Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 14–19

Facultad de Ciencias Básicas

Vol. III , № 1, (2016)

Estabilidad de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas

Stability of certain Systems of Impulsive Differential Equations

Romina Cardo[1] & Alvaro Corvalán[2]

Pedro Morán 3831 2º C, C.A.B.A., Argentina, C1419HKS

[1] *rcardo@ungs.edu.ar,* [2] *acorvala@ungs.edu.ar*

Resumen

Los criterios suficientes usuales que garantizan la estabilidad de un sistema diferencial lineal impulsivo requieren condiciones muy particulares sobre las matrices que definen el sistema, que raramente se satisfacen al usar estos modelos para problemas aplicados reales. Aquí presentamos un criterio sencillo que no requiere que las matrices tengan una forma especial, o que tengan alguna relación particular entre ellas.

Palabras claves:
Sistemas Impulsivos, estabilidad, Descomposición en Valores Singulares

Abstract

The usual sufficient criteria to ensure the stability of an impulsive linear differential system require very particular conditions on the matrices that define the system, which are rarely satisfied when using these models to realistic applied problems. Here we present a simple approach that does require nor a special form for the matrices neither a particular relationship between them.

Keywords:
Impulsive Systems, Stability, Singular Value Descomposition

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones diferenciales impulsivas, como los descriptos abajo, están regidos en ciertos intervalos de tiempo, por una ecuación diferencial, pero en una sucesión de instantes de tiempo, se perturba el valor de la solución en ese instante, con un impulso puntual, y el valor así obtenido pasa a ser el valor inicial para el intervalo temporal siguiente en que vuelve a obtenerse la solución de la ecuación diferencial en ese intervalo.

Estas ecuaciones impulsivas han sido usadas exitosamente para modelizar la evolución temporal de poblaciones de especies ictícolas, marítimas o lacustres, donde suelen haber impulsos puntuales consistentes en capturas masivas o siembras de alevines en períodos puntuales (véase por ejemplo las referencias [2] y [7] para la relación con los modelos impulsivos y [3] y [4] para las consideraciones biológicas)

En este trabajo, consideramos la estabilidad de casos lineales de ciertos problemas de ecuaciones diferenciales impulsivas.

2. MODELOS IMPULSIVOS:

Estas ecuaciones impulsivas en general se pueden describir como

$$\left\{ \begin{array}{r} X'(t) = f(t, X(t)) \text{ si } t \neq \tau_k \\ X(\tau_k) = g(\tau_k, X(\tau_k^-)) \text{ si } t = \tau_k \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_k, ...$ son los tiempos de impulso. La dependencia de $g(\tau_k, X(\tau_k^-))$ de los valores de X por la izquierda permite en algunos trabajos (por ejemplo [7]) usar como criterio de impulso el valor de algunos operadores maximales laterales como la función maximal de Hardy-Littlewood a izquierda M^-, o el operador de Hardy (ver [5], [8] y [9] para definiciones y propiedades).

Si bien nos interesan problemas con $f(t, X(t))$ generales, podemos considerar en una primera aproximación funciones lineales, autónomas respecto de t , es decir, con $AX(t)$ en lugar de $f(t, X(t))$, interpretando dichas ecuaciones como la situación estacionaria para f a partir de ciertos valores de t , en adelante, - asumiendo que $f(t, \cdot)$ se comporte en forma casi lineal «a largo plazo»-. También supondremos $g \approx BX$.

Es decir, trabajaremos con sistemas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{r} X'(t) = AX(t) \text{ si } t \neq \tau_k \\ X(\tau_k) = BX(\tau_k^-) \text{ si } t = \tau_k \end{array} \right. \tag{2}$$

Vale la pena mencionar que en el caso general (1) , solo puede encararse la cuestión de la estabilidad de manera empírica, ya que no se conocen criterios generales.

Consideramos a continuación algunos criterios para el Caso Lineal (2) :

3. CRITERIOS:

Si bien se conocen algunos criterios para los sistemas de la forma (2), veremos que suelen tener condiciones muy restrictivas acerca de A o B , que están asociadas a hipótesis necesarias para las demostraciones, pero que no parecen necesariamente asociadas a la estabilidad de los sistemas.

