Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 61–73

Facultad de Ciencias Básicas

Vol. III , № 1, (2016)

Sobre una familia de polinomios tipo Apostol

On a family of Apostol-Type polynomials

William Ramírez[1]

[1]*GICBAS, Universidad de la Costa, Barranquilla-Colombia*
e-mail: wramirez4@cuc.edu.co

Alejandro Urieles G.[2]

[2]*Sistema Dinámico y EDO, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*
e-mail: alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

Sean $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}^{+}$, y sea $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$ la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados de orden α, nivel m y variable x. En el presente trabajo estudiaremos algunas propiedades de esta familia de polinomios y la utilizaremos para demostrar fórmulas de conexión entre éstos polinomios y los polinomios de Apostol Euler y los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m.

Palabras claves: Polinomios de Apostol Euler, polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m y polinomios tipo Apostol generalizados.

Abstract

Let $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}^{+}$ and let $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$ be the new class of generalized Apostol-type polynomials of α order, m level and variable in x. In the present document we study some properties of these polynomials being used to proof formulas in connection with Apostol-Euler polynomials and generalized Bernoulli polynomilas of m level.

Keywords:
Polynomials Euler Apostol, generalized Bernoulli polynomilas of m level and generalized polynomials type Apostol.

1. Introducción

Recientemente en [9], para parámetros $\alpha, \lambda, u, \nu \in \mathbb{C}$ con $a, c \in \mathbb{R}^{+}$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$ de orden α nivel m se define por medio de la siguiente función generatriz

$$\left(\frac{(2^{\mu}z^{\nu})^m}{\lambda c^z + \sum\limits_{l=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)\frac{z^n}{n!}, \tag{1}$$

donde $|z| < 2\pi$ cuando $\lambda = 1$, $|z| < \pi$ cuando $\lambda = -1$, $\left(\left|z\ln\left(\frac{c}{a}\right)\right| < |\log(-\lambda)|\right)$ cuando $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, y $1^{\alpha} := 1$. Esta proporcionan una unificación de las nuevas clases de polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, polinomios generalizados de Apostol-Euler y los polinomios generalizados Apostol-Genocchi dados en [7] con los polinomios tipo Apostol generalizados dados en [8, 12, 13]. En este trabajo demostraremos fórmulas de conexión de los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)$ con los polinomios de Bernoulli clásicos, los polinomios de Apostol-Euler, los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m, los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados de nivel m, los polinomios de Bernoulli generalizados y numeros de Stirling y los polinomios de Apostol Bernoulli y números de Stirling generalizados.

La organización es como sigue. La sección 2, es dedicada a la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)$ dados en [9], así como tambien algunas propiedades requeridas para el desarrollo de nuestro propósito. En la sección 3 fórmulas de conexión de los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)$ con otros polinomios serán demostradas.

2. Preliminares

En esta sección mostraremos las funciones generatrices de las familias de polinomios tipo Apostol generalizados que dieron soporte al trabajo publicado en el 2015 titulado "About Extensions of Generalized Apostol-Type polynomials [9], así como también analizaremos algunas de sus propiedades.

Para parámetros complejos o reales arbitrarios $\alpha \in \mathbb{C}$ y para $a, c \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$ la nueva clase de polinomios Apostol-Bernoulli generalizados $\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x,c,a;\lambda)$, la nueva clase de polinomios Apostol-Euler generalizados $\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x,c,a;\lambda)$ y la nueva clase de polinomios Apostol-Genocchi generalizados $\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x,c,a,c;\lambda)$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ se definen en un entorno adecuado de $z = 0$, a través de las siguientes funciones generatrices([9, 13])

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z^m}{\lambda c^z - \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x,c,a;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log(\frac{c}{a})| < |\log(\lambda)|.\\
\left(\frac{2^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x,c,a;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z \quad \log(c)| < |\log(-\lambda)|.\\
\left(\frac{(2z)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x,c,a;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z \quad \log(c)| < |\log(-\lambda)|.
\end{aligned}$$

A continuación mostraremos algunas propiedades de estos polinomios ver ([9]).

