UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 2 (2015)

Revista del programa del matemáticas (2015) Pag. 110-118

Una nota sobre la desigualdad de Hardy

A note on the Hardy inequality

William RAMÍREZ[1]
[1] *EDICBAS, Universidad de la Costa CUC, Barranquilla-Colombia*
e-mail: wramirez4@cuc.edu.co

Julio ROMERO P.[2]
[2] *Gecit, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*
e-mail: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co

Alejandro URIELES G.[3]
[3] *Sistema Dinámico y EDO, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*
e-mail: alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Recibido:15/12/2015 - Aceptado:27/12/2015

Resumen

En la presente nota hacemos un comentario sobre la famosa desigualdad de Hardy tanto para el caso discreto como para el caso continuo y se presentan algunas de sus generalizaciones. Se demuestra la versión clásica para el caso continuo y a través de un criterio alternativo se demuestra en detalle una versión reciente de dicha desigualdad.

Palabras claves: operador de Hardy, función peso, operador conjugado, exponente conjugado, desigualdad de Hölder.

Abstract

In this note we do a commentary on the famous Hardy inequality for both the discrete case to the continuous case and presented some of their generalizations. We show the classic version for the continuous case and through an alternative approach is shown in detail a recent version of this inequality.

Keywords: operador Hardy, weight function, conjugate operator, conjugate exponent, Hölder inequality.

1. Introducción

En 1920, se prueba la siguiente desigualdad discreta de Hardy (ver [1, 3, 6]). Si $p > 1$ y $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de números no negativos, se verifica la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p. \tag{1}$$

En una nota publicada en 1925 G. H. Hardy [2] prueba la siguiente versión continua de la desigualdad anterior. Para cualquier función $f(x) \geq 0$ tal que $f \in L^p(0,\infty)$ y $p > 1$, se verifica la desigualdad

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{2}$$

La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ en (1) y (2) es óptima. (2) es la forma original de la desigualdad integral de Hardy y ha sido estudiada extensamente y usada para la investigación de otras desigualdades más generales.

La desigualdad (1) establece que el operador de Hardy discreto h definido por

$$h\left(a_k\right)(n) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\},$$

envía l^p en l^p, mientras que la desigualdad (2) establece que el operador de Hardy continuo H dedinido por

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \tag{3}$$

envía L^p en L^p (ver [2]).

Poco después, utilizando (2) G. H. Hardy demuestra la primera modificación, con pesos de tipo potencias

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\epsilon\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\epsilon}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\epsilon\,dx, \tag{4}$$

con $1 < p < \infty$ y $\epsilon < p-1$ para toda función $f > 0$ medible y definida en $(0,\infty)$, donde la constante $\left(\frac{p}{p-1-\epsilon}\right)^p$ es óptima.

De (4) puede derivarse la siguiente desigualdad

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p x^\epsilon\,dx \leq \left(\frac{p}{1+\epsilon-p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\epsilon\,dx, \tag{5}$$

con $1 < p < \infty$ y $\epsilon > p-1$ para toda función $f > 0$ medible y definida en $(0,\infty)$.

En las últimas décadas la desigualdad (4) ha sido extendida a la siguiente forma

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^q u(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)\,dx\right)^{1/p}, \tag{6}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ que cumplen $\infty \leq a < b \leq \infty$, u y v funciones pesos, es decir, funciones medibles positivas casi siempre en el intervalo (a,b), p y q parámetros reales que satisfacen

$$0 < q \leq \infty,\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Es conocido que (6) se cumple para toda función medible $f > 0$ si y solo si $A < \infty$ (ver [2, 6]) donde,

$$A := \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'}, \tag{7}$$

con $p' = \dfrac{p}{p-1}$, para el caso $1 < p \leq q < \infty$. Y

$$A := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)\, dt \right)^{r/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\, dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)\, dx \right)^{1/r}, \tag{8}$$

con $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, para el caso $0 < q < p < \infty$, $q \neq 1$ y $1 < p < \infty$.