Una cuestión que sí tiene influencia en la estabilidad de los sistemas, es la distribución de los tiempos de impulsos. Para ello definamos lo siguiente:

Definición: Decimos que se cumple la condición de tiempos de *Impulso Aproximadamente Lineales (IAL)* si $\exists\ p$, k tales que:

$$|i((s, t]) - p.(t - s)| \leq k \text{ si } s < t \tag{3}$$

donde la función i cuenta los tiempos de impulso, o sea, notamos: $i((s, t]) = \#\{\tau_k \ / \ s < \tau_k \leq t\}$.

Es decir que la condición (3) dice esencialmente que la cantidad de impulsos entre s y t , es igual a una función lineal de $(t-s)$ (es decir: $p.(t-s)$) salvo un error de $\pm k$, acotado.

Si bien en un caso puramente contínuo (sin impulsos), se requiere que A sea *ordinariamente estable:* $Re(\lambda) < 0$, $\forall \lambda$ (o sea, las partes reales de los autovalores de A son negativas); y en el caso discreto ($X_{k+1} = BX_{k}$) se requiere que B sea *discretamente estable:* $|\mu| < 1$ (o sea, los módulos de los autovalores de B son menores que 1), y tales condiciones son suficientes en los casos puramente contínuo o puramente discreto, respectivamente, en el caso impulsivo puede pasar que A sea ordinariamente estable y B sea discretamente estable, pero que sin embargo el sistema [2] no sea estable para cierta distribución de tiempos de impulso (confrontar con los resultados de la referencia [11]).

Una condición que suele considerarse asintóticamente estable en el caso impulsivo es que $Re(\lambda) < 0$, para λ los autovalores de $A + p.ln(B)$ donde p es la constante mencionada en [3] y $ln(B)$ se define a partir de un desarrollo en serie correspondiente para un cálculo funcional de matrices.

Un par de criterios que se pueden mencionar son:

· **Teorema 1** (BAINOV & SIMEONOV [12]) : Si vale:

a) la condición [3] para los tiempos de impulso

b) A y B conmutan

c) B es inversible

Entonces la condición siguiente: d) $Re(\lambda) < 0$, para todos los autovalores λ de $A + p.ln(B)$ es necesaria y suficiente para que el sistema (2) sea asintóticamente estable.

Teorema 2 (NAULIN & TAPIA [11]): Si se cumplen las condiciones a), c) y d) del Teorema 1 anterior, y si vale b') A y B son matrices triangulares superiores, entonces el sistema (2) es asintóticamente estable. (Nótese que la condición es suficiente, aunque podría no ser necesaria).

Tanto la condición b) del Teorema 1, como la condición b') del Teorema 2, son más bien artificiales y no suceden en general en las situaciones que nos ocupan (ver bibliografía) en las aplicaciones (ni siquiera como situación estacionaria «a largo plazo»).

Proponemos en cambio, un criterio diferente:

Notemos primero que en cada intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ la ecuación es ordinaria, de la forma: $\begin{cases} X' = AX \\ X(\tau_k) = X_k \end{cases}$ y la solución es por lo tanto $X(t) = e^{A(t-\tau_k)}X_0$ (ver por ejemplo la referencia [6]); por lo tanto, para un tiempo t cualquiera, con $t > \tau_N > \tau_{N-1} > ... > \tau_0$ y $\tau_{N+1} \geq t$, la solución de (2) es:

$X(t) = e^{A(t-\tau_N)}Be^{A(\tau_N-\tau_{N-1})}Be^{A(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})}B...e^{A(\tau_2-\tau_1)}Be^{A(\tau_1-\tau_0)}$.

Llamemos: $M_{N+1} = e^{A(t-\tau_N)}$

$M_N = e^{A(\tau_N-\tau_{N-1})}$

$M_{N-1} = e^{A(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})}$

.

.

.

$M_k = e^{A(\tau_k-\tau_{k-1})}$

Entonces:

$X(t) = M_{N+1}BM_NBM_{N-1}B...M_2BM_1X_0$ (donde $X_0 = X(\tau_0)$) si $t \neq \tau_{N+1}$

(en el caso $t = \tau_{N+1}$es $X(t) = BM_{N+1}BM_NBM_{N-1}B...M_2BM_1X_0$ y el análisis es similar agregando el factor B de la izquierda).

Consideramos entonces la descomposición en valores singulares (s.v.d.) de B y de cada matriz $M_k = e^{A(\tau_k - \tau_{k-1})}$.

Si los valores singulares de las matrices M_k (que son función solamente de A y de los intervalos $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$) son tales que la productoria del mayor valor singular de cada M_k por la potencia n-ésima del mayor valor singular de B , es menor o igual que 1, entonces el sistema (2) es estable.

En efecto, si escribimos $B = USV^t$ y $M_k = U_k S_k V_k^t$ sus respectivas descomposiciones en valores singulares, entonces:

$\|X(t)\| = \left\|U_{N+1} S_{N+1} V_{N+1}^t U S V^t U_N S_N V_N^t U S V^t ... U S V^t U_1 S_1 V_1^t X_0\right\|$, pero aunque las matrices U, U_k, V y V_k^t no conmutan en general, como son ortogonales y tenemos que si O es ortogonal $\|OX\| = \|X\|$ entonces los factores U, U_k, V y V_k^t conservan la norma de los vectores que multiplican; y las matrices S y S_k son diagonales, y si D es diagonal, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & d_{NN} \end{pmatrix}$ cumple que $D.\begin{pmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}X_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_{nn}X_n \end{pmatrix}$, y, por lo tanto, $\|DX\| \leq \text{máx}(d_{jj}) \|X\| = d(1,1) \|X\|$ si $d_{11} \geq ... \geq d_{NN}$, ya que se suele considerar (ordenados) los valores singulares (la diagonal de S o de S_k).

Entonces: $\|X(t)\| \leq 1{\cdot}S_{N+1}(1,1){\cdot}1{\cdot}1{\cdot}S(1,1){\cdot}1{\cdot}1{\cdot}S_N(1,1){\cdot}1{\cdot}1{\cdot}S(1,1)\cdots 1{\cdot}1 \cdots S(1,1){\cdot}1{\cdot}1{\cdot}S_1(1,1{\cdot}1{\cdot}\|X_0\|$ donde $S(1,1)$ y $S_k(1,1)$ son los mayores valores singulares de B y de M_k respectivamente.

Por lo tanto, si $\left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1,1)\right) . (S(1,1))^N \leq 1$ tenemos que: $\|X(t)\| \leq \|X_0\|$ para todo t, luego el sistema es estable.

Cuando además pueda asegurarse que $\lim_{N\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1,1)\right) \cdot S(1,1)^N = 0$ tendremos que $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$ y la estabilidad será asintótica.

4. CONSIDERACIONES FINALES y EJEMPLOS:

Nótese que el criterio que presentamos no requiere una relación específica entre A y B (como que conmuten) ni que tengan una forma particular.

Si bien el criterio es suficiente, pero no necesario, en caso de que $\left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1,1)\right) . (S(1,1))^N$ no esté acotado cuando $N \longrightarrow \infty$, y si X_0 y A son tales que $e^{A(t-\tau_k)}X$ pase arbitrariamente cerca de la dirección del primer vector propio de B, entonces el sistema no será estable.

Por otra parte cuando pueda asegurarse que $\lim_{N\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{N+1} S_k(1,1)\right) \cdot S(1,1)^N = 0$ tendremos que $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$ y la estabilidad será asintótica. Esto equivale a que diverja a $-\infty$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(S(1,1) \cdot S_k(1,1)) = \lim_{N\to\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{N+1} S(1,1) \cdot S_k(1,1)\right)$. Esto ocurre, por ejemplo, si existe $K < 1$ tal que $S_k(1,1) \cdot S(1,1) \leq K < 1$, de modo que $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(S(1,1) \cdot S_k(1,1)) = -\infty$ y entonces $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$

En los gráficos finales presentamos ejemplos de la evolución de sistemas que cumplen nuestro criterio, tanto para tiempos de impulso equidistantes como para tiempos de impulso variables sorteados aleatoriamente.

ALGUNOS EJEMPLOS:

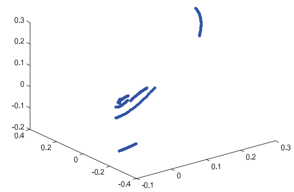

Figura 1. TIEMPOS DE IMPULSO EQUIDISTANTES

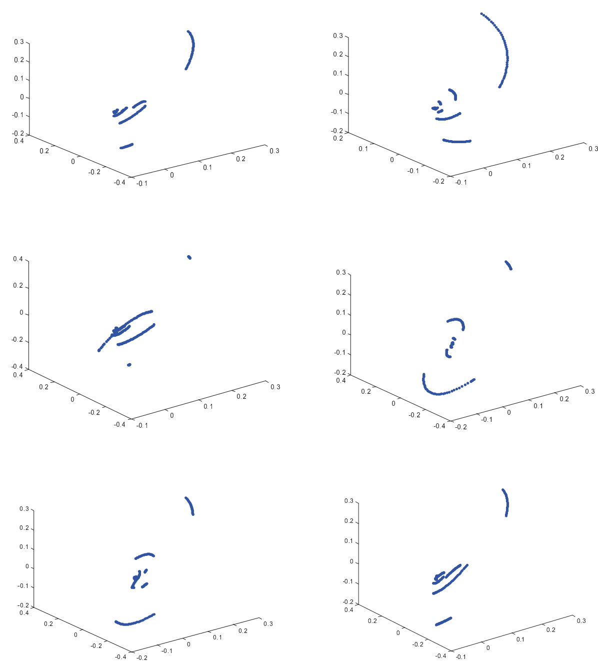

Figura 2. EJEMPLOS CON TIEMPOS DE IMPULSOS ALEATORIOS

AGRADECIMIENTOS: A Dios por todas sus bendiciones. Al anónimo referee por sus valiosas sugerencias que nos permitieron mejorar el texto y el formato de este trabajo.

Referencias

[1] Abramson, Guillermo. «La matemática de los sistemas biológicos», UNC (CNEA). 2013.

[2] Córdova Lepe, F., Del Valle, R. Robledo, G. «A pulse fishery model with closures as function of the catch: Conditions for Sustainability.», Mathematical Biosciences. Vol. 239, Issue 1, 2012.

[3] Bayo, Rodrigo E. «Comienzos de la truchicultura en la Provincia de Tierra del Fuego», Asociación Argentina de Acuicultura, 2013.

[4] Municipalidad distrital de Ragash, Publicaciones del Centro de Estudios para el desarrollo y la participación. «Manual de Crianza de Truchas» 2009.

[5] Duoandikoetxea Zuazo, J. «Fourier Analysis», Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2001.

[6] E.A. Coddington and N. Levinson, «Theory of ordinary differential equations», (McGraw-Hill, 1955).

[7] Cardo, R. & Corvalán, A , «Regulación de especies competitivas bajo modelos impulsivos de pesca-siembra regidos por operadores maximales», arXiv:1504.03345.

[8] Berkovits, L. «Parabolic Muckenhoupt weights in the Euclidean space», Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 379, Issue 2, 15 July 2011, Pages 524–537.

[9] Ombrosi, S. «Weak weighted inequalities for a dyadic one-sided maximal function in $\mathbb{R}^n$.» Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), pp. 1769–1775.

[10] Corvalán, A. «Some topics on multidimensional one-sided Maximal operators». En preparación.

[11] Naulin, R.M. y Tapia, C.R., «Estabilidad de Sistemas Lineales Impulsivos», Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. 29 (1995), págs 103-111.

[12] Bainov, D.D. & Simeonov, P.S., «Systems with Impulse Effect (Stability, Theory and Applications)», Ellis Horwood and Jhon Wiley, New York, 1989.

Para citar este artículo: Romina Cardo & Alvaro Corval 2016, "Estabilidad de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas".
Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA