

# Sistemas Polinomiales Cuadráticos con un Punto Crítico Degenerado

## Quadratic Polynomial Systems with Degenerate Critical Point

María SERJE ARIAS <sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Colegio San Miguel del Rosario, Barranquilla-Colombia*  
*e-mail:mariangel3123@hotmail.com*

Angélica ARROYO CABRERA<sup>2</sup>

<sup>2</sup>*Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla-Colombia*  
*e-mail:angelicarroyo1020@gmail.com*

Jorge RODRÁGUEZ CONTRERAS <sup>3</sup>

<sup>3</sup>*Sistemas Dinamicos Y EDO, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*  
*e-mail:jorge.jrodri@gmail.com*

*Recibido:1/12/2015 - Aceptado:22/12/2015*

---

### Resumen

En este artículo se presenta un Análisis cualitativo de los sistemas cuadráticos que poseen un punto crítico degenerado, para ello primero se identifican y clasifican a los sistemas cuadráticos con un punto crítico degenerado y de este modo facilitar su estudio y luego se grafican los retratos de fase que resulten del análisis cualitativo de estos sistemas. Para realizar este estudio de los sistemas cuadráticos de ecuaciones diferenciales fue necesario utilizar algunos resultados importantes sobre la teoría de los *Sistemas no Lineales*, por esta razón se incluyeron algunas definiciones y teoremas que fueron vitales durante el estudio, ya que determinan los pasos a seguir para el análisis cualitativo de cualquier sistema no lineal.

**Palabras claves:** Sistemas Polinomiales Cuadráticos, Puntos Críticos No Hiperbólicos, Punto Crítico Degenerado, Análisis Cualitativo, Retratos de fase de sistemas polinomiales.

### Abstract

This article presents a qualitative analysis is presented quadratic systems that They have at most two critical points where one is a point degenerate critical to this first identify and classify quadratic systems with a degenerate critical point and thus facilitate their study and then phase portraits obtained from analysis are plotted These qualitative sistemas. For this study the quadratic systems differential equations was necessary to use some results important on the theory of textit systems not Linear , therefore they included some definitions and theorems that were vital for the study, as they determine the next steps for the qualitative analysis of any nonlinear system.

**Keywords:** Quadratic Polynomial Systems , Critical No hyperbolic , Degenerate Critical Point , Qualitative Analysis , phase portraits of polynomial systems.

---

## 1. Introducción

En muchas ocasiones resulta complicada y a veces infructuosa la tarea de hallarle solución a una ecuación diferencial; aún habiendo comprobado que esta existe. Cuando se empezó a construir la teoría sobre los sistemas dinámicos se descubrió, que aunque no pudiéramos hallar solución a estas ecuaciones, si se puede obtener mucha información cualitativa que nos facilite su estudio.

Desde que I. Newton y G. Leibniz introdujeron el cálculo diferencial en 1682, las ecuaciones diferenciales han sido vitales para la modelación de los procesos naturales.

Desde la época de Newton en la cual nacieron las ecuaciones diferenciales también nació la necesidad de hallarles solución, acertada y eficientemente. A partir de entonces muchos se interesaron en esta materia pero sin tener éxito. Sólo hasta la aparición del trabajo de Poincaré, entre los años de 1881 y 1886, se empezó a vislumbrar un camino para resolver el problema.

La originalidad de la contribución de Poincaré, explicada en un trabajo compuesto por cuatro partes, entre 1881 y 1886, consiste en una concepción mas bien diferente de las ecuaciones diferenciales. Para él, éstas no sólo constituyen objetos puramente formales sujetos a algunas reglas de cálculo, sino también objetos con el significado geométrico, dando inicio a la *Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales*. Aunque él sólo considera ecuaciones en dos variables, muchas de sus ideas se han aplicado a las dimensiones mayores. Poincaré propuso la descripción del *retrato fase* de la ecuación diferencial, es decir, la colección de la información mínima sobre las órbitas requeridas para determinar su estructura topológica. Él acuña la expresión de *ciclo límite* desarrollando los conceptos teóricos tan importantes como el *mapeo de retorno* o el *Teorema de la Región Anular*, lo cual con la contribución del matemático sueco I. Bendixson en 1901 se transformó en el famoso Teorema de Poincaré-Bendixson. El resultado anterior confirma que las soluciones en las cuales realmente estamos interesados son aquellas que llamamos *singulares* (asociadas a puntos críticos, órbitas periódicas y separatrices). Esto es debido a que bajo condiciones de compatibilidad, cualquier otra curva solución tiende hacia un conjunto de curvas singulares, llamadas *conjunto límite*. Por lo tanto, el retrato fase se determina por el carácter y la configuración de las soluciones singulares.

Usando el mismo término, podríamos decir que la Teoría Cualitativa representa un retrato de las ecuaciones diferenciales que presta atención sólo a las partes más importantes: las soluciones singulares.

En 1901 el matemático sueco I. Bendixson contribuye a la teoría que iniciaba Poincaré y uno de los resultados más importantes es el *Teorema de Poincaré-Bendixson* que se centra en el estudio de las *singularidades* (puntos críticos, orbitas periódicas y separatrices)

A pesar del gran paso que se dio en aquella época, esta nueva teoría se desarrollaba lentamente. Sin embargo, el entusiasmo por resolver el problema, que nació intrínseco con las ecuaciones diferenciales, se extendía a otras partes del mundo.

En 1926, B. van der Pol obtiene una ecuación diferencial para describir las oscilaciones de amplitud constante de un triodo al vacío y utiliza uno los métodos gráficos para probar la existencia de una órbita periódica.

Un tiempo después, en 1929, A. Andronov establece la relación entre el experimento de van der Pol y la idea del *Ciclo Límite* de Poincaré. Es la primera confirmación práctica de la idea de *Ciclo Límite*.

En 1928, el ingeniero francés A. Lienard publica un trabajo en la revista *Révue générale d'électricité*, el cual se relaciona estrictamente con el oscilador de van der Pol.

En los años 30, A. Andronov y L. Ppontryagin se ocupan de uno de los temas fundamentales de la teoría cualitativa: la estabilidad estructural.

Hasta 1981, se creyó que el problema de finitud trabajado por Dulac era verdadero. Finalmente se demostró que la prueba era falsa. En 1985, siguiendo caminos distintos, Y. Il'yashenko y J. Écalle solucionan esta conjetura.

Después de haberse establecido una teoría para el análisis cualitativo de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, se demostró que esta se podía aplicar a los sistemas no lineales. Los sistemas cuadráticos son uno de los más simples ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales y también presentan la mayoría de las dificultades de los sistemas no lineales en general. Sólo hasta 1987, se logró demostrar que dado un sistema cuadrático este tiene un número finito de ciclos límites. Aún, no se sabe nada acerca de el número máximo de ciclos límites que puede tener un sistema cuadrático, excepto que este debe poseer sólo un número finito.

