conjunto no errante $\Omega(F)$ de F es vacío, o bien es un conjunto de Cantor que coincide con el complemento de $B_\infty(F)$, y la restricción de F a $\Omega(F)$ es expansora: existen constantes $K > 0$ y $\lambda > 1$ tales que, para todo $p \in \Omega(F)$, $n \geq 1$ y cada $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se tiene $\|D_p F^n(v)\| \geq K\lambda^n \|v\|$.

Debido a Mañé y Pugh [23] y Przytycki [26] todos los endomorfismos en \mathcal{H}_0 son Axioma A y estructuralmente estables.

Para cada $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo C^2 -convexo y $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se denota por $F_\mu = F - \mu v$ la familia parametrizada por $\mu \in \mathbb{R}$ y por \mathcal{G}_v el conjunto de todos los endomorfismos F de clase C^2 para los cuales existe $\mu^* > 0$ tal que para todo $|\mu| > \mu^*$, el endomorfismo $F_\mu \in \mathcal{H}_0$. En [27] es demostrado que la intersección del conjunto \mathcal{G}_v con el espacio de endomorfismos C^2 -convexos es abierto en la topología C^2 -Whitney; allí se construye un endomorfismo $F \in \mathcal{G}_v$, no C^2 -convexo, que no es punto interior de \mathcal{G}_v en la topología C^2 -Whitney. También se introduce la siguiente noción de transversalidad.

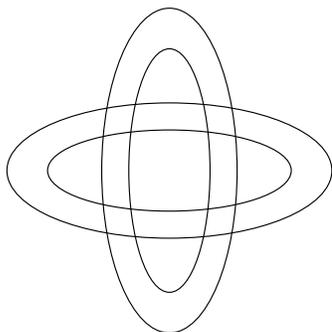
Definición 3. Dadas hipersuperficies regulares S_1, \dots, S_n en \mathbb{R}^n y $0 < \epsilon < 1$, se dice que S_1, \dots, S_n son ϵ -transversales si en cada punto de $\bigcap_{i=1}^n S_i$ el conjunto de vectores normales v_1, \dots, v_n a S_1, \dots, S_n , respectivamente, son tales que para todo $i = 1, \dots, n$ vale $\|P_{V_i}^\perp(v_i)\| \geq \epsilon \|v_i\|$, donde V_i es el subespacio vectorial generado por $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ y $P_{V_i}^\perp$ es la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n sobre el complemento ortogonal a V_i .

Esta noción de transversalidad ofrece condiciones suficientes sobre la geometría de las superficies de nivel de las funciones componentes de los endomorfismos C^2 -convexos para que estos pertenezcan a \mathcal{H}_0 ; más precisamente se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 1 (Proposition 1, [27]). Sea $F_\mu = (f_1 - \mu v_1, \dots, f_n - \mu v_n)$ un endomorfismo C^2 -convexo, con $v_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Si dado $0 < \epsilon < 1$, existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu > \mu_0$ las hipersuperficies $f_i^{-1}(\mu v_i + s)$, $i = 1, \dots, n$, son ϵ -transversales para todo $s \in [\overline{s}_i(\mu v_i), s_i(\mu v_i)]$, entonces $F_\mu \in \mathcal{H}_0$ para todo μ suficientemente grande.

juntos C_μ lucirían como en la figura; por lo que las curvas de nivel $f_i^{-1}(\mu + s)$, con $s \in [\overline{s}_i(\mu), s_i(\mu)]$ ($i = 1, 2$) son suficientemente transversales como para usar el resultado anterior y garantizar que $F_\mu \in \mathcal{H}_0$ si μ es suficientemente grande. Un mapa F como el descrito es conocido como *autómata celular real*; ver sección 3.

El siguiente ejemplo, también tomado de [27], muestra un endomorfismo C^2 -convexo (del tipo autómata celular real) tal que las curvas de nivel no tienen suficiente transversalidad para obtener expansión; por tanto, toda pequeña perturbación C^2 induce una familia a un parámetro la cual es no expansora para todo valor suficientemente del parámetro. Esto es una notable diferencia, como comentaremos más adelante, en el caso que las funciones componentes sean cuadráticas.



