Universidad del Atlántico

MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. III , № 1, (2016)

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 38–46

Integrales de Darboux para un caso particular del Circuito de Chua

Darboux integrals for a particular case Chua Circuit

Angélica Arroyo Cabrera [1]

[1] *Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla-Colombia*
angelicarroyo1020@gmail.com

Jorge Rodríguez Contreras[2]

[2] *Universidad del Norte, Barranquilla-Colombia*
jorge.jrodri@gmail.com

Resumen

En este artículo se estudia la integrabilidad de un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento del Circuito de Chua (Ver 1), para $\beta > 0$ caracterizamos todas las integrales primeras racionales generalizadas de tipo Darboux y se muestra que el número de integrales primeras racionales generalizadas linealmente independientes del sistema mencionado es como máximo la dimensión del subespacio vectorial mínimo de $\mathbb{R}^3$ que contiene el conjunto:

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

Es decir, el número de integrales primeras racionales generalizadas del sistema son sólo las calculadas, no hay otras.

Palabras claves: Integrabilidad de Darboux, Factor exponencial, polinomios de Darboux, Sistema de Chua,Integrales primeras racionales generalizadas.

Abstract

In this paper we study the integrability of a particular case of the system of differential equations describing the behavior of the circuit Chua (See 1), for $\beta > 0$ we characterize all its generalized rational first integrals, which contains the Darboux type first integrals and it is shown that the number of functionally independent generalized rational first integrals of system is at most the dimension of the minimal vector subspace of $\mathbb{R}^3$ containing the set

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

That is, the number of first integrals of system are only calculated , no other.

Keywords: Darboux integrability; exponential factor; Darboux polynomials; Chua system; generalized, rational first integrals.

1. Introducción

El Método de Darboux es un método para construir integrales primeras de campos vectoriales polinomiales utilizando sus curvas invariantes algebraicas. Ésto a través de la construcción de una función (denominada función tipo Darboux) que juega el papel de factor integrante del sistema.
En este articulo se estudia la integrabilidad de un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento del Circuito de Chua, el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(y-h(x))\\ \frac{dy}{dt} &= x-y+z \qquad\qquad h(x)=\begin{cases} b & \text{si} \quad x\geq 1\\ cx & \text{si} \quad |x|<1\\ -b & \text{si} \quad x\leq -1\end{cases}\\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y\end{aligned} \tag{1}$$

2. Marco teórico o Fundamentos teóricos

Definición 1. *Sea $\mathbb{C}[x,y,z]$ el anillo de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$.Decimos que $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ es un polinomio Darboux del campo vectorial $\mathbb{X}$ si existe un polinomio $K \in C[x,y,z]$ tal que $\mathbb{X}f = Kf$.*

Definición 2. *El polinomio $K = K(x,y,z)$ se denomina cofactor de f.*

En nuestro caso trabajaremos con polinomios complejos de Darboux en sistemas diferenciales reales, ya que con frecuencia la estructura compleja garantiza la existencia de integrales primeras reales y a veces si sólo se utilizan números reales no es posible hallar todas las integrales primeras reales.

Definición 3. *Si $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ es un polinomio Darboux , entonces $f(x,y,z) = 0$ es una superficie algebraica invariante para el sistema de diferencial (1) , es decir, si una órbita tiene un punto de la superficie $f(x,y,z) = 0$ toda la órbita está contenida en ella.*

Definición 4. *Un factor exponencial $F(x,y,z)$ del campo vectorial $\mathbb{X}$ es una función exponencial de la forma $exp(g/h)$ con g y h polinomios en $\mathbb{C}[x,y,z]$ y satisfacen $\mathbb{X}F = \mathbb{L}F$ para algunos $\mathbb{L} \in \mathbb{C}[x,y,z]$ con un grado a lo sumo 2 .*
Los factores exponenciales aparecen cuando algunos polinomios de Darboux tienen multiplicidad mayor que uno.

Definición 5. *Una primera integral del sistema (1) se llama tipo Darboux si es una primera integral de la forma:*

$$f_1^{\lambda_1}\dots f_p^{\lambda_p}F_1^{\mu_1}\dots F_q^{\mu_q}$$

donde $f_1,\dots,f_p$ son polinomios de Darboux y $F_1,\dots,F_q$ son factores exponenciales.