La simplicidad y la complejidad que presentan, al mismo tiempo, los sistemas cuadráticos ha sido la razón por la cual subfamilias particulares de sistemas cuadráticos se han estudiado ampliamente. Algunas subfamilias de sistemas cuadráticos son las siguientes:

- Homogéneas.
- Acotadas.
- Sin puntos críticos finitos.
- Con una recta invariante.
- Con un punto crítico degenerado.
- Con exactamente dos puntos críticos.
- Con un foco débil.

En este artículo se presenta un Análisis cualitativo de los sistemas cuadráticos que poseen un punto crítico degenerado. Para realizar este estudio fue necesario utilizar algunos resultados importantes sobre la teoría de los *Sistemas no Lineales*, por esta razón se incluyeron algunas definiciones y teoremas vitales que determinan los pasos a seguir para el análisis cualitativo de cualquier sistema no lineal.

## 2. Marco teórico o Fundamentos teóricos

### 2.1. Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales

A continuación daremos algunos conceptos ya conocidos, que son necesarios a la hora de abordar los sistemas no lineales.

**Definición 1** (Sistema Dinámico). *Un sistema dinámico es un modelo matemático, para estudiar procesos iterativos de naturaleza determinística o aleatoria.*

En términos matemáticos un sistema dinámico es un par  $(M, F)$  donde  $M$  representa el contexto espacio temporal, es decir el ambiente del sistema. Este es conocido como espacio de estados o espacio de fases. Además  $F$  es una aplicación del espacio de estados en él mismo, también denominado la ley de evolución del sistema o ley de transición estados. El conjunto  $M$  es generalmente un variedad diferenciable (una superficie suave localmente).

Uno de los objetivos de estudio de un sistema dinámico es describir como va la evolución de éste, es decir, estudiar el proceso en el límite. También estudiar el flujo generado por el campo vectorial  $F$  definido por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (1)$$

con condición inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

La órbita o solución que pasa por  $x_0$ , se puede ver como la trayectoria de una partícula con posición (estado) inicial  $x_0$  y que se mueve con velocidad  $F$  en el espacio de fases  $\mathbb{R}^n$ . Para describir esta trayectoria se considera la aplicación  $\phi_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , llamada el **flujo**, que asocia cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  para cada tiempo  $s$ , con  $x(s)$ ; donde  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x(t)$  es la solución del sistema (1).

Un tipo de sistema dinámico corresponde a los sistemas polinomiales en el plano, definidos a continuación.

**Definición 2.** *Un sistema polinomial en el plano de grado  $n$  esta dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$  (conjunto de los polinomios en dos variables) y  $n$  es el grado absoluto de los polinomios  $P$  y  $Q$ .

### 2.2. Sistema Lineales

Los sistemas conviene clasificarlos para su estudio, en lineales y no lineales, la razón s la siguiente: para los primeros es posible hacer un estudio de carácter general que permite obtener un conocimiento bastante completo

de sus soluciones. Para los no lineales la situación es mucho más complicada y se conocen pocos resultados de carácter general.

Por un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias se entiende uno del tipo

$$\dot{x} = Ax \quad (3)$$

donde  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $A$  es una matriz  $n \times n$  y

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

son relativamente fáciles de analizar cualitativamente. Su estudio depende principalmente de los valores propios determinados por la matriz  $A$  de 3.

### Definición 3.

Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es atractor si todos los valores propios de la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tienen parte real negativa; es una fuente o repulsor si todos los valores propios de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tienen parte real positiva; y es una silla si el punto de equilibrio es hiperbólico y  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos un valor propio con parte real negativa.

### Teorema 1.

Sea  $\delta = \det A$  y  $\tau = \text{tr} A$  y consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax$$

- Si  $\delta < 0$  entonces (3) tiene un punto silla en el origen.
- Si  $\delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  entonces (3) tiene un nodo en el origen; este es estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$ .
- Si  $\delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\delta < 0$  entonces (3) tiene un foco en el origen; este es estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$ .
- Si  $\delta > 0$  y  $\tau = 0$  entonces (3) tiene un centro en el origen.

#### 2.2.1. Clasificación de los Puntos Críticos

Los resultados del teorema anterior nos permiten ver que los sistemas lineales se pueden clasificar de acuerdo al tipo de raíces que tenga la ecuación

$$r^2 - \text{tr}(A)r + \det(A) = 0$$

Esta clasificación nos da esencialmente seis tipos de comportamientos (cualitativamente hablando) para las trayectorias del sistema alrededor del punto de equilibrio en el origen. Decimos, alrededor del origen porque, si consideramos la vecindad de un punto del espacio fase que no sea de equilibrio, tenemos que las trayectorias son paralelas y es fundamentalmente la estructura de estas alrededor de los puntos de equilibrio lo que determina el comportamiento global de las trayectorias.

A continuación y a manera de resumen mencionaremos estas seis grupos y los nombres que reciben los puntos de equilibrio en cada caso.