Es interesante intentar mostrar que si $F = (f_1, f_2)$ es un endomorfismo C^2 -convexo de \mathbb{R}^2 tal que sus funciones componentes satisfacen (para $i \neq j$) la condición $\inf_x \partial_{ii} f_i(x)$ es suficientemente mayor que $\sup_x \partial_{jj} f_j(x)$ y $\sup_x |\partial_{ij} f_i(x)|$, entonces la familia a un parámetro

$$F_\mu = (f_1 - \mu v_1, f_2 - \mu v_2)$$

cumple con las condiciones del enunciado anterior. Esto es ciertamente factible cuando f_2 es definida como $f_2(x, y) = f_1(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (1, 1)$, ello es debido a que los respectivos con-

Ejemplo 3. Sea $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la única función de clase C^2 tal que:

$$1) b(0) = b'(0) = 0, \text{ y } 2) b''(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x| + \frac{1}{2}, & \text{si } |x| \in [1, \frac{3}{2}] \\ 2 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases} ;$$

de hecho puede verificarse que la función b es dada por:

$$b(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2, & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6}|x|^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{6}, & \text{si } |x| \in [1, \frac{3}{2}] \\ x^2 - \frac{5}{8}|x| + \frac{19}{48}, & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases} .$$

Consideremos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, siendo que $f(x, y) = x^2 + b(y)$ y $g(x, y) = f(y, x)$. Dado que $b''(\mathbb{R}) = [\frac{3}{2}, 2]$, sigue inmediatamente que f y g son funciones C^2 -convexas. El único punto crítico de f (resp. g) es el origen, su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$. Note además que las tangencias verticales (resp. horizontales) de $f^{-1}(\beta)$ (resp. $g^{-1}(\beta)$), con $\beta > 0$, ocurren sobre el eje x (resp. eje y); por tanto las funciones $\mu \rightarrow \bar{s}_1(\mu)$ y $\mu \rightarrow s_1(\mu)$ (resp. $\mu \rightarrow \bar{s}_2(\mu)$ y $\mu \rightarrow s_2(\mu)$) son dadas por

$$s_1(\mu) = s_2(\mu) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\mu}) \text{ y } \bar{s}_1(\mu) = \bar{s}_2(\mu) = -s_1(\mu),$$

las cuales están definidas para todo $\mu > -\frac{1}{4}$. También es claro que para todo $\beta > \mu > -\frac{1}{4}$ se tiene

$$\begin{cases} f_\mu^{-1}(\beta) = f^{-1}(\mu + \beta) = \{(x, y) : x^2 + b(y) = \mu + \beta\} \\ g_\mu^{-1}(\beta) = g^{-1}(\mu + \beta) = \{(x, y) : y^2 + b(x) = \mu + \beta\} \end{cases} .$$

Las tangencias verticales de $f_\mu^{-1}(\beta)$ ocurren en $x = \pm \sqrt{\mu + \beta}$, por lo que $\frac{|x|}{\sqrt{\mu}} \sim 1$ para valores grandes de μ . Por otra parte, las tangencias horizontales de $f_\mu^{-1}(\beta)$ ocurren en los valores de y para los cuales $b(y) = \mu + \beta$. Sin dificultad se muestra que para esos valores de y se tiene: $|y| > \sqrt{\mu + \beta}$ y $\frac{|y|}{\sqrt{\mu}} \sim 1$ para valores grandes de μ . Esto significa que las curvas de nivel (similares a elipses) $f_\mu^{-1}(\beta)$ (resp. $g_\mu^{-1}(\beta)$) son más alargadas en la vertical (resp. horizontal) que en la horizontal (resp. vertical), pero valores grandes de μ esas curvas de nivel se asemejan a circunferencias. Sean:

$$C_\mu(f) = \bigcup_{\beta \in I_\mu} f_\mu^{-1}(\beta) \text{ y } C_\mu(g) = \bigcup_{\beta \in I_\mu} g_\mu^{-1}(\beta), \text{ donde } I_\mu = [\bar{s}_1(\mu), s_1(\mu)].$$

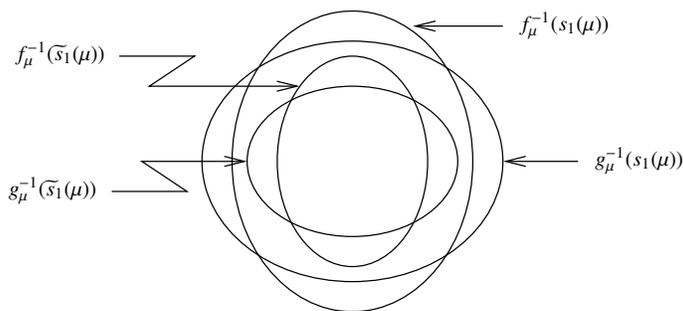


Figura 2. Disposición geométrica de los sectores $C_\mu(f)$ y $C_\mu(g)$ cuando las funciones f y g son como en el Ejemplo 3

Una situación interesante que debe destacarse es la siguiente. Las tangencias verticales de $f_\mu(\bar{s}_1(\mu))$ son, en valor absoluto, menores que las tangencias verticales de $g_\mu(s_1(\mu))$, aunque asintóticamente con μ son del mismo orden; ello hace que las regiones $C_\mu(f)$ y $C_\mu(g)$ luzcan como en la Figura 2. A diferencia del diseño anterior, en este caso el conjunto $C_\mu(f) \cap C_\mu(g)$ es conexo. Dado que para todo $\mu \geq 0$ la gráfica de f_μ interseca la diagonal de \mathbb{R}^3 en dos puntos, el mapa F_μ tiene un punto fijo $P_\mu = (x_\mu, x_\mu)$ con $x_\mu > 0$ y $x_\mu \rightarrow +\infty$ cuando $\mu \rightarrow +\infty$. Es claro que $P_\mu \in f_\mu^{-1}(x_\mu) \cap g_\mu^{-1}(x_\mu)$; también es simple chequear que los valores propios de $D_{P_\mu}F_\mu$ son $\lambda_1 = 2x_\mu + b'(x_\mu)$ y $\lambda_2 = 2x_\mu - b'(x_\mu)$, por lo que debido al rango de b'' se concluye que P_μ es un punto fijo hiperbólico del tipo silla. Además, las curvas $f_\mu^{-1}(x_\mu)$ y $g_\mu^{-1}(x_\mu)$ son ϵ -transversales si, y solo si, $\epsilon < \frac{4x_\mu^2 - (b'(x_\mu))^2}{4x_\mu^2 + (b'(x_\mu))^2}$. Nuevamente, por la forma que tiene la función b sigue que $\frac{4x_\mu^2 - (b'(x_\mu))^2}{4x_\mu^2 + (b'(x_\mu))^2} \leq \lambda < 1$ para un cierto valor de λ , lo cual indica que esas curvas son transversales en P_μ , pero con una cota superior en el grado de transversalidad.

Cuando se consideran endomorfismos $F = (f_1, \dots, f_n)$ de \mathbb{R}^n en el que las funciones componentes son del tipo cuadrático:

$$f_i(x) = \langle A_i x, x \rangle + \langle v_i, x \rangle + a_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

donde cada A_i es una matriz simétrica definida positiva, el fenómeno de transversalidad se torna bastante más amplio. En el espacio de endomorfismos del tipo cuadrático es más apropiado emplear la topología débil (compacta-abierta) dado que la topología fuerte es discreta en este espacio; de hecho la topología débil coincide con la topología de los coeficientes de las matrices simétricas. Con esta topología se demuestra en [27] el siguiente resultado de genericidad.

Teorema 2. Para cada $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, el conjunto \mathcal{G}_v es abierto y denso en el espacio de endomorfismos del tipo cuadrático de \mathbb{R}^n .

3. Autómatas celulares reales C^2 -convexos

Imitando la caracterización de G. Hedlund [14] para los autómatas celulares clásicos en retículos discretos, en [7] se introduce la noción de *autómata celular real* en \mathbb{R}^n como aquellas transformaciones F de \mathbb{R}^n que conmutan con el *shift circular* $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$; ello equivale a que exista una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que para cada $w \in \mathbb{R}^n$ se cumpla

$$F(w) = (f(w), f(\sigma^{-1}(w)), \dots, f(\sigma^{-n+1}(w)));$$

esta función f es llamada *función bloque* de F . Es bien conocido, ver Theorem 1 en [7], que si la función $\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \sigma^{-i}$ es estrictamente convexa y el autómata celular real F dado por f no tiene puntos fijos, entonces el ω -límite de todo punto es vacío; este es una versión del resultado enunciado en el Teorema 3 más adelante. Obviamente si la función bloque es C^2 -convexa, la condición de convexidad estricta de $\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \sigma^{-i}$ es satisfecha. También es claro que para cada autómata celular real cuyas funciones componentes sean funciones cuadráticas existen una única transformación lineal simétrica $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un único funcional lineal L de \mathbb{R}^n y una única constante $\mu \in \mathbb{R}$ tal que ese autómata celular real se escribe de la forma

$$F_\mu(w) = (f_\mu(w), f_\mu(\sigma^{-1}(w)), \dots, f_\mu(\sigma^{-n+1}(w))) \quad (8)$$

siendo que

$$f_\mu(w) = f(w) - \mu = \langle A(w), w \rangle + L(w) - \mu,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de \mathbb{R}^n . Denotemos por $\mathcal{S}(n)$ el espacio de las transformaciones lineales simétricas de \mathbb{R}^n y por $\mathcal{L}(n)$ el espacio dual de \mathbb{R}^n . En [7] es mostrado que existe un conjunto abierto y denso $\mathcal{S}'(n)$ de $\mathcal{S}(n)$ tal que, para cada $A \in \mathcal{S}'(n)$ y todo $L \in \mathcal{L}(n)$ existen constantes $\mu_1 < \mu_2$ cumpliendo:

- (a) Para cada $\mu < \mu_1$, el autómata celular real F_μ como en (8) tiene dinámica trivial: el conjunto ω -límite de todo punto es vacío.
- (b) Para todo $\mu > \mu_2$, ∞ es un atractor de F_μ y el complemento de su cuenca de atracción es un conjunto hiperbólico expansor.