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\}_{n\geq 0}$, $\{\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\}_{n\geq 0}$ las sucesiones de los polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi en la variable x, parámetros $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}^{+}$, de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ verifican las siguientes relaciones.

$$\mathfrak{B}_{n}^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda) = \mathfrak{E}_{n}^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda) = \mathfrak{G}_{n}^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda) = (x\ln c)^{n}. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)(x\ln c)^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c,a;\lambda)\mathfrak{B}_{k}^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)(x\ln c)^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c,a;\lambda)\mathfrak{E}_{k}^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)(x\ln c)^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c,a;\lambda)\mathfrak{G}_{k}^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{B}_{n-k-1}^{[m-1,-1]}(x;c,a;\lambda) &= \lambda\mathfrak{B}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x+1;c,a;\lambda)\\ &\quad -\mathfrak{B}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,-1]}(x;c,a;\lambda) &= \lambda\mathfrak{E}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x+1;c,a;\lambda)\\ &\quad +\mathfrak{E}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\left[\mathfrak{B}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\right]^{(j)} &= \frac{n!}{(n-j)!}(\ln c)^{j}\mathfrak{B}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\left[\mathfrak{E}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\right]^{(j)}\\ &= \frac{n!}{(n-j)!}(\ln c)^{j}\mathfrak{E}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\left[\mathfrak{G}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\right]^{(j)}\\ &= \frac{n!}{(n-j)!}(\ln c)^{j}\mathfrak{G}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\mathfrak{B}_{n}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)dx &= \frac{\ln c}{n+1}\left[\mathfrak{B}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1;c,a;\lambda)-\mathfrak{B}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0;c,a;\lambda)\right]\\ &= \left[\ln c\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)\right]\\ &\quad ((x_1\ln c)^{n-k+1}-(x_0\ln c)^{n-k+1}).\end{aligned} \tag{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)dx = \frac{\ln c}{n+1}\left[\mathfrak{E}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1;c,a;\lambda) - \mathfrak{E}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0;c,a;\lambda)\right]$$
$$= \left[\ln c \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_k^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)\right] ((x_1 \ln c)^{n-k+1} - (x_0 \ln c)^{n-k+1}). \tag{10}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)dx = \frac{\ln c}{n+1}\left[\mathfrak{G}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1;c,a;\lambda) - \mathfrak{G}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0;c,a;\lambda)\right]$$
$$= \left[\ln c \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}\mathfrak{G}_k^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)\right] ((x_1 \ln c)^{n-k+1} - (x_0 \ln c)^{n-k+1}). \tag{11}$$

$$\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda). \tag{12}$$

$$\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda). \tag{13}$$

$$\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda). \tag{14}$$

En el 2011 en ([7, 8, 9]) encontramos que para un $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda, \alpha, u, v \in \mathbb{C}$ los polinomios tipo Apostol generalizados $\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;u,v)$ de orden α se define a través de la siguiente función generatriz

$$\left(\frac{2^u z^v}{\lambda e^z + 1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!}; \quad (|z| < |log(-\lambda)|), \tag{15}$$

donde

$$\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(\lambda;u,v) =: \mathcal{F}_n^{(\alpha)}(0;\lambda;u,v) \tag{16}$$

denotan los también llamados números de tipo Apostol de orden α.

Para $z \in \mathbb{C}$, se define la función Gamma denotada Γ como

$$\Gamma(z) = \int_{o}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{17}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, el símbolo de Pochhammer esta dado por

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1); \quad (z)_0 = 1. \tag{18}$$

Éste cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}(1)_n &= n!\\ (z)_n &= \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}.\end{aligned}$$

Sea $z \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}$ y $p > -1$ se define la derivada generalizada de orden α como

$$\frac{d^q[x-z]^p}{[dx]^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}. \tag{19}$$

En particular, si hacemos $z = 0$ tenemos

$$\frac{d^q x^p}{(dx)^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}. \tag{20}$$

Para $n, k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ se definen los números de Stirling de segunda clase denotados como $S(n,k)$ por la siguiente función generatriz

$$\begin{aligned} z^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k) z(z-1)\dots(z-k+1),\\ (e^z+1) &= k!\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{z^n}{n!},\\ (1-z)^{-1}(1-2z)^{-1}\dots(1-kz)^{-1} &= \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)z^{n-k}, \quad |z| < k^{-1}.\end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra algunas relaciones de la base canócica con algunas familias de polinomios.

x^n	Familias de polinomios
$\frac{1}{2}\left[\lambda\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{E}_k(x;\lambda)+\mathcal{E}_n(x;\lambda).\right]$ (21)	Apostol-Euler
$\frac{(\ln c)^m}{(\ln a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!(\ln c)^k}{(k+m)!}\mathfrak{B}_n^{[m-1,1]}(x,c,a).$ (22)	Apostol-Bernoulli generalizados nivel m
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{(k+m)!}B_{n-k}^{[m-1,1]}(x).$ (23)	Bernoulli generalizados de nivel-m
$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(x).$ (24)	Bernoulli clásicos
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k+r}{r}^{-1}S(k+r,r)B_{n-k}^{(r)}(x), r\in\mathbb{N}_0.$ (25)	Bernoulli generalizados y numeros de Stirling
$n!\sum_{k=-r}^{n}\frac{r!}{(k+r)!(n-k)!}S(k+r,r;\lambda)\mathfrak{B}_{n-k}{}^{(r)}(x;\lambda), r\in\mathbb{N}_0.$ (26)	Apostol Bernoulli y numeros de Stirling genralizados

Definition 2.1. *Para parámetros $\alpha,\lambda,u,v\in\mathbb{C}$ con $a,c\in\mathbb{R}^+$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)$ de orden α se define por la siguiente función generatriz*

$$\left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z+\sum\limits_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)\frac{z^n}{n!}, \tag{27}$$

cuando $|z|<2\pi$, $\lambda=1$, $\quad |z|<\pi$, $\lambda=-1$ $(|z\log\left(\frac{b}{a}\right)|)<|\log(-\lambda)|$, $\quad \lambda\in\mathbb{C}\{-1,1\}$
donde,

$$Q_n^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda;u,v):=Q_n^{[m-1,\alpha]}(0,b,c;\lambda;u,v). \tag{28}$$

En [9] se muestran algunos ejemplos numéricos de la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)$.

Theorem 2.2. *Para $\alpha,\lambda,\beta,u,v\in\mathbb{C}$ con $b,c\in\mathbb{R}^+$ y $n,m\in\mathbb{N}_0$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;\mu;\nu)$ satisfacen las siguientes relaciones*

$$i)\quad Q_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y,b,c;\lambda;u,v)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(x,c,a;\lambda;u,v)Q_{n-j}^{[m-1,\beta]}(y,c,a;\lambda;u,v), \tag{29}$$

$$ii)\quad Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y,c,a;\lambda;u,v)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)(x\log c)^{n-j}. \tag{30}$$

Theorem 2.3. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$, $b, c \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{N}_0$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v)$ satisfacen las siguientes relaciones.*

$$Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha-1]}(c, a; \lambda; u, v) Q_j^{[m-1]}(x, c, a; \lambda; u, v), \tag{31}$$

$$Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; u, v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda; u, v)(x \log c)^j, \tag{32}$$

cuando $x = 0$ los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(c, a; \lambda; u, v)$ son los también llamados nueva clase de números tipo Apostol generalizados de orden α.

Theorem 2.4.

Para $m \in \mathbb{N}$, α, λ, a, c, y $n, j \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq j \leq n$, entonces

$$[Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)]^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} (\ln c)^j \, Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu). \tag{33}$$

Para ver detalles de la demostración de los teoremas (2.2, 2.3, y 2.4) ver [9].