a) Raíces iguales

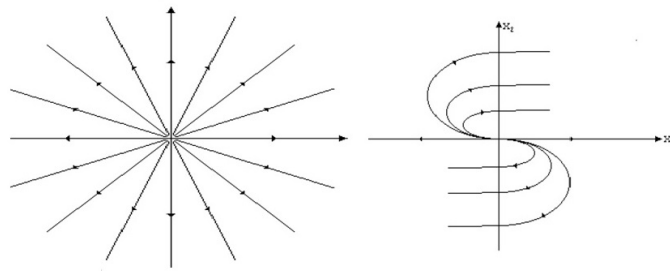


Figura 1: Nodos

b) Raíces de signos opuestos

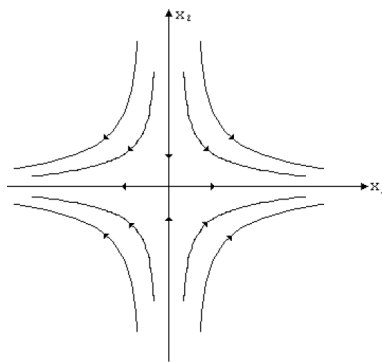


Figura 2: Silla

c) Distintas del mismo signo

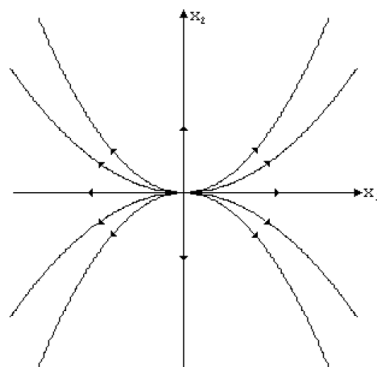


Figura 3: Nodo

d) Complejas con parte real distinta de cero

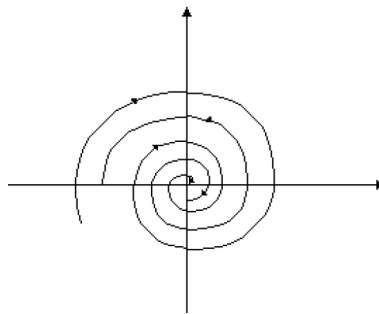


Figura 4: Foco

e) Imaginarias

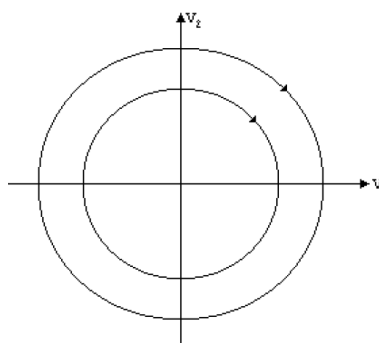


Figura 5: Centro

### 2.3. Sistemas No Lineales: Teoría Local

En esta parte nos referiremos a los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{x} = f(x) \tag{4}$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Probamos que bajo ciertas condiciones en la función  $f$ , el sistema no lineal (4) tiene una única solución para cada  $x_0 \in E$  definida en un intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ . En general, podemos concluir que no es posible resolver el sistema diferencial no lineal (4); sin embargo, mucha información cualitativa sobre la conducta local de la solución se puede determinar.

### 2.4. Linealización

Para analizar el sistema no lineal (4) es importante determinar los puntos de equilibrio, para así poder describir su comportamiento cerca de sus puntos de equilibrio. Se mostrará que el comportamiento local del sistema

no lineal (4) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$  es determinado cualitativamente por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (5)$$

con la matriz  $A = Df(\mathbf{x}_0)$ , cerca del origen. La función  $A\mathbf{x} = Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$  es llamada parte lineal de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$ .

**Definición 4.**

Un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  es un punto de equilibrio o un punto crítico de 4 si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz  $Df(\mathbf{x}_0)$  tiene parte real cero. El sistema lineal 4 con la matriz  $A = Df(\mathbf{x}_0)$  es llamado la Linealización de 4 en  $\mathbf{x}_0$ .

**Teorema 2.**

Sea  $\mathbf{E}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^2$  que contiene al origen y  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbf{E})$ . Si el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal 4, entonces el origen es una silla topológica para el sistema 4 si, y solamente si, el origen es una silla para el sistema lineal 5 con  $A = Df(\mathbf{0})$ .

**Teorema 3.**

Sea  $\mathbf{E}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^2$  que contiene al origen y  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^2(\mathbf{E})$ . Si el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal 4, entonces el origen es un nodo estable (o inestable) para el sistema 4 si, y solamente si, el origen es un nodo estable (inestable) para el sistema lineal 5 con  $A = Df(\mathbf{0})$ . Y el origen es un foco estable (o inestable) para el sistema 4 si, y solamente si, el origen es un foco estable (inestable) para el sistema lineal 5.

**Teorema 4.**

Sea  $\mathbf{E}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^2$  que contiene al origen y  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbf{E})$ . Si el origen es un centro para el sistema lineal 5 con  $A = Df(\mathbf{0})$ , entonces el origen es ó un centro, ó un centro-foco ó un foco para el sistema 4.

## 2.5. Puntos Críticos No Hiperbólicos en $\mathbf{R}^2$

En esta sección enunciaremos teoremas sobre los puntos críticos no hiperbólicos de sistemas analíticos en el plano; los cuales utilizaremos para el estudio del comportamiento local cerca de una singularidad.

**Teorema 5.**

Sea  $(0,0)$  una singularidad aislada del campo vectorial  $X(x,y) = (ax + by + F(x,y), cx + dy + G(x,y))$ , donde  $F$  y  $G$  son analíticas en una vecindad del origen y tiene expansiones en series que comienzan con términos de grado dos en  $x$  e  $y$ . Decimos que  $(0,0)$  es una singularidad no degenerada si  $ad - bc \neq 0$ . Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los valores propios de  $DX(0,0)$ . Entonces:

- Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales y  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , entonces  $(0,0)$  es punto silla, cuyas separatrices tienden a  $(0,0)$  en las direcciones dadas por los vectores propios asociados con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .
- Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales y  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , entonces  $(0,0)$  es un nodo. Si  $\lambda_1 > 0 (\lambda_2 < 0)$  entonces es un fuente (sumidero).
- Si  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  y  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  con  $\alpha, \beta \neq 0$  entonces  $(0,0)$  es un un foco. Si  $\alpha > 0 (\alpha < 0)$  entonces es repulsor (atractor).
- Si  $\lambda_1 = \beta i$  y  $\lambda_2 = -\beta i$ , entonces  $(0,0)$  es un centro lineal, topológicamente un foco o un centro.



**2.5.1. Puntos Críticos Aislados, con un único valor propio cero**

La forma de Jordan es  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  con  $\lambda \neq 0$ ,

Entonces el sistema tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = T.O.S. \\ \dot{y} = \lambda y + T.O.S. \end{cases} \cdot$$

Si tomamos  $t_1 = \lambda t$  entonces  $\frac{dy}{dt_1} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dt}$  por tanto podemos escribir

$$\begin{cases} \dot{x} = T.O.S. \\ \dot{y} = y + T.O.S. \end{cases} \cdot$$

donde T.O.S. son los términos de orden superior.

**Teorema 6.**

Suponga que  $(0, 0)$  es un punto crítico aislado del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = y + Y(x, y) \end{cases}$$

con  $X, Y$  analíticas en un entorno de  $(0, 0)$  y con serie de Taylor que comienza con términos de grado  $\geq 2$  en  $x$  e  $y$ . Sea  $y = f(x)$  la solución de  $y + Y(x, y) = 0$  y consideremos  $g(x) = X(x, f(x)) = a_m x^m + \dots$  con  $m \geq 2$  y  $a_m \neq 0$ . Si  $g \equiv 0$  entonces hay una curva de puntos críticos que pasa por el cero y por tanto no sería aislado.

Entonces:

- a) Si  $m$  es impar y  $a_m > 0$ ,  $(0, 0)$  es un nodo repulsor.
- b) Si  $m$  es impar y  $a_m < 0$ ,  $(0, 0)$  es una silla con dos separatrices atractoras en las direcciones  $0$  y  $\pi$  y dos separatrices repulsoras en las direcciones  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$ .
- c) Si  $m$  es par,  $(0, 0)$  es un silla nodo, con dos separatrices repulsoras en las direcciones  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$  y tiene una separatriz atractora en las dirección  $0$  ( $\pi$ ) si  $a_m < 0$  ( $> 0$ ) y un sector nodal en la dirección  $\pi$  ( $0$ ) si  $a_m < 0$  ( $> 0$ ).  
Así el retrato fase

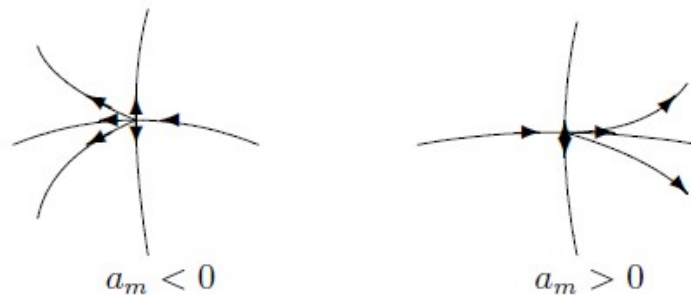


Figura 6: Retratos Fase posibles

**2.5.2. Puntos Críticos Aislados, con dos valores propios iguales a cero**

Vamos a considerar el caso cuando  $A$  tiene dos valores propios iguales a cero, es decir,  $\det A = 0, \operatorname{tr} A = 0$ , pero  $A \neq 0$ .

**Teorema 7.**

$$\text{Sea } \begin{cases} \dot{x} = y + X(x, y) \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases}$$

$X, Y$  son analíticas con términos de grado  $\geq 2$  y  $(0, 0)$  punto crítico aislado.

Sea  $y = F(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  la solución de  $y + X(x, y) = 0$  en un entorno de  $(0, 0)$ . Definimos las funciones  $f(x) = Y(x, F(x)) = ax^\alpha(1 + \dots), a \neq 0, \alpha \geq 2$  y  $\Phi(x) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)|_{(x, F(x))} = bx^\beta(1 + \dots), b \neq 0$  y  $\beta \geq 1$ .

Entonces:

- a) Si  $\alpha$  es par y  $\alpha > 2\beta + 1$ , entonces  $(0, 0)$  es silla nodo.  
 Si  $\alpha$  es par y  $\alpha < 2\beta + 1$  ó  $\Phi(x) \equiv 0$ , entonces  $(0, 0)$  tiene dos sectores hiperbólicos.
  - b) Si  $\alpha$  es impar y  $a > 0$ , entonces  $(0, 0)$  es silla.
  - c) Si  $\alpha$  es impar y  $a < 0$ , entonces
    - $\alpha > 2\beta + 1, \beta \text{ par}$
    - $\alpha = 2\beta + 1, \beta \text{ par}, b^2 + 4a(\beta + 1) \geq 0$
 } nodo estable si  $b < 0$   
 inestable si  $b > 0$ ,
  - $\alpha > 2\beta + 1, \beta \text{ impar}$
  - $\alpha = 2\beta + 1, \beta \text{ impar}, b^2 + 4a(\beta + 1) \geq 0$
- } unión de sector elíptico
- 
- y sector hiperbólico,
- $\alpha = 2\beta + 1$  y  $b^2 + 4a(\beta + 1) < 0$
- $\alpha < 2\beta + 1, \text{ ó, } \Phi(x) \equiv 0$
- } foco o centro.

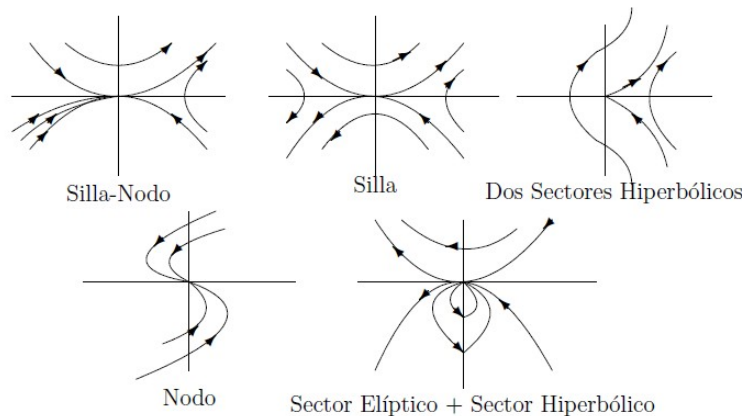


Figura 7: Retratos Fase posibles

## 2.6. Singularidades en el infinito

Usaremos la compactificación de Poincaré, ver [34], para representar las soluciones en el plano infinito de los sistemas a estudiar.

### 2.6.1. Compactificación de Poincaré

Con el fin de estudiar el comportamiento de las trayectorias de un sistema plano para  $r$  grande, y utilizamos la proyección estereográfica. En ese caso, el comportamiento de las trayectorias lejos del origen podría ser estudiado por considerando el comportamiento de las trayectorias cerca del polo norte de la esfera unitaria. La idea de analizar el comportamiento global de un sistema planar dinámico utilizando una proyección estereográfica de la esfera se debe a Bendixson [B]. La esfera, incluida la infinidad punto crítico, se le conoce como el Bendixson sphere. A mejor enfoque para estudiar el comportamiento de las trayectorias en el infinito, esto utilizan la llamada esfera de Poincaré donde proyectamos desde el centro de una esfera

$$S^2 = \{(X, Y, Z) \in R^3 | x^2 + y^2 + Z^2 = 1\}$$

en el plano tangente  $(x, y)$  a  $S^2$ , ya sea en el norte o el polo sur. Este tipo de proyección central fue introducido por Poincaré y tiene los puntos críticos en el infinito se extienden a lo largo del ecuador de la Poincaré esfera y son, por tanto, de naturaleza más simple que la infinidad de los puntos críticos en la esfera Bendixson. Sin embargo, algunos de los puntos críticos en el infinito en la esfera Poincaré todavía puede ser muy complicado en la naturaleza. Si proyectamos el hemisferio superior de  $S^2$  en  $(x, y)$  plano  $xy$ , a continuación, tenemos los

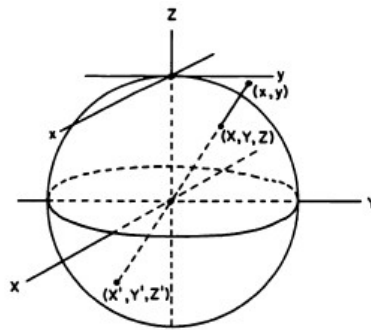


Figura 8: Retratos Fase posibles

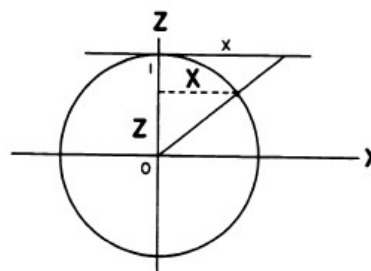


Figura 9: Retratos Fase posibles

triángulos similares mostrados en la figura anterior y definimos una ecuación en términos de  $(X, Y, Z)$  y están

dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{Z} \\ y &= \frac{Y}{Z} \end{aligned} \tag{6}$$