Con herramientas similares a las utilizadas en [7] podría procurarse un resultado para autómatas celulares reales con función bloque C^2 -convexa, y que en cierta forma extienda la propiedad arriba descrita para los autómatas celulares reales cuadráticos; más precisamente, creemos posible un resultado del tipo:

Existe un abierto no vacío \mathcal{U} en el espacio de las funciones C^2 -convexas con la topología C^2 de Whitney de forma que, para cada $f \in \mathcal{U}$ existe $\mu^ \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu > \mu^*$ el autómata celular real con función bloque $f_\mu = f - \mu$ tiene a la cuenca de atracción de ∞ como un conjunto hiperbólico repulsor.*

Dos clases especiales de autómatas celulares reales han ganado una considerable atención debido a su empleo para modelar discretizaciones de ecuaciones diferenciales, así como para el estudio de ciertas propiedades dinámicas observadas en fenómenos físicos tales como la dinámica de fluidos, y en general para estudiar los denominados sistemas espacialmente distribuidos; ver [3]. Estas dos clases de autómatas celulares reales son las siguientes:

3.1. Acople difusivo del mapa logístico

Se trata de un modelo particular de sistemas dinámicos en retículos con dos nodos, este se expresa mediante el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{cases} x_n = (1 - \epsilon)f_\mu(x_{n-1}) + \epsilon f_\mu(y_{n-1}) \\ y_n = (1 - \epsilon)f_\mu(y_{n-1}) + \epsilon f_\mu(x_{n-1}) \end{cases}, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

donde $\epsilon \in (0, 1)$ y $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, con $\mu > 1$ y $x \in \mathbb{R}$, es el conocido *mapa logístico*. Observe que las soluciones de (9) están en correspondencia biunívoca con las órbitas del endomorfismo biparamétrico del plano:

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = ((1 - \epsilon)f_\mu(x) + \epsilon f_\mu(y), (1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon f_\mu(x)); \quad (10)$$

además, el comportamiento asintótico de las soluciones es (9) es descrito mediante la dinámica de $F_{\mu,\epsilon}$.

El acoplamiento del mapa logístico (9), y por lo tanto del endomorfismo $F_{\mu,\epsilon}$, con $\mu \in (1, 4)$ y $\epsilon \in [0, 1]$, ha sido objeto de estudio en varias investigaciones en las que se describen algunas de sus propiedades dinámicas y ergódicas. Por ejemplo en [9] y [10] se hacen estimaciones para la determinación del conjunto de órbitas acotadas de $F_{\mu,\epsilon}$, también se obtienen regiones del espacio fase en la cual existen atractores; en [19] y [20] se estudian algunas propiedades elementales sobre la sincronización de las órbitas de $F_{\mu,\epsilon}$; en [11] es empleado un contexto que incluye el mapa logístico para algunos de los valores de los parámetros μ y ϵ , allí se estudian propiedades relativas a la existencia de órbitas asintóticamente periódicas. Previamente en [17] se hace un análisis numérico referente a algunas propiedades ergódicas y a la existencia de atractores. En [31] y [35] se ha mostrado la existencia de variedades invariantes mediante las cuales se describe la cuenca de atracción del atractor en el ∞ ; esto permite una descripción de la frontera de tal cuenca. Por otra parte, dado que preimágenes de estas variedades invariantes limitan al conjunto de puntos con órbitas acotadas, ellas son empleadas como una efectiva herramienta para estudiar uno de los fenómenos fundamentales de sistemas físicos espacio-temporales con homogeneidad: la sincronización. Los resultados en [31] y [35] son bastante más amplios que los similares en [9], [10], [19] y [20]; además de ser más precisos en la determinación de la frontera del conjunto de puntos con órbita acotada, el parámetro μ varía en $(1, +\infty)$ y el espacio fase es todo \mathbb{R}^2 ; hipótesis que debido a interpretaciones físicas, estos rangos son considerados en la literatura tradicional sobre el tema en el intervalo $(1, 4)$ y en el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Más recientemente, ver [32], los resultados en [31] y [35] son complementados para valores de parámetro de acople $\epsilon > 1$; allí se mantiene la amplitud del rango para μ y el espacio fase. En ese artículo, son mostrados algunos fenómenos dinámicos no presentes en el marco considerado en [31] y [35].

3.2. Acople logístico con influencia lineal

Esta clase de acoplamiento es definido por el sistema bidimensional de ecuaciones en diferencia:

$$\begin{cases} x_n = (1 - \epsilon)f_\mu(x_{n-1}) + \epsilon y_{n-1} \\ y_n = (1 - \epsilon)f_\mu(y_{n-1}) + \epsilon x_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 1), \quad (11)$$

donde μ , ϵ y f_μ son como arriba. La descripción asintótica de sus soluciones se realiza mediante la familia de endomorfismos de plano $F_{\mu,\epsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = ((1 - \epsilon)f_\mu(x) + \epsilon y, (1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon x). \quad (12)$$