Definición 6. *Sea U un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3\backslash U$ tiene medida de Lebesgue cero. Se dice que una función real no constante $H = H(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una integral primera si $H(x(t),y(t),z(t))$ es constante para todos los valores de una solución $(x(t),y(t),z(t))$ de $\mathbb{X}$ contenido en U, esto es $\mathbb{X}H_{|_U} = 0$.*

La existencia de una primera integral de un sistema diferencial en $\mathbb{R}^3$ permite reducir su estudio en una dimensión. Ésta es la principal razón para buscar integrales primeras.

Definición 7. *Dos funciones $f_1(x,y,z)$ y $f_2(x,y,z)$ se dice que son independientes si sus gradientes son vectores linealmente independientes para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ excepto tal vez para un conjunto de medida de Lebesgue cero. Si el Campo de vectores $\mathbb{X}$ tiene dos integrales primeras independientes H_1 y H_2, se puede decir que es completamente integrable. En este caso, las orbitas de $\mathbb{X}$ están contenidas en las curvas $\{H_1(x,y,z) = h_1\} \cap \{H_2(x,y,z) = h_2\}$ donde h_1, h_2 varían en $\mathbb{R}$.*

Definición 8. *Se define una función racional generalizada como el cociente de dos funciones analíticas.*

3. Análisis de resultados o Resultados y análisis

3.1. Integrales Primeras de Tipo Darboux

Se define el espacio de vectores $\mathbb{X}$ asociado a (1) como:

$$\mathbb{X} = [\alpha(y - h(x))]\frac{\partial}{\partial x} + (x - y + z)\frac{\partial}{\partial y} - \beta y\frac{\partial}{\partial z}$$

Lo que sigue es nuestro resultado principal para el sistema (1) con $\beta > 0$

Teorema 1. *La única integral primera racional generalizada del sistema (1) se calcula teniendo en cuenta:*

i) Si $\beta < 1/4$, son funciones en las variables

$$|z + x|\left[\frac{\left|\frac{y}{z+x} - r_1\right|^{r_1}}{\left|\frac{y}{z+x} - r_2\right|^{r_2}}\right]^{\left(\frac{\beta}{r_1 - r_2}\right)}$$

Donde r_1 y r_2 son las raíces reales distintas de $\beta s^2 - s + 1$.

ii) Si $\beta = 1/4$, son funciones en las variables

$$\left[\frac{1}{\frac{y}{z+x} - r}\right]^{\beta}|z + x|E\Big[\frac{\beta r}{y/(z + x) - r}\Big]$$

Donde r es una raíz real doble de $\beta s^2 - s + 1$.

iii) Si $\beta > 1/4$, son funciones en las variables

$$\left|\Big(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\Big)^2 + 1\right|^{1/2}(z + x)E\Big[\frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}}\arctan\Big(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\Big)\Big]$$

Nota :$e^x = E(x)$

Demostración

Consideremos el sistema (1) con $\beta > 0$, es decir: $\dot{x} = \alpha(y - h(x))$, $\dot{y} = x - y + z$, $\dot{z} = -\beta y$

podemos expresar $\dot{y}$ como $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dt} = -\beta y$, entonces

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\beta y}{x - y + z}$$

$$(x - y + z)dz + \beta y dy = 0 \tag{2}$$

La ecuación diferencial (2) se puede convertir en homogénea a través de las sustituciones:

$$\begin{aligned} z &= u - x \\ y &= v \end{aligned}$$

Que se obtienen teniendo en cuenta la solución del sistema

$$\begin{cases} z = y - x \\ y = 0 \end{cases}$$

en el punto $(0, -x)$

Luego, (2) queda:

$$(-v + u)du + \beta v dv = 0 \tag{3}$$

Sea $v = su$, entonces $dv = uds + sdu$. Entonces (3) queda convertida en:

$$(-su + u)du + \beta su(uds + sdu) = 0$$

separando variables se obtiene:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds \tag{4}$$

La integral del miembro izquierdo de (4) se resuelve teniendo en cuenta lo siguiente:

i) Si $\beta < 1/4, \beta s^2 - s + 1$ tiene dos raíces reales $r_1 = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2\beta}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2\beta}$.
La ecuación (4) queda:

$$\ln|z + x| = -\frac{\beta}{r_1 - r_2} \ln\left[\frac{\left|\frac{y}{z+x} - r_1\right|^{r_1}}{\left|\frac{y}{z+x} - r_2\right|^{r_2}}\right]$$