Del mismo modo, se deduce que las ecuaciones que definen  $(X, Y, Z)$  en términos de  $(x, y)$  vienen dados por:  $X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ ,  $Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$  y  $Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ . Estas ecuaciones definen una correspondencia uno a uno entre los puntos  $(X, Y, Z)$  en el hemisferio superior de  $S^2$  con  $Z > 0$  y los puntos  $(x, y)$  en el plano. El origen  $0 \in R^2$  corresponde al polo norte  $(0, 0, 1) \in S^2$ ; el círculo  $x^2 + y^2 = 1$  corresponden a puntos de la circunferencia  $X^2 + Y^2 = 1/2, Z = 1$  en  $S^2$ ; y puntos en el ecuador de  $S^2$  corresponden al círculo en el infinito.º "puntos en el infinito" de  $R^2$ . Cualquiera de los dos puntos antípodas  $(X, Y, Z)$  Con  $(X', Y', Z')$  en  $S^2$ , pero no en el ecuador de  $S^2$ , corresponde el mismo punto  $(x, y) \in R^2$ . Consideremos el siguiente sistema dinámico en  $R^2$

$$\dot{x} = P(x, y) \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{7}$$

Donde  $P$  y  $Q$  son funciones polinomiales de  $x$  e  $y$ , sea  $m$  el máximo grado de  $P$  y  $Q$ , entonces tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

O en la forma diferencial:

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0 \tag{8}$$

Po otro lado de 6 tenemos que:

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2} \quad dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2} \tag{9}$$

La ecuación diferencial 11 puede ser escrita de la siguiente manera

$$Q(ZdX - XdZ) - P(ZdY - YdZ)$$

donde

$$P = P(x, y) = P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \quad Q = Q(x, y) = Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \tag{10}$$

Realizando las operaciones algebraicas correspondientes y simplificando se obtiene:

$$ZQ^*dX - ZP^*dY + (YP^* - XQ^*)dZ = 0 \tag{11}$$

donde

$$P^*(X, Y, Z) = Z^m P(X/Z, Y/Z)$$

y

$$Q^*(X, 1, Z) = Z^m Q(X/Z, Y/Z)$$

Son polinomios en  $(X, Y, Z)$

Además del flujo de la esfera de Poincaré  $S^2$ , estudiaremos el comportamiento del flujo definido por (11) en el infinito; es decir estudiaremos el flujo definido por (11) en una vecindad del ecuador de  $S^2$ . El ecuador de  $S^2$  consiste en las trayectorias y puntos críticos de (11).

Es decir para  $Z = 0$  en (11) se tiene  $(YP^* - XQ^*)dZ = 0$ . Esto es para  $(YP^* - XQ^*) = 0$ , es decir tenemos trayectorias que pasan a través del punto regular sobre el ecuador de  $S^2$  y los puntos críticos de (11) sobre el ecuador de  $S^2$  cuando  $Z = 0$  son dados por la ecuación:

$$YP^* - XQ^* = 0 \tag{12}$$

Si  $P(x, Y) = P_1(x, y) + \dots + P_m(x, Y)$  y  $Q(x, Y) = Q_1(X, y) + \dots + Q_m(x, y)$ , luego para  $Z = 0$  y  $X^2 + Y^2 = 1$ . Así que para  $Z = 0$  en (12) es equivalente a:  $\cos \theta P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) - \cos \theta Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) = 0$

Esto es, los puntos críticos en el infinito son determinados por el término de mayor grado en (12), con  $r = 1$ .

**Teorema 8.** *Los puntos críticos en el infinito para un polinomio de grado  $m$  en el sistema (34) ocurre en los puntos  $(X, Y, 0)$  sobre el ecuador de la esfera de Poincaré  $S^2$  donde  $X^2 + Y^2 = 1$  y*

$$XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = 0 \tag{13}$$

O equivalentemente en la forma polar, donde  $\theta_j$  y  $\theta_j + \pi$  satisface

$$G_{m+1}(\theta) \equiv \cos \theta Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) - \text{sen } \theta P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) = 0 \tag{14}$$

Esta ecuación tiene al menos  $m + 1$  pares de raíces  $\theta_j$  y  $\theta_j + \pi$  bajo  $G_{m+1}(\theta)$  es idénticamente cero. Si  $G_{m+1}(\theta)$  no es idénticamente cero, entonces el flujo sobre el ecuador de la esfera de Poincaré en sentido contrario a las manecillas del reloj, los puntos correspondientes  $\theta$  a la forma polar, donde  $G_{m+1}(\theta) > 0$  y los puntos que van en el sentido de las manecillas del reloj  $\theta$ ,  $G_{m+1}(\theta) < 0$ .

### 3. Análisis de resultados o Resultados y análisis

#### 3.1. Sistemas Polinomiales Cuadráticos con un Punto Crítico Degenerado ( QSD)

##### 3.1.1. Una Clasificación de los QS con un Punto Crítico Degenerado.

Un sistema polinomial cuadrático es un sistema de dos ecuaciones diferenciales autónomas

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{15}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a la variable real  $t$ , además  $P$  y  $Q$  son polinomios en dos variables que son a lo más de grado dos y no ambos con grado menor o igual que uno. Denotamos por  $\mathbf{f} = (P, Q)$  el campo vectorial asociado a 15 y por  $M\mathbf{f}(x, y)$  a la matriz jacobiana de  $\Phi$  que linealiza a 15.

**Definición 5.**

$p$  es un punto crítico degenerado del sistema 15 si  $\det(D\mathbf{f}(p)) = \text{tr}D\mathbf{f}(p) = 0$  y además  $D\mathbf{f}(p) \neq 0$ .

**Lema 1.**

Un sistema cuadrático con un punto crítico degenerado es equivalentemente afín a

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P_2(x, y) \\ \dot{y} = Q_2(x, y) \end{cases} \tag{16}$$

donde  $P_2(x, y) = lx^2 + mxy + ny^2$  y  $Q_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ .

**Demostración.**

Sea el sistema cuadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{aligned}$$

y supongamos que posee un punto crítico,  $p$ , para el cual  $\det D\mathbf{f}(p) = \text{tr}D\mathbf{f}(p) = 0$  y  $D\mathbf{f}(p) \neq 0$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer el punto  $p$  está el origen. Entonces  $a_0 = b_0 = 0$  porque en un punto crítico se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0, 0) &= P(0, 0) = 0 \\ \dot{y}(0, 0) &= Q(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, se tiene que

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \tag{17}$$

y,  $\text{Det}(D\mathbf{f}(0, 0)) = 0$ , y  $\text{Traz}D\mathbf{f}(0, 0) = 0$ , así que  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ,  $a_1 + b_2 = 0$

En consecuencia se pueden presentar los siguientes tres casos:

**Caso 1.**  $a_1 = b_1 = b_2 = 0$  y  $a_2 \neq 0$ .

**Caso 2.**  $a_1 = a_2 = b_2 = 0$  y  $b_1 \neq 0$ .

**Caso 3.**  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$ ,  $b_1 \neq 0$  y  $b_2 \neq 0$ .

Analicemos caso por caso.

**Caso 1.**

$a_1 = b_1 = b_2 = 0$  y  $a_2 \neq 0$ . Luego el sistema cuadrático tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ \dot{y} = b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{cases}$$

Hagamos  $t = a_2^{-1}t_1$  como  $a_2 \neq 0$  se tiene que:

$$\frac{dx}{dt_1} = \frac{1}{a_2}(a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2)$$

$$\frac{dy}{dt_1} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{b_3}{a_2}xy + \frac{b_4}{a_2}x^2 + \frac{b_5}{a_2}y^2$$

Por lo tanto

$$\frac{dx}{dt_1} = y + \frac{a_3}{a_2}xy + \frac{a_4}{a_2}x^2 + \frac{a_5}{a_2}y^2$$

$$\frac{dy}{dt_1} = \frac{b_4}{a_2}x^2 + \frac{b_3}{a_2}xy + \frac{b_5}{a_2}y^2$$

(18)

Y de esta manera obtenemos la forma canónica 16.

**Caso 2.**

Si  $a_1 = a_2 = b_2 = 0$  y  $b_1 \neq 0$  Por lo tanto el sistema cuadrático tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ \dot{y} = b_1x + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{cases}$$

para este sistema tomemos la transformación  $x_1 = y$ ,  $y_1 = x$  y de este modo llegamos a una situación análoga a la del primer caso

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1y_1 + b_3x_1y_1 + b_4y_1^2 + b_5x_1^2 \\ \frac{dy_1}{dt} = a_3x_1y_1 + a_4y_1^2 + a_5x_1^2 \end{cases}$$

Y de esta manera obtenemos la forma canónica 16.

**Caso 3.**

Si  $a_1 \neq 0$  y  $a_2 \neq 0$  y  $b_1 \neq 0$  y  $b_2 \neq 0$  En este caso el sistema cuadrático tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ \dot{y} = b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{cases} \quad (19)$$

para este sistema tomemos la transformación  $x_1 = x$ ,  $y_1 = b_2x - a_2y$ , entonces  $y = \frac{b_2x_1 - y_1}{a_2}$   $t_1 = -t$ .

Reemplazando en (19) y realizando las operaciones correspondiente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + \left(\frac{a_3b_2}{a_2} + \frac{a_5b_2^2}{a_2^2} + a_4\right)x_1^2 + \left(-\frac{a_3}{a_2} - \frac{2b_1a_5}{a_2^2}\right)x_1y_1 + \frac{a_5}{a_2^2}y_1^2 \\ \frac{dy_1}{dt} &= (b_2a_1 - a_2b_1)x + (b_2a_2 - a_2b_2)y + (b_2a_3 - a_2b_3)xy + (b_2a_4 - a_2b_4)x^2 \\ &\quad + (b_2a_5 - a_2b_5)y^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Como  $(a_1b_2 - b_1a_2) = 0 = a_1 + b_2$  y realizando la sustitución  $t_1 = -t$ . Reemplazando en (20) se tiene la forma canónica 16.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1 + \left(\frac{a_3b_2}{a_2} + \frac{a_5b_2^2}{a_2^2} + a_4\right)x_1^2 + \left(-\frac{a_3}{a_2} - \frac{2b_1a_5}{a_2^2}\right)x_1y_1 + \frac{a_5}{a_2^2}y_1^2 \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= (b_2a_3 - a_3b_3)xy + (b_2a_4 - a_2b_4)x^2 + (b_2a_5 - a_2b_5)y^2 \end{aligned} \tag{21}$$

□

**Lema 2.** *Un sistema cuadrático con un punto crítico degenerado es equivalente, transformando la variable  $t$ , si es necesario, a una de las siguientes familias:*

- (a)  $\begin{cases} \dot{x} = y + lx^2 + ny^2 \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} \dot{x} = y + lx^2 + mxy + ny^2 & \text{con } l \neq 0 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} \dot{x} = y + lx^2 + mxy \\ \dot{y} = x^2 + bxy + cy^2 \end{cases}$

**Demostración.**

En el Lema (1) se demostró que un sistema cuadrático se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = ax^2 + bxy + cy^2 \end{cases}$$

Como  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  pueden ocurrir uno de los siguientes casos:

**Caso 1.**  $a = b = 0$  y  $c \neq 0$ .

**Caso 2.**  $a = c = 0$  y  $b \neq 0$ .

**Caso 3.**  $a \neq 0$ .

**Caso 1.**

Si  $a = b = 0$  y  $c \neq 0$



$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} &= cy^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Realizando el siguiente cambio de variables  $t = c^{-1}t_1$  en la ecuación (22) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{1}{c} (y + lx^2 + mxy + ny^2) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt_1} = y^2 \frac{c}{c} = y^2 \end{aligned} \tag{23}$$

Realizando la siguiente sustitución  $x_1 = cx + \frac{cm}{2l}y$ ,  $y_1 = y$  en la ecuación (23) y desarrollando todas las operaciones algebraicas, obtenemos el sistema (a).

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= y_1 + lx_1^2 + ny_1^2 \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= y_1^2 \end{aligned} \tag{24}$$

**Caso 2.**

Si  $a = 0 = c$  y  $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} &= bxy \end{aligned} \tag{25}$$

Hagamos  $x_1 = bx$ ,  $y_1 = by$  y sustituyendo en la ecuación (25), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + \frac{lx_1}{b} + \frac{m}{b}x_1y_1 + \frac{n}{b}y_1^2 \\ \dot{y}_1 &= by_1 = x_1y_1 \end{aligned} \tag{26}$$

Y así obtenemos (b).