La desigualdad dual de (6) es una extensión de (5) y tiene la forma

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\, dt \right)^q u(x)\, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x) v(x)\, dx \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Es conocido que (9) se cumple para toda función medible $f > 0$ si y solo si $\tilde{A} < \infty$ [2] donde,

$$\tilde{A} := \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x u(t)\, dt \right)^{1/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)\, dt \right)^{1/p'}, \tag{10}$$

con $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, para el caso $1 < p \leq q < \infty$. Y

$$\tilde{A} := \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t)\, dt \right)^{r/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)\, dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)\, dx \right)^{1/r}, \tag{11}$$

con $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, para el caso $0 < q < p < \infty$, $q \neq 1$ y $1 < p < \infty$.

En 1969, G.Talenti y G. Tomasselli [1, 2, 3] determinan condiciones que tenían que verificar las funciones u y v para que el operador H y su conjugado $\tilde{H}$ estuviesen acotados de $L^p(u)$ en $L^p(v)$.

Las desigualdades (1) y (2) han sido generalizadas y aplicadas en análisis y teoría de ecuaciones diferenciales una de éstas generalizaciones y aplicaciones son estudiadas en [2, 3]. El propósito de este trabajo es presentar la desigualdad clásica de Hardy y algunas de sus generalizaciones tomando como base [2]. En la sección 2 damos algunas observaciones y resultados conocidos del análisis que serán utilizados durante el trabajo. Finalmente en la sección 3 estudiamos la demostración de la versión clásica de la desigualdad de Hardy y bajo cierta variación dada en [6] demostaramos la una versión actual de la desigualdad de Hardy.

2. Preliminares

Por un peso, entenderemos una función localmente integrable w en $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $w(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Para $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ denotamos por $W(I)$ o $W(a, b)$ al conjunto

$$W(a, b) = \{w \text{ definidas en } (a, b), \text{medibles, positivas y finitas en casi todo punto}\}.$$

Sea w un peso, y sea $I \subset \mathbb{R}$ abierto. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos el espacio $L^p(I, w) = L^p(w)$ como el conjunto de todas las funciones f medibles en I tal que

$$\|f\|^p_{L^p(I,w)} = \int_I |f(x)|^p w(x)dx < \infty, \qquad x \in I. \tag{12}$$

Para $1 < p < \infty$, p' denota el exponente conjugado de p:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Para $1 < p < \infty$ se define la dualidad en el espacio $L^p(w)$

$$(L^p(w))' = L^{p'}(w^{1-p'}).$$

Más aún, dado T un funcional lineal y continuo de $L^p(w)$ en $\mathbb{R}$, existe una única función $g \in L^{p'}(w^{1-p'})$ tal que $T : L^p(w) \to \mathbb{R}$, es dado por

$$T(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Especificamente,

$$\|g\|_{L^{p'}(w^{1-p'})} = \sup \|f\|_{L^p(w)} = 1|\langle g, f\rangle|.$$

Si definimos el operador de Hardy continuo H por

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \tag{13}$$

entonces la desigualdad (6) nos queda

$$\|Hf\|_{L^q(u)} \leq C\|f\|_{L^p(v)}. \tag{14}$$

La desigualdad (14) se cumple para funciones $f > 0$ si y solo si $A < \infty$ donde A es dado en (7) o (8) respectivamente.

Si definimos el operador conjugado de Hardy $\tilde{H}$ por

$$(\tilde{H}f)(x) := \int_x^b f(t)\,dt, \tag{15}$$

entonces la desigualdad (9) nos queda

$$\|\tilde{H}f\|_{L^q(u)} \leq C\|f\|_{L^p(v)}. \tag{16}$$

La desigualdad (16) se cumple para funciones $f > 0$ si y solo si $\tilde{A} < \infty$, donde $\tilde{A}$ es dado en (10) o (11), respectivamente.