Entonces,

$$H = \frac{\beta}{r_1 - r_2} \ln\left[\frac{\left|\frac{y}{z+x} - r_1\right|^{r_1}}{\left|\frac{y}{z+x} - r_2\right|^{r_2}}\right] + \ln|z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (1). Por lo tanto

$$K = E(H) = |z + x|\left[\frac{\left|\frac{y}{z+x} - r_1\right|^{r_1}}{\left|\frac{y}{z+x} - r_2\right|^{r_2}}\right]^{\left(\frac{\beta}{r_1 - r_2}\right)}$$

ii) Si $\beta = 1/4, \beta s^2 - s + 1$ tiene una raíz doble $r \in \mathbb{R}, r = \frac{1}{2\beta}$.
Aquí, la ecuación (4) queda:

$$\ln|u| = -\beta \ln\left|\frac{y}{z + x} - r\right| + \frac{\beta r}{[\frac{y}{z+x} - r]}$$

Entonces,

$$H = \beta \ln\left|\frac{y}{z + x} - r\right| - \frac{\beta r}{[\frac{y}{z+x} - r]} + \ln|z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (1). Por lo tanto

$$K = E(H) = \left|\frac{y}{z+x} - r\right|^{\beta} |z+x| E\left[\frac{\beta r}{y/(z+x) - r}\right]$$

iii) Si $\beta > 1/4$.

En este caso, las raíces r_1 y r_2 del polinomio $\beta s^2 - s + 1$ son complejas, entonces, la integral $\int \frac{\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds$ la resolveremos así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds &= \int \frac{\beta s}{\beta[(s - \frac{1}{2\beta})^2 + \frac{4\beta - 1}{4\beta^2}]} ds \\
&= \int \frac{\frac{4\beta^2}{4\beta - 1} s}{(\frac{2\beta s - 1}{(\sqrt{2\beta s - 1}})^2 + 1} ds \\
&= \frac{2\beta}{\sqrt{4\beta - 1}} \int \frac{\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}}{(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}})^2 + 1} ds + \frac{2\beta}{\sqrt{4\beta - 1}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}}}{(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}})^2 + 1} ds \\
&= \frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)^2 + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando ahora en (4):

$$\ln|z+x| = -\frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)^2 + 1\right| - \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)$$

Entonces

$$H = \frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)^2 + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right) + \ln|z+x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (1). Por lo tanto :

$$K = E(H) = \left|\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)^2 + 1\right|^{1/2} (z+x) E\left[\frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)\right]$$

Teorema 2. *Supongamos que el sistema diferencial (1) tiene a p como un punto singular y sean λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios de la parte lineal del sistema (1) en p. Entonces el número de integrales primeras racionales generalizadas linealmente independientes del sistema (1) es como máximo la dimensión del subespacio vectorial minimo de $\mathbb{R}^3$ que contiene el conjunto:*

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)\}$$

Demostración

Este teorema sirve para mostrar que el número de integrales primeras racionales generalizadas son sólo las calculadas en el teorema anterior, no hay otras.

En primer lugar observemos que el punto singular del sistema (1) es $(0,0,0)$. Los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 de la matriz jacobiana del sistema (1) en el punto singular se relacionan a través del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha c + 1)\lambda^2 + (\alpha c - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta c$$

de donde:

- Si $\alpha = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\beta}}{2}$$

Por lo tanto $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0$ es equivalente a

$$k_2(-1 + \sqrt{1-4\beta}) + k_3(-1 - \sqrt{1-4\beta}) = 0$$

O en otras palabras:

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{-1 - \sqrt{1-4\beta}}{-1 + \sqrt{1-4\beta}} \tag{5}$$

Es evidente que el lado izquierdo de (5) es un número racional (una vez que $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$) y que la elección de β de una manera conveniente el lado derecho de (5) es irracional. Por lo tanto (5) no puede sostenerse para esta elección conveniente de β. Por tanto, para este punto singular $(0,0,0)$, la dimensión del subespacio vectorial mínimo de $\mathbb{R}^3$ que contiene el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)\}$$

es claramente uno, generado por $(k_1, 0, 0)$. Así se deduce de este teorema que el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y \end{aligned}$$

puede tener solo una integral primera racional generalizada, que debe ser una función de H.