Este acoplamiento también ha sido objeto de diversas investigaciones, aunque no tan amplias y difundidas como el acoplamiento difusivo de la misma familia unidimensional f_μ , quizá ello se deba a la complejidad del conjunto de puntos críticos de (12), su imagen y preimagen; lo cual es un elemento de relevancia para emprender el estudio de su dinámica; aprovechamos para destacar que en [8] se hace una completa descripción geométrica de esas imágenes y preimágenes para endomorfismos cuadráticos del plano cuyo conjunto crítico es una hipérbola con un único punto crítico del tipo cusp, que es justamente el tipo que conjunto crítico que despliega el acople (12). Conviene mencionarse que para esta familia de endomorfismos, y similares con otro tipo de influencia lineal, se han estudiados propiedades relativas a: la estructura de ciertos diagramas de bifurcaciones globales, la aparición y apariencia de cuencas de atracción mediante experimentación numérica, determinación en el espacio de parámetros de regiones donde los denominados exponentes transversales de Lyapunov son negativos y su relación con a estructura fractal de las cuencas de atracción detectadas; citamos por ejemplo [15], [21], [22] y [36], donde se encontrará con mayor precisión algunas de las propiedades estudiadas y mencionadas arriba. Se desconoce la existencia de curvas invariantes como las que aparecen en el acoplamiento difusivo de la familia logística.

4. Endomorfismos con retardo C^2 -convexos

En el estudio de importantes problemas en distintas áreas del conocimiento, véase por ejemplo [1], [2] y [4], es frecuente el uso de modelos matemáticos expresados mediante ecuaciones del tipo

$$x_{k+n} = f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}), \quad k \geq 0 \tag{13}$$

donde f es una función a valores reales definida en algún subconjunto de \mathbb{R}^n ; estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones en diferencia con retardo de orden n* , o simplemente, *ecuaciones en diferencia con retardo n -dimensional*. Note que a partir de n datos iniciales x_0, \dots, x_{n-1} , la ecuación (13) genera la sucesión

$$x_n = f(x_0, \dots, x_{n-1}), \quad x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n), \quad \dots$$

que es la *solución* de esa ecuación con datos iniciales x_0, \dots, x_{n-1} . El problema fundamental de las ecuaciones en diferencia con retardo es describir el comportamiento asintótico de sus soluciones. Paul Montel en [24] consideró el endomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$F(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_0, \dots, x_{n-1})) \tag{14}$$

para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de (13) en las proximidades de una solución *estacionaria*; esto es, una solución $(x_k)_{k \geq 0}$ donde $x_k = \alpha$ para todo $k \geq 0$. Al mapa F se le denomina *endomorfismo con retardo asociado a f* . Es simple verificar que $(x_k)_{k \geq 0}$ es solución de (13) si, y solo si, el conjunto $\{(x_k, \dots, x_{k+n-1}) : k \geq 0\}$ es la F -órbita positiva del punto $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $F^k(x) = (x_k, \dots, x_{k+n-1})$ para todo $k \geq 0$. Así, las soluciones de (13) están en correspondencia biunívoca con las órbitas positivas del endomorfismo con retardo F ; además, la dinámica que describen las órbitas de puntos por F se corresponde con el comportamiento límite de las soluciones de (13). Observe que (x_0, \dots, x_{n-1}) es punto fijo de F si, y solo si,

$$x_0 = \dots = x_{n-1} = x = f(x, \dots, x);$$

esto equivalente a que el gráfico de f corte la diagonal de \mathbb{R}^{n+1} en el punto (x, x, \dots, x) ; note que la sucesión constante x es solución estacionaria de (13). Luego es claro que F tiene tantos puntos fijos como intersecciones tenga el gráfico de f con la diagonal de \mathbb{R}^{n+1} . En particular, si f es C^2 -convexa, el endomorfismo F tiene a lo más dos puntos fijos.

En apariencia el conjunto de los endomorfismos con retardo de clase C^r ($r \geq 1$) en \mathbb{R}^n luce pequeño, no obstante esto no es del todo cierto. En [29] (ver Theorem 3.1) se muestra que al considerar la topología C^r -fuerte de Whitney en el conjunto de todos los endomorfismos de clase C^r en \mathbb{R}^n , la proyección de los endomorfismos con retardo es un conjunto abierto en el espacio cociente de las clases de equivalencias por conjugaciones topológicas.

El objetivo de esta sección es doble; en primer lugar relataremos algunos conocidos resultados para la dinámica de los endomorfismos con retardos en familias uniparamétricas en los que la función asociada al endomorfismo es C^2 -convexa, en particular describiremos las características dinámicas para valores extremos del parámetro, con lo cual se extienden propiedades de la paradigmática familia cuadrática $f_\mu(x) = x^2 - \mu$: para todo valor de μ suficientemente negativo, la cuenca de atracción de ∞ es todo \mathbb{R} , mientras que para valores suficientemente positivos de μ el conjunto de puntos con órbita acotada para f_μ es un conjunto de Cantor restringido al cual la función f_μ es topológicamente conjugada al shift unilateral en dos símbolos; ver [18]. Por otra parte, propondremos algunos problemas que se enmarcan en este contexto de endomorfismos C^2 -convexos con retardo.

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 -convexa y $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo con retardo asociado a f : $F(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$, cualquiera sea $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\mu \in \mathbb{R}$, sean $f_\mu = f - \mu$ y su correspondiente endomorfismo con retardo F_μ . Observe que el gráfico $graph(f_\mu)$ de f_μ es la traslación vertical del gráfico de f , existe por tanto $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu < \mu_1$, $graph(f_\mu)$ no corta la diagonal de \mathbb{R}^{n+1} ; por tanto F_μ , con $\mu < \mu_1$, no tiene puntos fijos. En ausencia de puntos fijos la dinámica del endomorfismo C^2 -convexo con retardo es trivial, esta propiedad fue demostrada por Rovella y Vilamajó en [34], también puede verse en [28]. Más precisamente:

Teorema 3 ([34], [28]). *Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 -convexa convexa y F su endomorfismo con retardo asociado. Si F no tiene puntos fijos, entonces el ω -límite de todo punto es vacío; de hecho $B_\infty(F) = \mathbb{R}^n$.*

La demostración de este resultado está basada en la construcción de una especial función de Lyapunov con dominio en \mathbb{R}^n , su consecuencia se obtiene de la Proposición 6. Es importante señalar que la conclusión del teorema deja de ser cierta sin la hipótesis de la C^2 -convexidad: el gráfico de la función cuadrática dada por $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4xy + 1$ no corta la diagonal de \mathbb{R}^3 , sin embargo el endomorfismo con retardo asociado tiene puntos periódicos de período 2. Variaciones de este teorema han sido mostradas en contextos diferente al de endomorfismos con retardo; ver [6], [7] y [30].

4.1. Endomorfismos con retardos horizontales y verticales.

Rovella y Vilamajó consideran en [34] familias uniparamétricas de endomorfismos con retardo C^2 -convexo en el plano: $F_\mu(x, y) = (y, f_\mu(x, y))$, $f_\mu = f - \mu$. En ese artículo se muestran interesantes propiedades para este tipo de familias; de hecho, al considerar la topología C^2 -fuerte de Whitney en el conjunto $C^2(\mathbb{R}^2)$ de funciones de clase C^2 de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} se muestra la existencia de un conjunto abierto no vacío \mathcal{U} en $C^2(\mathbb{R}^2)$ de forma que para toda $f \in \mathcal{U}$ existe un valor $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\mu > \mu_1$ valen las siguientes propiedades:

- (a) *El mapa F_μ tiene dos puntos fijos hiperbólicos del tipo silla.*
- (b) *La clausura $\overline{W_\mu^s}$ la variedad estable W_μ^s de uno de esos puntos fijos es difeomorfa al producto de un conjunto de Cantor y una circunferencia; más aun, esa clausura es el complemento de la cuenca de atracción de ∞ .*

Esencialmente el conjunto \mathcal{U} es constituido por las funciones C^2 -convexas f para las que el infimo de las derivadas de segundo orden $\partial_{22}f(x, y)$ es suficientemente grande respecto de los valores absolutos de las restantes derivadas de segundo orden de f . Esto hace que las curvas de nivel de f_μ sean curvas cerradas (tipo elipses) más alargadas en la dirección horizontal que en la vertical. Haciendo uso del conjunto C_μ introducido en la Proposición 4 anterior se verifica que

$$\bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu) = \overline{W_\mu^s} = \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty(F_\mu).$$

Aunque los puntos en el conjunto $\overline{W_\mu^s}$ tienen órbita acotada, este conjunto contiene puntos errantes. En [34] también se muestra que el conjunto no errante Ω_μ de F_μ , para valores de μ suficientemente grandes, es dado por $\Omega_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^n(\overline{W_\mu^s})$ y la restricción de F_μ a Ω_μ es topológicamente conjugado a un shift unilateral en dos símbolos. Posteriormente en [28], en el contexto cuadrático y C^2 -convexo:

$$f_\mu(x, y) = f(x, y) - \mu = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu, \quad a > 0 \text{ y } 4ab - c^2 > 0$$

se recrean los resultados de [34]; esto es, cuando el coeficiente b es suficientemente grande respecto de los coeficientes a y $|c|$. Adicionalmente se hace un análisis de la dinámica del endomorfismo con retardo F_μ asociado a f_μ en el caso que las curvas de nivel de la función f sean más verticales que horizontales, analíticamente ello significa que a es suficientemente mayor que b y $|c|$. En esas condiciones es mostrado en [28] el siguiente resultado

Teorema 4. *Existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu > \mu_1$, el conjunto no errante Ω_μ de F_μ coincide con el complemento de la cuenca de atracción de ∞ y F_μ restricto a Ω_μ es expansor y topológicamente conjugado al shift unilateral en dos símbolos.*

Este teorema fue extendido en [30] a una clase especial de endomorfismos con retardo en \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), allí se introduce la noción de funciones verticales $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como aquellas de clase C^2 para las cuales se cumple

$$\inf_x \partial_{11}f(x) > \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \sup_x |\partial_{ij}f(x)|.$$

Al considerar la topología C^2 de Whitney en el conjunto $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ de funciones verticales, se demuestra en [30] que hay un conjunto abierto no vacío \mathcal{U} en $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ de manera que para toda $f \in \mathcal{U}$ el enunciado anterior es válido. Cabe mencionar que las funciones verticales no son necesariamente C^2 -convexas, sin embargo para toda $f \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ existen constantes a_1, \dots, a_n tales que la función g dada por

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$$

sí lo es. Ello es una adecuada herramienta para lograr una demostración de los principales resultados en [30]. Es importante mencionar que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es del tipo vertical, entonces para todo μ suficientemente grande, el conjunto C_μ está contenido en el interior del epigrafo de la función C^2 -convexa $g_\mu = g - \mu$, donde g es como arriba. En este caso cada punto en C_μ tiene exactamente dos preimágenes contenidas en el epigrafo mencionado y ubicadas a diferentes lados del conjunto crítico del endomorfismo con retardo asociado a $f_\mu = f - \mu$.

En [33] se recurre a las ideas desarrolladas en [28] para introducir una noción de funciones del tipo *horizontal* en el contexto de funciones cuadráticas C^2 -convexas de \mathbb{R}^3 ; básicamente esta noción se refiere a funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuadráticas y C^2 -convexas tales que para todo μ suficientemente grande, la intersección de C_μ con el paraboloido imagen del conjunto crítico ℓ del endomorfismo con retardo F_μ asociado a $f_\mu = f - \mu$ es la unión disjunta de dos anillos dispuestos a diferentes lados de ℓ . En este contexto son demostrados resultados análogos a los presentados en [34]. Si bien esta extensión de la horizontalidad es restricta a \mathbb{R}^3 y al mundo cuadrático, las ideas y técnicas expuestas en [33] contienen el germen de la generalidad para un análisis similar cuando la función cuadrática sea sustituida por una función C^2 -convexa $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en la que $\inf_{w \in \mathbb{R}^3} \partial_{22}f(w)$ es lo suficientemente grande respecto de $\sup_{w \in \mathbb{R}^3} |\partial_{ij}f(w)|$ con $(i, j) \neq (2, 2)$, en tal caso luce factible la veracidad de:

Existe $\mu^ \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu > \mu^*$, el endomorfismo con retardo F_μ asociado a f_μ cumple con las siguientes propiedades:*

- (a) *El complemento de la cuenca de infinito de F_μ es homeomorfo al producto de una circunferencia y un conjunto de Cantor en el plano, y es la clausura de la variedad estable de cualquiera de los dos puntos fijos de F_μ .*
- (b) *El conjunto no errante Ω_μ de F_μ es igual a $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_\mu^n(C_\mu)$, es hiperbólico del tipo silla con variedades estables de dimensión uno y la dinámica de F_μ a Ω_μ es topológicamente conjugada a la del shift unilateral en dos símbolos.*

Resaltamos que dar el paso de extender la horizontalidad de \mathbb{R}^3 a dimensiones mayores requiere un poco más de atención, incluso en el caso cuadrático; por supuesto pensando en la búsqueda de un resultado como el de arriba esperado. Para funciones C^2 -convexas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n > 3$), una condición del tipo $\inf_{w \in \mathbb{R}^n} \partial_{22} f(w)$ suficientemente grande respecto de $\sup_{w \in \mathbb{R}^n} |\partial_{ij} f(w)|$, $(i, j) \neq (2, 2)$, no garantiza ni siquiera que $C_\mu \cap F_\mu(\ell)$ sea un conjunto que extienda la naturaleza de esa misma intersección en el caso que $n = 3$ y f sea cuadrática C^2 -convexa.

Agradecimiento. El autor agradece el apoyo financiero del Consejo de Desarrollo Humanístico, Científico y Tecnológico de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado a través del proyecto 011-CT-2012; también desea expresar su gratitud a la Universidad del Atlántico (Barranquilla, Colombia), donde parte de este trabajo fue escrito, por la invitación y hospitalidad.

Referencias

- [1] E. Allman and J. Rhodes, *Mathematical Models in Biology: An Introduction*. Cambridge University Press (2004).
- [2] J. Banasiak, *Mathematical Models in One Dimension: An Introduction via Difference and Differential Equations*. Cambridge University Press (2013).
- [3] L. A. Bunimovich. Coupled Map Lattices: at the age of Maturity. *Lect. Notes Phys.* **671**, 9–32 (2005).
- [4] F. Brauer and C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Populations Biology and Epidemiology*. Texts in Applied Mathematics, 40. Springer-Verlag, New York (2001).
- [5] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics I*. Interscience Publishers, Inc. NY (1953).
- [6] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Bounded solutions of quadratic circulant difference equations. *J. Difference Equ. Appl.* Vol. **11**, No. **10**, 897 – 907 (2005).
- [7] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Hyperbolic real quadratic cellular automata. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* Vol. **12**, 795 – 809 (2005).
- [8] J. Delgado, J. Garrido, N. Romero, A. Rovella, F. Vilamajó. *On the Geometry of Quadratic Maps of the Plane*. Publ. Mat. Urug, **14**, 108–123 (2013)
- [9] V. Dobrynskiy. On properties of coupled quadratic mappings. *Nonlinear Analysis*. **35**, 247–267 (1999).
- [10] V. Dobrynskiy. Critical sets and properties of endomorphisms built by coupling of two identical quadratic mappings. *J. Dynam. Control Systems*. **5**, 227–254 (1999).
- [11] B. Fernandez and M. Jiang. Coupling two unimodal mapas with simple kneading sequences. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24**, 107–125 (2004).
- [12] M. Giaquinta and G. Modica. *Mathematical Analysis: Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*. Birkhäuser (2012).
- [13] W. H. Haemers. Interlacing eigenvalues and graphs. *Linear Algebra Appl.* Vol. **227-228**, 593 – 616 (1995).

- [14] G. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems, *Mathematical Systems Theory* **3**, 320 – 375 (1969).
- [15] S. Hidetsugu and T. Kazuhisa. Bifurcations of the Coupled Logistic Map. *Progr. Theoret. Phys.* **78 (2)**, 305–315 (1987).
- [16] Suk-Geun Hwang. Cauchy’s Interlace Theorem for Eigenvalues of Hermitian Matrices. *Amer. Math. Monthly*. Vol. **111**, No. **2**, 157 – 159 (2004).
- [17] K. Kaneko. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos. *Physica D*. **34**, 1–41 (1989).
- [18] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**. Cambridge University Press (1995).
- [19] W. W. Lin, C. C. Peng and C. S. Wang. Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *Internat. J. Bifur. and Chaos* **9 (8)**, 1635–1652 (1999).
- [20] W. W. Lin and Y. Q. Wang. Chaotic Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *SIAM J. Applied Dynamical Systems* **1**, 175–189 (2002).
- [21] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich and E. Mosekilde. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps. *Phys. Rev. E*. **57 (3)**, 2713–2724 (1998).
- [22] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich and E. Mosekilde. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps. *Phys. Rev. E*. **60 (3)**, 2817–2830 (1999).
- [23] R. Mañé and C. Pugh. Stability of endomorphisms. *Lecture Notes in Math*. Vol. **468**, 175–184. Springer-Verlag, New York (1975).
- [24] P. Montel. *Leçons sur les Récurrences et leurs Applications*. Gauthier Vilars, (1957).
- [25] Constantin Niculescu and Lars-Erik Persson. *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York (2006).
- [26] F. Przytycki. On Ω -stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A, *Studia Math.* **60** (1977), 61–77.
- [27] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. On the Dynamics fo n -Dimensional Quadratic Endomorphisms. *Commun. Math. Phys.* Vol. **195**, 295 – 308 (1998).
- [28] N. Romero, A. Rovella y F. Vilamajó. *Endomorfismos convexos con retardo en \mathbb{R}^2 : la dinámica de los cuadráticos*. XI Escuela Venezolana de Matemática. Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados – Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (1998).
- [29] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Invariant manifolds for delay endomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Vol. **7**, No. **1**, 35 – 50 (2001).
- [30] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. Dynamics of vertical delay endomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. Vol. **3**, No. **3**, 409 – 422 (2003).
- [31] N. Romero, A. Rovella and R. Vivas. Invariant Manifolds and Synchronization for Coupled Logistic Mappings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics Sciences*, **4 (1)**. 39 – 57 (2007).

- [32] N. Romero, J. Silva and R. Vivas. On a coupled logistic map with large strength. *J. Math. Anal. Appl.* **415**, 346–357 (2014).
- [33] N. Romero, J. Silva, R. Vivas. *On bounded solutions of a third order difference equations*. Preprint. Sometido a publicación (2015).
- [34] A. Rovella and F: Vilamajó. Convex Delay Endomorphisms. *Commun. Math. Phys.* Vol. **174**, 393 – 407 (1995).
- [35] R. A. Vivas. *Variedades invariantes para la aplicación logística acoplada*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. (2007).
- [36] J. Weikämper. A Study of Bifurcations in a Circular Real Cellular Automaton. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **3 (2)**, 293–321 (1993).

Para citar este artículo: N. Romero. 2016, “Sobre funciones C^2 -convexas y dinámica discreta”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.