OBSERVACIÓN 2.1. *Los operadores de Hardy H y $\tilde{H}$ son mutuamente conjugados, es decir, si*

$$H : L^p(v) \longrightarrow L^q(u), \;\; 1 < p, q < \infty,$$

entonces $(H)' = \tilde{H}$ y

$$\tilde{H} : L^{q'}(u^{1-q'}) \longrightarrow L^{p'}(v^{1-p'}).$$

Las desigualdades (14) y (16) son un prototipo de una desigualdad general en norma con peso de la forma

$$\|Tf\|_{L^q(u)} \leq C\|f\|_{L^p(v)}, \tag{17}$$

donde T es un operador integral general, usualmente uno de los operadores clásicos del Análisis Armónico (ver [2, 4, 5, 6]). La desigualdad (17) afirma que T aplica $L^p(v)$ continuamente a $L^q(u)$:

$$T : L^p(v) \longrightarrow L^q(u).$$

3. Demostración de la desigualdad de Hardy

En esta sección demostraremos la desigualdad (2) ver teorema 1 y la desigualdad (6) teniendo en cuenta una modificación en (7) ver teoremas 2 y 3.

TEOREMA 1. *Sean $p > 1$ y $f(x) \geq 0$ tal que $f \in L^p(0, \infty)$, entonces*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{18}$$

Demostración. Utilizando (3) tenemos que

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \int_0^1 f(tx)\,dt,$$

así

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \quad = \quad \int_0^\infty [Hf(x)]^p\,dx,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty [Hf(t)]^p\,dx\right)^{1/p} &= \left\|\int_0^1 f(t\cdot)\,dt\right\|_p \\
&\leq \int_0^1 \|f(t\cdot)\|_p\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(tx)\,dx\right)^{1/p} dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(s)\,\frac{ds}{t}\right)^{1/p} dt \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f^p(s)\,ds\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

□

Más detalles se encuentran en [1, 2, 6].

Para la demostración de (6) consideramos la siguiente notación

$$U(x) := \int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt. \tag{19}$$

Así, (7) nos queda

$$A := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)\, dt \right)^{1/q} U^{1/p'}(x). \tag{20}$$

TEOREMA 2. *Sea $1 < p \leq q < \infty$ y $u, v \in W(a,b)$. Entonces la desigualdad de Hardy*

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)\, dt \right)^q u(x)\, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x) v(x)\, dx \right)^{1/p} \tag{21}$$

se cumple para toda función $f > 0$ si y solo si $B < \infty$ donde,

$$\begin{aligned} B \quad := \quad & \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\, dt \right)^{-1/p} \\ & \times \left(\int_a^x u(t) \left(\int_a^t v^{1-p'}(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{22}$$

o bien

$$B := \sup_{a<x<b} U^{-1/p}(x) \left(\int_a^x u(t) U^q(t)\, dt \right)^{1/q}. \tag{23}$$

Por otra parte, la constante C en (21) satisface

$$B \leq C \leq p' B. \tag{24}$$

Demostración. (i) Supongamos que la desigualdad (21) se cumple para toda $f > 0$ con una constante $C < \infty$ y consideremos la función

$$f_t(x) = \chi(a,t)(x) v^{1-p'}(x),$$

con $t \in (a,b)$ arbitrario pero fijo. Entonces de (21) tenemos,

$$\left(\int_a^t \left(\int_a^x v^{1-p'}(s)\, ds \right)^q u(x)\, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^t v^{1-p'}(x)\, dx \right)^{1/p}, \tag{25}$$

y de (19)

$$\left(\int_0^t U^q(x) u(x)\, dx \right)^{1/q} \leq C (U(t))^{1/p}.$$

Consecuentemente $B \leq C < \infty$.

(ii) Debido a la dualidad para $g > 0$ podemos expresar la desigualdad (21) así,

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)\, dt \right)^{p'} v^{1-p'}(x)\, dx \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_a^b g^{q'}(x) u^{1-q'}(x)\, dx \right)^{1/q'}, \tag{26}$$

para g con soporte en (a,b) utilizando la desigualdad de Hölder e integración por partes tenemos,

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b \left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{p'} v^{1-p'}(x)\,dx \\
&= p'\int_a^b \left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{p'-1} g(x)\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)dx \\
&= p'\int_a^b g(x)u^{(1-q')/q'}(x)\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{p'-1}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)u^{(q'-1)/q'}(x)\,dx \\
&\leq p'\left(\int_a^b g^{q'}(x)u^{1-q'}(x)\,dx\right)^{1/q'} V_1^{1/q}, \qquad (27)
\end{aligned}$$

donde

$$V_1^{1/q} := \int_a^b \left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{q(p'-1)}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)^q u(x)\,dx. \qquad (28)$$

Denotamos

$$h(x) := \left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{q(p'-1)}.$$

Entonces, en (28) utilizando (23) y organizando de manera adecuada tenemos,

$$\begin{aligned}
V_1^{1/q} &= \int_a^b h(x)\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)^q u(x)\,dx \\
&= \int_a^b h(x)U^q(x)u(x)\,dx \\
&= \int_a^b \int_x^b [-h'(t)]\,dt\,U^q(x)u(x)\,dx \\
&= \int_a^b \int_x^b [-h'(t)U^q(x)u(x)]\,dt\,dx \\
&= \int_a^b \int_a^t [-h'(t)U^q(x)u(x)]\,dx\,dt \\
&= \int_a^b [-h'(t)]\int_a^t U^q(x)u(x)\,dx\,dt \\
&\leq B^q\int_a^b [-h'(t)]\left(\int_a^t v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{q/p} dt \\
&\leq B^q\left(\int_a^b \left(\int_x^b [-h'(t)]\,dt\right)^{p/q} v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{q/p} \\
&= B^q\left(\int_a^b h^{p/q}(x)v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{q/p} \\
&= B^q\left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{(p'-1)p} v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{q/p} \\
&= B^q\left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)\,dt\right)^{p'} v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{q/p} = B^qV^{q/p}.
\end{aligned}$$

Ahora de (27) tenemos,

$$V^{1/p'} \leq p'B\left(\int_a^b g^{q'}(x)u^{1-q'}(x)\,dx\right)^{1/q'},$$

es decir la desigualdad (26) y así (21), por otra parte $C \leq p'B$.

□

TEOREMA 3. *Sean* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *y* $u, v \in W(a,b)$. *Sea* U *dado por* (19), *entonces la desigualdad de Hardy*

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^q u(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)\,dx\right)^{1/p},$$

se cumple para toda función $f > 0$ *si y solo si* $B < \infty$ *donde,*

$$B := \left(\int_a^b \left(\int_a^t u(s)U^q(s)\,ds\right)^{r/q} U^{-r/q}(t)\,dV(t)\right)^{1/r}. \tag{29}$$

Por otra parte, la constante C *satisface*

$$qp^{-1/r}(p')^{1/q'}r^{-1/r'}2^{-1/q}B \leq C \leq q^{1/q}p'B. \tag{30}$$

Demostración. Para la demostración del teorema anterior es suficiente seguir las mismas ideas de la prueba usada en el teorema 2. □

Agradecimientos. Los autores agradecen el apoyo brindado por el proyecto Impacto Caribe: Sobre nuevas familias de polinomios tipo Apostol generalizados. Resolución 002627 del 03-03-2015. Universidad del Atlántico Km 7 Vía Pto. Barranquilla, Colombia.

Referencias

[1] A. L. Bernardis, *Desigualdades con pesos para el operador de Hardy y aplicaciones: casos lineal y multilineal* . Actas del XII Congreso Dr. Antonio Montero, 2014.

[2] A. Kufner, L. Maligranda and L. Pearson *The Prehistory of the Hardy Inequality*. MAA. 113, 715-732. 2006.

[3] A. Kufner, L. E. Pearson and A. Wedesting, *Weighted Inequalities of Hardy Type*. World Scientific Publishing Co, Singapore, New Jersey. London. Hong Kong, 2003.

[4] F. Marcellán, Y. Quintana and A. Urieles, *On $W^{1,p}$.convergence of Fourier-Sobolev expansions*. J. Math. Anal. Appl. 398, 594–599. 2013.

[5] F. Marcellán, Y. Quintana and A. Urieles, *On the Pollard decomposition method applied to some Jacobi-Sobolev expansions.* Turkish J. Math. 37 (6), 934-948. 2013.

[6] B. Opic and A. Kufner, *Hardy-Type Inequalities*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol 211, Longman Scientific and Technical Harlow, 1990.

Para citar este articulo: RAMIREZ et all., 2015, *"Una nota sobre la desigualdad de Hardy"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.