**Caso 3.**

Si  $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy + cy^2 \end{aligned} \tag{27}$$

Como  $n$  es un número real puede ser cero o distinto de cero, así que analizaremos estos dos casos.

a) Si  $n = 0$ , realizamos la siguiente sustitución  $x_1 = ax$  y  $y_1 = ay$  en (27) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + lx_1^2 + mx_1y_1 \\ \dot{y}_1 &= x_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 \end{aligned} \tag{28}$$

b) Si  $n \neq 0$ , realizamos la siguiente sustitución  $x_1 = y - rx$ ,  $y_1 = y$ ; con  $r \neq 0$  y reemplazando en la ecuación (27) y realizando las operaciones algebraicas pertinentes se tiene

$$\dot{x} = ry_1 + \left(\frac{a}{r^2} + \frac{l}{r}\right)x_1^2 + \left(\frac{-2a}{r^2} - \frac{b+2+m}{r}\right)x_1y_1 + \left(\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} + c + \frac{m}{r}\right)y_1^2 \tag{29}$$

$$\dot{y} = \frac{a}{r^2}(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + \frac{b}{r}(y_1 - x_1)y_1 + cy_1^2$$

Así que

$$x_1 = -ry_1 + \frac{a+lr}{r^2}x_1^2 + \frac{(-2a-b) + (2l+m)r}{r^2}x_1y_1 + \frac{p(r)}{r^2}y_1^2 \tag{30}$$

$$y_1 = \left(\frac{a}{r^2}\right)x_1^2 + \left(\frac{-2a-br}{r^2}\right)x_1y_1 + \left(\frac{a+b+cr^2}{r^2}\right)y_1^2$$

donde  $p(r) = a + br + (c - l - m)r^2 - nr^3$  y como  $p(r)$  es un polinomio cúbico tiene al menos una raíz real, así que escogeremos la raíz real  $r$  de este polinomio en la sustitución

Por lo tanto:

$$\dot{x}_1 = -ry_1 + \left(\frac{a+lr}{r^2}\right)x_1^2 + (-2a - br + (-2l+m)r^2)x_1y_1 \tag{31}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{a}{r^2}x_1^2 + \left(\frac{-2a-br}{r^2}\right)x_1y_1 + \left(\frac{a+br+cr^2}{r^2}\right)y_1^2$$

Supongamos  $l_1 = \frac{a+lr}{r^2}$ ,  $m_1 = -2a - br + (-2l+m)r^2$ ,  $b_1 = \frac{-2a-br}{r^2}$ , y  $c_1 = \frac{a+br+cr^2}{r^2}$  reemplazando en (31) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ry_1 + l_1x_1^2 + m_1x_1y_1 \\ \dot{y}_1 &= ar^{-2}x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2 \end{aligned} \tag{32}$$

Ahora realizando la siguiente sustitución  $x = \frac{-a}{r}x_1$  y  $ay = y_1$  en (32) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \frac{l_1}{a}x_1^2 - am_1xy \\ \dot{y} &= x^2 + rb_1xy + ac_1y^2 \end{aligned} \tag{33}$$

Y así obtenemos (c). □

### 3.1.2. Estudio Cualitativo de Sistemas con un Punto Crítico Degenerado.

En esta sección realizaremos el estudio cualitativo de las diferentes sistemas equivalentes a un sistema cuadrático con un punto crítico degenerado; es decir cerca del origen analizaremos el comportamiento de las trayectorias de los  $QSD$  dados en el lema (2)

#### Lema 3.

(i) El  $(0, 0)$  es un silla-nodo, un punto silla, la unión de un sector elíptico y un sector hiperbólico ó la unión de dos sectores hiperbólicos si el QSD esta escrito en las formas (a), (b) con  $l < 0$ , (b) con  $l > 0$  ó (c), respectivamente.

(ii) La recta  $y = 0$  es invariante bajo el flujo del sistema (a) y (b) del lema 2. Además esta recta es siempre una separatriz para el sistema (b) sí, y sólo sí, ó  $l < 0$  ó  $l \geq 1/2$

**Demostración.**

(i) El Jacobiano de cada uno de los Sistemas del lema (2) son de la forma:

$$J_a(0, 0) = J_b(0, 0) = J_c(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es evidente que el Jacobiano de los sistemas del lema 2 en el punto  $(0, 0)$  tienen dos valores propios cero, así que utilizaremos el teorema 6

- Para la familia del tipo (a)

En este sistema se tiene que  $X(x, y) = x^2 + ny^2$  y  $Y(x, y) = y^2$ . Ahora se halla la solución de

$$y + x^2 + ny^2 = 0 \tag{34}$$

De esta ecuación se tiene que  $y(0) = 0$  y así que la solución de la ecuación 34 viene dada por

$$F(x) = y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k(0)}{k!} x^k$$

Por lo tanto,

$$F(x) = -x^2 + \dots$$

luego las funciones  $f$  y  $\phi$  quedan determinada por

$$f(x) = Y(x, F(x)) = x^4(1 + \dots)$$

$$\phi(x) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) (x, F(x)) = 2x(1 + \dots) \text{ Así que } a = 1, \alpha = 4, b = 2 \text{ y } \beta = 1.$$

Por lo tanto,  $(0, 0)$  es un silla-nodo, ya que  $\alpha$  es par y  $\alpha > 2\beta + 1$ .

- Para la familia del tipo (b)

En este caso las funciones  $X$  e  $Y$  quedan determinadas por

$X(x, y) = x^2 + ny^2$  y  $Y(x, y) = y^2$ ; y las funciones  $f$  y  $\phi$  son las siguientes:  $f(x) = -lx^3(1 + \dots)$  y  $\phi(x) = (2l + 1)x(1 + \dots)$ .

- $l < 0$ .

Siguiéndonos del teorema 7 y de las anotaciones anteriores se deduce que el origen es punto silla.

- $l > 0$

(0,0) es la unión de un sector elíptico y un sector hiperbólico.

- Para la familia del tipo (c)

En este caso las funciones  $X$  e  $Y$  quedan determinadas por

$X(x, y) = y + lx^2 + mxy$  y  $Y(x, y) = x^2 + bxy + cy^2$ , donde  $X(x, y) = lx^2 + mxy$  y  $Y(x, y) = x^2 + bxy + cy^2$

$$\begin{aligned} y + lx^2 + mxy &= 0 \\ x^2 + bxy + cy^2 &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

y las funciones  $f$  y  $\phi$  son las siguientes:  $f(x) = x^2(l - bx^3 - cx^4 + \dots)$  y  $\phi(x, y) = (2l + b)x(1 + \dots)$ .

En estas funciones  $a = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $b = 2l + b$  y  $\beta = 1$ . Entonces en este caso, (0, 0) tiene dos sectores hiperbólicos, porque  $\alpha$  es par y  $\alpha < 2\beta + 1$ .

(ii) Debemos analizar el comportamiento del flujo, definido por cada sistema [(a) ó (b)], sobre la recta  $y = 0$ . Es de notar, que  $\Phi(x, 0) = (x^2, 0)$  y  $\Phi(x, 0) = (lx^2, 0)$  son los flujos definidos por el sistema (a) y (b), en la recta  $y = 0$ . De aquí podemos concluir que dicha recta es siempre invariante bajo el flujo de ambos sistemas y, además; por el primer item de teorema, que ya ha sido demostrado previamente, es sabido que el origen es un punto silla-nodo y un punto silla para el sistema (a) y, (b) con  $l < 0$ . Entonces la recta  $y = 0$  es siempre una separatriz en estos casos.

Para tratar el problema de la separatriz en el sistema (b), con  $l > 0$  se hace necesario aplicar la técnica del blow-up. Al aplicar los dos blow-ups consecutivos  $x = x, y = w_1x$  y  $x = x, w_1 = wx$ ; y despreciar como factor a  $x$ , se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = lx + xw + mx^2w + nx^3w^2 \\ \dot{w} = (1 - 2l)w - 2w^2 - 2mxw^2 - 2nx^2w^3 \end{cases} \tag{36}$$

(0,0) y  $(0, \frac{(1-2l)}{2})$  son los puntos críticos de este sistema y

$$M(0, 0) = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 - 2l \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$M\left(0, \frac{(1-2l)}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -\frac{m(1-2l)^2}{2} & 2l - 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

son las matrices del sistema lineal asociado a 36 en cada uno de los puntos críticos.

Observamos que para analizar las matrices 37 y 38 se presentan los siguientes tres casos:

- **Caso 1.**  $0 < l < 1/2$

En el origen hay un nodo repulsor para el sistema lineal ya que, la matriz 37 tiene valores propios positivos. Entonces por teorema 5 podemos concluir que (0,0) es también un nodo inestable para el sistema no lineal 36.

Por otro lado, la matriz 38 tiene valores propios con signos opuestos, entonces  $(0, \frac{(1-2l)}{2})$  es un punto silla para el sistema lineal y por tanto es topológicamente una silla para el sistema 36.

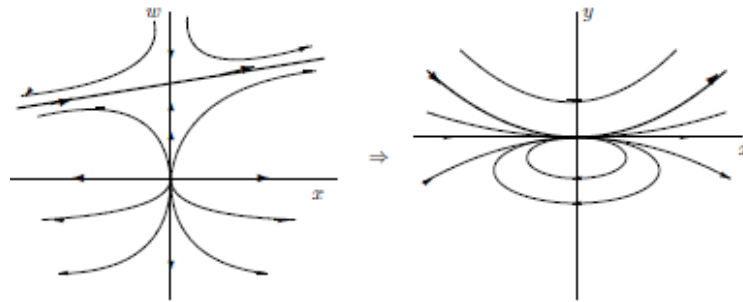


Figura 10: Silla

■ **Caso 2.**  $l = 1/2$

En este caso el sistema 36 queda expresado del siguiente modo:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1/2x + xw + mx^2w + nx^3w^2 \\ \dot{w} = -2w^2 - 2mxw^2 - 2nx^2w^3 \end{cases} \tag{39}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xw + 2mx^2w + 2nx^3w^2 \\ \dot{w} = -4w^2 - 4mxw^2 - 4nx^2w^3 \end{cases} \tag{40}$$

El único punto crítico de este sistema es el origen; y considerando la matriz 37 cuando  $l = 1/2$ , se puede notar que esta tiene un valor propio igual a cero y, en este caso aplicamos el teorema 6 para analizar el comportamiento del sistema 40 en una vecindad del origen.

Como  $g(w) = -4w^2$  entonces  $(0,0)$  es un silla-nodo.

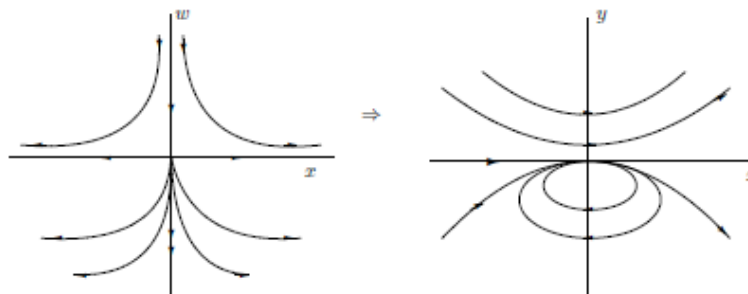


Figura 11: Silla

■ **Caso 3.**  $l > 1/2$

Al determinar los signos de los valores propios de las matrices 37 y 38 podemos concluir que el

origen es un punto silla y  $(0, \frac{(1-2l)}{2})$  es un nodo inestable para cada sistema lineal asociado a 36 en su respectivo punto. Por consiguiente, el origen es topológicamente una silla y  $(0, \frac{(1-2l)}{2})$  es un nodo inestable para el sistema no lineal 36.

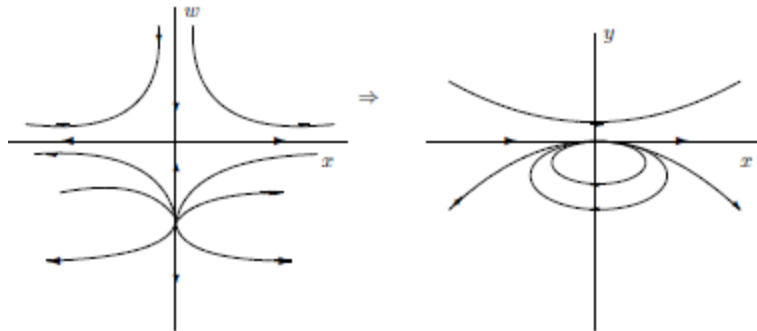


Figura 12: Silla

□

## 4. Conclusión

En este artículo se presentó un Análisis cualitativo de los sistemas cuadráticos que poseen un punto crítico degenerado, Identificando y clasificando primero a los sistemas cuadráticos con un punto crítico degenerado para facilitar su estudio y luego graficando los retratos de fase que resultaron del análisis cualitativo de estos sistemas. Se hizo uso de algunos resultados importantes sobre la teoría de los *Sistemas no Lineales*, por lo cual se incluyeron algunas definiciones y teoremas que determinan los pasos a seguir para el análisis cualitativo de cualquier sistema no lineal.

## Referencias

- [1] Grassman, J. 1987, *Asymtotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications* ( New York: Springer Verlag).
- [2] Guckeinheimer, J., y Holmes, P. 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* ( New York: Springer Verlag).
- [3] Hagedorn, P. 1982, *Nonlinear Oscillations* ( Oxford: Clarendon Press).
- [4] Perko, L. 2001, *Differential Equations and Dynamical Systems* (New York: Springer Verlag).
- [5] Dumortier, F., Llibre, J., y Artés, J. 2006, *Qualitative Theory of PLanar Differential Systems* (Berlin: Springer Verlag).

Para citar este artículo: SERJE ARIAS et all., 2015, "*Sistemas Polinomiales Cuadráticos con un Punto Crítico Degenerado*".

Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.