3. Fórmulas de conexión de los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$

En esta sección nuestro objetivo es demostrar fórmula de conexión que hay entre la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados de orden α, nivel m y variable x $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$ con los polinomios dados en la sección 2

Theorem 3.1. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $a, c \in \mathbb{R}^+$, los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$ y los polinomios de Apostol Euler $\mathcal{E}_n(x; \lambda)$ están relacionados a través de la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x + y, c, a; \lambda; u, v) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{E}_k(x; \lambda) \left[\binom{n}{k} Q_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v)(\log c)^k + \lambda \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; u, v)(\log c)^j \right]. \end{aligned} \tag{34}$$

Demostración 3.1.

$$
\begin{aligned}
&Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y,c,a;\lambda;u,v)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{n-j}}{2}\left[\lambda\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}\mathcal{E}_k(x;\lambda)+\mathcal{E}_{n-j}(x;\lambda)\right]\\
&=\lambda\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{n-j}}{2}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{n-j}}{2}\mathcal{E}_{n-j}(x;\lambda)\\
&=\lambda\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log a)^{n-j}}{2}\binom{n-j}{k}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{n-j}}{2}\mathcal{E}_{n-j}(x;\lambda)\\
&=\lambda\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{n-j}Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{j}}{2}\binom{j}{k}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{k}}{2}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\\
&=\lambda\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{j}}{2}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)\frac{(\log c)^{k}}{2}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\\
&Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y,c,a;\lambda;u,v)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{E}_k(x;\lambda)\left[\binom{n}{k}Q_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)(\log c)^k+\lambda\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y,c,a;\lambda;u,v)(\log c)^j\right].
\end{aligned}
$$

Theorem 3.2. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $a, c \in \mathbb{R}^{+}$, los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$ y los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados de nivel m $\mathfrak{B}_n^{[m-1,1]}(x, c, a)$ están relacionados a través de la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x + y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)\frac{(\ln c)^{j+m+k}}{(\ln a)^n}\frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!}\mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a) \end{aligned} \tag{35}$$

Demostración 3.2.

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x + y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(x \log c)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\log c)^j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\log c)^j\left[\frac{(\ln c)^m}{(\ln a)^n}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{k!(\ln c)^k}{(k+m)!}\mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\log c)^j\left[\frac{(\ln c)^m}{(\ln a)^n}\frac{k!(\ln c)^k}{(k+m)!}\frac{n!}{(n-j)!j!}\frac{j!}{(j-k)!k!}\mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)\frac{(\ln c)^{j+m+k}}{(\ln a)^n}\frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!}\mathfrak{B}_j^{[m-1,1]}(x, c, a). \end{aligned}$$

Theorem 3.3. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $a, c \in \mathbb{R}^{+}$, los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$ y los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m $B_n^{[m-1,1]}(x)$ están relacionados a través de la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x + y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\ln c)^j\frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!}B_{j-k}^{[m-1,1]}(x) \end{aligned} \tag{36}$$

Demostración 3.3.

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x + y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(x \log c)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\log c)^j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\log c)^j\left[\frac{k!n!j!}{(k+m)!(j-k)!(n-j)!j!k!}B_{j-k}^{[m-1,1]}(x)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\ln c)^j\frac{n!}{(n-j)!(j-k)!(k+m)!}B_{j-k}^{[m-1,1]}(x). \end{aligned}$$

Theorem 3.4. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $a, c \in \mathbb{R}^+$, los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$ y los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ están relacionados a través de la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)\frac{(\ln c)^j}{j+1}\binom{n}{j}\binom{j+1}{k}B_n(x). \end{aligned} \tag{37}$$

Theorem 3.5. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $a, c \in \mathbb{R}^+$, los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$ y los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ con los números de Stirling están relacionados a través de la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\ln c)^j\binom{k+r}{r}\frac{n!}{(n-j)!(j-k)!k!}S(k+r, r)B_{j-k}^r(x). \end{aligned} \tag{38}$$

Theorem 3.6. *Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $a, c \in \mathbb{R}^+$, los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a; \lambda; \mu; \nu)$ y los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ con los números de Stirling generalizados están relacionados a través de la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} &Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y, c, a; \lambda; \mu; \nu) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y, c, a; \lambda; \mu; \nu)(\ln c)^j\frac{n!r!}{(n-j)!(k+r)!(k-k)!}S(k+r, r; \lambda)B_{j-k}^r(x; \lambda). \end{aligned} \tag{39}$$

Para la prueba de los teoremas 3.4, 3.5 y 3.6, se utiliza las misma técnica realizada en el teorema 3.3.

Theorem 3.7. *Para un $m \in \mathbb{N}$, sea $\{Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios tipo Apostol generalizados de variable x, parámetros $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}^+$, orden $\alpha \in \mathbb{C}$ y nivel m. Entonces las siguientes relaciones se cumplen.*

1.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(x, b, c; \lambda; u, v)Q_{n-k}^{[0,-1]}(0; c, a; \lambda; 0; 0) &= \lambda Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+1; c, a, \lambda; \mu; \nu) \\ &\quad + Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(x, b, c; \lambda; u, v)\mathfrak{E}_{n-k}^{[0,-1]}(0; c, a; \lambda) &= \lambda Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+1; c, a, \lambda; \mu; \nu) \\ &\quad + Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu). \end{aligned}$$

Demostración 3.4. *Considerando la expresión*

$$\lambda Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+1; c, a, \lambda; \mu; \nu) + Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$$

y usando la función generatriz 27,se llega a la prueba.

Theorem 3.8. *Para $j \in \mathbb{N}_0$, la familia $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu)$ satisface la siguiente relación.*

$$z^j \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{z^n}{n!}. \tag{40}$$

Demostración 3.5. *Derivando j veces con respecto a x en ambos lados de 27 y usando (33)*

$$z^j (\log c)^j \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\log a)^p \frac{n!}{(n-j)!} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; c, a; \lambda; \mu; \nu) \frac{z^n}{n!}, \tag{41}$$

multiplicando por $(\log c)^{-j}$ en ambos lados de (41),se completa la prueba.

Theorem 3.9. *Para parámetros $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ con $c, a \in \mathbb{R}^+$ $n, m \in \mathbb{N}$ la siguiente relación se cumple*

$$\prod_{i=1}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha_i]}(x_i, c, a, \lambda; \mu; \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x, c, a, \lambda),$$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = \alpha$ y $x_1 + \cdots + x_r = x$.

Demostración 3.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha_i]}(x_i, c, a; \lambda; u, v) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_i} c^{x_i z} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha_i]}(x_i, c, a; \lambda; u, v) \frac{z^n}{n!} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_i} c^{x_i z} \\
&= \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha} c^{xz} \cdot \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_2} c^{x_2 z} \cdots \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha_m} c^{x_m z} \\
&= \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log a)^l}{l!}} \right)^{\alpha} c^{xz} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x_i; c, a; \lambda; u, v) \frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

4. Agradecimientos

Los autores de este trabajo fueron soportados por el proyecto Impacto Caribe (IC-002627-2015), Universidad del Atlántico, Colombia, y DID-USB(S1-IC-CB-003-16)

Referencias

[1] Apostol, T.: On the Lerch Zeta function. Pac. J. Math. 1, 161-167 (1951).

[2] Apostol, T.: Introduction to Analitic Number Theory. Springer, New York (1976)

[3] Askey, R.: Orthogonal Polynomials and Special Functions. Regional Conference Series in Applied Mathematics. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol (1975)

[4] Bayada, A., Simsek, Y., Srivasta, H.M.: Some array type polynomials associated with special numbers and polynomials. Appl. Math. Comput. 244, 149-157 (2014)

[5] Bretti, G., Natalini, P., Ricci, P.E.: Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. Abstr. Appl. Anal. 7, 613-623 (2004)

[6] Chen, S., Y., Luo,Q.-M.: An extension of generalized Apostol-Euler polynomials. Adv. Differ. Equ. 2013,61 (2013)

[7] Lu, D.-Q., Luo, Q.-M.: Some properties of the generalized Apostol-type polynomials. Bound. Value Probl. 2013 **2013**:64.

[8] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. Comput. Math. Appl. 51, 631-642 (2006).

[9] Hernández Pedro., Yamilet Quintana and Alejandro Urieles.: About Extensions of Generalized Apostol-Type Polynomials Results. Math. Online First Springer Basel DOI 10.1007/s00025-014-0430-2 (2014)

[10] He, Y., Wang, C.: Recurrence formulae for Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. Adv. Differ. Equ. 2012, 2009 (2012)

[11] Hu, S., Daeyeoul Kim, D., Kim, M.-S.: New identities involving Bernoulli, Euler and Genocchi numbers. Adv. Differ. Equ. 2013, 74 (2013)

[12] Kur, B.: On the Multiple Sums of Bernoulli, Euler and Genocchi Polynomials Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 8, 373-377 (2013)

[13] Kur, B.: Some relationships between the generalized Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. Turk. J. Anal. Number Theory 1(1), 54-58 (2013)

[14] Kur, B., Simsek, Y.: On the generalized Apostol-type Frobenius-Euler polynomials. Adv. Differ. Equ. 2013, 1 (2013)

[15] Qiu-Ming Luo, H.M. Srivastava.: Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 5702-5728.

[16] Mohammadi, F., Hosseini, M.M.: Anew Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations (2011)

[17] Liu, H., Wang, W.: Some identities on the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials via power sums and alternate power sums. Discret. Math. 309, 3346- 3363 (2009)

[18] Lu, D-Q., Luo, Q.-M.: Some properties of the generalized Apostol-type polynomials. Bound. Value Probl. 2013, 64 (2013)

[19] Lu, D-Q., Xian, C.-H., Luo, Q.M.: Some results for the Apostol-type polynomials asocciated with umbral algebra. Adv. Differ. Equ. 2013, 201 (2013)

[20] Luo, Q.-M.: Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. Taiwan J. Math. 10(4), 917-925 (2006)

[21] Luo, Q.-M.: Extensions of the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations. Osaka J. Math. 48, 291-309 (2011)

[22] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. J. Math. Anal. Appl. 308(1), 290-302 (2005)

[23] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. Comput. Math. Appl. 51, 631-642 (2006)

[24] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. Appl. Math. Comput. 217, 5702-5728 (2011)

[25] Natalini, P., Bernardini. A .:A generalization of the Bernoulli polynomials. J. Appl. Math. 2003(3), 155-163 (2003)

[26] Navas, L.M., Ruiz, F.J., Varona, J.L.: Asymptotic estimates for Apostol-Bernolli and Apostol-Euler polynomials. Math. Comput. 81(279), 1707?1722 (2012)

[27] Ozden, H., Simsek, Y., Srivastava, H.M.: A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernolli, Euler and Genocchi polynomials. Comput. Math. Appl. 60, 2779-2787 (2010)

[28] R, Tremblay., Gaboury, S., Jean, f.: Afurther generalization of Apostol-Bernoulli polynomials and related polynomials.

[29] Srivastava, H.M., Todorov, P.G.:An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. J. Math. Anal. Appl. 130, 509-513 (1988)

[30] Srivastava, H.M., Garg, M., Choudhary, S.: A new generalization of the Bernoulli and related polynomials. Russ. J. Math. Phys. 17, 251?261 (2010)

[31] Srivastava, H.M., Garg, M., Choudhary, S.: Some new families of generalized Euler and Genocchi polynomials. Taiwan. J. Math. 15(1), 283-305 (2011)

Para citar este artículo: William Ramírez et al. 2016, “Sobre una familia de polinomios tipo Apostol ”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.