- Si $c = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\beta}}{2}$$

Por lo tanto $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0$ es equivalente a

$$k_2(-1 + \sqrt{1-4\beta}) + k_3(-1 - \sqrt{1-4\beta}) = 0$$

O en otras palabras:

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{-1 - \sqrt{1-4\beta}}{-1 + \sqrt{1-4\beta}} \tag{6}$$

Es evidente que el lado izquierdo de (6) es un número racional (una vez que $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$) y que la elección de β de una manera conveniente el lado derecho de (6) es irracional. Por lo tanto (6) no puede sostenerse para esta elección conveniente de β. Por tanto, para este punto singular $(0, 0, 0)$, la dimensión del subespacio vectorial mínimo de $\mathbb{R}^3$ que contiene el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)\}$$

es claramente uno, generado por $(k_1, 0, 0)$. Así se deduce de este teorema que el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \qquad\qquad h(x) = \begin{cases} b & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ -b & \text{si} \quad x \leq -1 \end{cases} \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y \end{aligned}$$

puede tener solo una integral primera racional generalizada, que debe ser una función de H.
Con ésto se completa la demostración del teorema anterior.

4. Conclusión

En este artículo se muestra que la única integral primera racional generalizada de tipo Darboux del sistema (1) se calcula teniendo en cuenta:

i) Si $\beta < 1/4$, son funciones en las variables

$$|z+x|\left[\frac{\left|\frac{y}{z+x}-r_1\right|^{r_1}}{\left|\frac{y}{z+x}-r_2\right|^{r_2}}\right]^{\left(\frac{\beta}{r_1-r_2}\right)}$$

Donde r_1 y r_2 son las raíces reales distintas de $\beta s^2 - s + 1$.

ii) Si $\beta = 1/4$, son funciones en las variables

$$\left[\frac{1}{\frac{y}{z+x}-r}\right]^{\beta}|z+x|E\Big[\frac{\beta r}{y/(z+x)-r}\Big]$$

Donde r es una raíz real doble de $\beta s^2 - s + 1$.

iii) Si $\beta > 1/4$, son funciones en las variables

$$\left|\Big(\frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}}\Big)^2+1\right|^{1/2}(z+x)E\Big[\frac{1}{\sqrt{4\beta-1}}\arctan\Big(\frac{2\beta s-1}{\sqrt{4\beta-1}}\Big)\Big]$$

Y se muestra que el número de integrales primeras racionales generalizadas linealmente independientes del sistema mencionado es como máximo la dimensión del subespacio vectorial mínimo de $\mathbb{R}^3$ que contiene el conjunto:

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_3=0,(k_1,k_2,k_3)\neq(0,0,0)\}$$

Es decir, el número de integrales primeras racionales generalizadas del sistema son sólo las calculadas, no hay otras.

Referencias

[1] J.Ginoux,C.Letellier and L.O. Chua, Topological analysis of chaotic solution of a three-element memristive circuit,*Int.J.Bifurcation Chaos* **20** (2010) 3819-3827.

[2] J.Llibre and X.Zhang, Darboux theory of the integrability in $\mathbb{C}^n$ taking into account the multiplicity,*J. Differential Equations* **246** (2009) 541-551

[3] J.Llibre and X.Zhang, Darboux theory of the integrability for polynomial vector fields in $\mathbb{R}^n$ taking into account the multiplicity al infinity,*Bull. Sci. Math.* **133** (2009) 765-778

[4] B.Muthuswamy and L.O. Chua, Simplest chaotic circuit, *Int.J.Bifurcation Chaos* **20** (2010) 1567-1580

[5] J.Llibre and C. Valls, On the integrability of de Muthuswamy-Chua System, *Int.J.Bifurcation Chaos*(2012) 477-488

[6] C. Pantazi, El Método de Darboux, *Notas del primer Seminario de Integrabilidad de la Universitat de Catalunya*(Marzo 2005) 61-72

Para citar este artículo: Angélica Arroyo Cabrera et al. 2016, Intagrales de Darboux para un caso particular del Circuito de Chua. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA