

Implementación del Método FDTD para la simulación de la interacción de ondas electromagnéticas con medios dieléctricos 1D

Implementation of FDTD Method for the simulation of the interation electromagnetic wave with dielectric media 1D

Larry THERAN ¹

¹ *Departamento de Física*

Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

e-mail: latheran@gmail.com

Sonia VALBUENA D ²

² *Licenciatura en Matemáticas*

Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

e-mail: svalbuena@gmail.com

Francisco RACEDO N. ³

³ *Departamento de Física*

Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

email: fran@mail.uniatlantico.edu.co

Recibido:2/09/2015 - Aceptado:19/09/2015

Resumen

El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) ha demostrado ser una herramienta útil para el análisis de los fenómenos electromagnéticos. En este trabajo se presenta una implementación eficiente del método FDTD, en la cual se modelan medios dieléctricos y su interacción con ondas electromagnéticas, se implementa la transformada Rápida de Fourier para medir reflexiones y trasmisiones de la onda en el medio dieléctrico. Se introducen unas condiciones de frontera que permiten evitar reflexiones indeseadas en los bordes del dominio computacional del problema, siendo este es un problema de evolución temporal con dominios no acotados.

Palabras claves: FDTD; Dieléctrico; FFT; condiciones de frontera absorbentes.

Abstract

The finite difference time-domain (FDTD) has proved a useful tool for the analysis of electromagnetic phenomena. This paper presents a graphical application based on MATLAB GUIDE, in which the implementation of the finite difference algorithm is shown in the time domain, to simulate the phenomenon of refraction is presented. Absorbing boundary conditions (ABC) type of perfectly matched layers (PML) will be introduced, as this is a problem of time evolution with unbounded domains.

Keywords: FDTD; Dieléctrico; FFT; absorbent boundary conditions.

1. Introducción

Para los científicos las técnicas de simulación numérica se han convertido en una herramienta indispensable, ya que permiten tener un conocimiento en profundidad de los fenómenos electromagnéticos. Casi un siglo después que Maxwell describiera la teoría electromagnética clásica en un conjunto de ecuaciones, en 1966, Keen Yee propone el primer método numérico en el dominio del tiempo que describe estas ecuaciones, llamado método de diferencias finitas dominio del tiempo (FDTD)[1]. Esta técnica consiste en calcular la solución del problema diferencial original en un conjunto discreto de puntos, es decir, se realiza una discretización de las ecuaciones de Maxwell en las dimensiones de espacio y tiempo.

Algunos problemas compuestos por placas dieléctricas pueden ser descritos en sólo una dimensión. En este caso, los materiales y los campos son uniformes en dos direcciones. Las derivadas en estas direcciones uniformes serán cero. Por convención definiremos las direcciones uniformes como los ejes x e y , esto implica que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

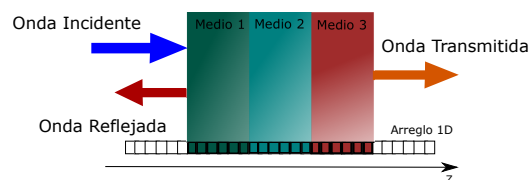


Figura 1: Problema Unidimensional

2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos y por medio de las cuales podemos demostrar que la luz es una onda electromagnética. Para un medio lineal homogéneo e isotrópico son:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \nabla \times \vec{H} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \nabla \times \vec{E} \quad (2)$$

Donde \vec{D} es la densidad de flujo eléctrico, μ es la permeabilidad magnética, ϵ es la permitividad eléctrica. Desacoplando las ecuaciones rotacionales en sus componentes obtenemos el siguiente grupo de ecuaciones

$$\frac{\partial \vec{D}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{D}_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \vec{D}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \tag{5}$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \tag{6}$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \tag{7}$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \tag{8}$$

Ahora teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ las ecuaciones anteriores se simplifican en dos modos de propagación:

- El primero de ellos es:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} = -\frac{c_0}{[\epsilon_{r_{xx}}]} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{c_0}{[\mu_{r_{yy}}]} \left(\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \right) \end{cases} \tag{9}$$

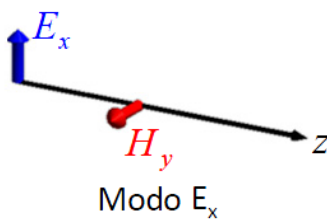


Figura 2: Modo Ex TE

- El segundo grupo en:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} = \frac{c_0}{[\epsilon_{r_{yy}}]} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{c_0}{[\mu_{r_{xx}}]} \left(\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \right) \end{cases} \tag{10}$$

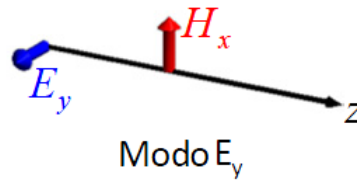


Figura 3: Modo Ey TE

3. Formulación numérica

Aunque estos modos se propagarían de forma independiente, ellos son numéricamente iguales y exhibirán el mismo comportamiento electromagnético. Por lo tanto, sólo es necesario resolver uno para el estudio. Para este trabajo se utilizó el modo E_y/H_x . Así quedan las ecuaciones de actualización para ambos modos de propagación.

- Modo E_x/H_y

$$H_y^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} = H_y^k \Big|_{t-\frac{\Delta t}{2}} - \frac{c_0 \Delta t}{\mu_{r_{yy}}^k} \frac{\tilde{E}_x^{k+1} \Big|_t - \tilde{E}_x^k \Big|_t}{\Delta z} \quad (11)$$

$$\tilde{E}_x^k \Big|_{t+\Delta t} = \tilde{E}_x^k \Big|_t - \frac{c_0 \Delta t}{\varepsilon_{r_{xx}}^k} \frac{H_y^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} - H_y^{k-1} \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta z} \quad (12)$$

- Modo E_y/H_x

$$H_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} = H_x^k \Big|_{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{c_0 \Delta t}{\mu_{r_{xx}}^k} \frac{\tilde{E}_y^{k+1} \Big|_t - \tilde{E}_y^k \Big|_t}{\Delta z} \quad (13)$$

$$\tilde{E}_y^k \Big|_{t+\Delta t} = \tilde{E}_y^k \Big|_t + \frac{c_0 \Delta t}{\varepsilon_{r_{yy}}^k} \frac{H_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} - H_x^{k-1} \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta z} \quad (14)$$

Las ecuaciones anteriores (11),(12) y (13),(14) son el núcleo del algoritmo FDTD unidimensional. Permiten que los valores de campo magnético y eléctrico se calculen por medio de un procedimiento recursivo en tiempo y espacio. Ellos pueden ser fácilmente transformados en un algoritmo de computadora, para luego, ser simulados utilizando un lenguaje de programación, en este trabajo se uso MATLAB. El algoritmo obtenido con esta técnica es explícito, ya que todos los valores de los campos actuales se calculan a partir de los valores anteriores en el tiempo..

4. Condiciones de frontera numéricas

Un problema en la frontera del mallado computacional es que debemos aplicar las ecuaciones de actualización para cada punto de la cuadrícula.

$$\tilde{H}_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \tilde{H}_x^k \Big|_{t-\frac{\Delta t}{2}} + C_{H_x}^k \left(\frac{E_y^{k+1} \Big|_t - E_y^k \Big|_t}{\Delta z} \right) \tag{15}$$

Cuando $k = N_z$ el valor de $E_y^{N_z+1}$ no existe.

$$E_y^k \Big|_{t+\Delta t} = E_y^k \Big|_t + C_{E_y}^k \left(\frac{\tilde{H}_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{H}_x^{k-1} \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta z} \right) \tag{16}$$

En este caso cuando $k = 1$, el valor de H_x^0 no existe.

La ecuación en diferencias finitas aquí requiere el conocimiento de los campos en el exterior de la red, lo cual causa un problema al momento de calcular los campos. Para corregir esto debe hacer uso de unas condiciones de frontera e impedir el error. Lo más facil de hacer es asumir que los campos fuera del dominio problema son cero, es decir, aplicar unas condiciones de contorno tipo Dirichlet.

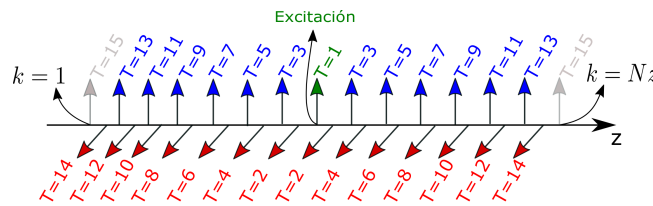


Figura 4: Problema en la frontera Unidimensional

En la figura (4) se logra apreciar el problema en cuestión, donde los valores del campos fuera del dominio computacional son desconocidos. Para solucionar el problema se modifican las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y^k \Big|_{t+\Delta t} &= \tilde{E}_y^k \Big|_t + C_{E_y}^k \left(\frac{H_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} - H_x^{k-1} \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta z} \right) && \text{para } k > 1 \\ \tilde{E}_y^k \Big|_{t+\Delta t} &= \tilde{E}_y^k \Big|_t + C_{E_y}^k \left(\frac{H_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} - 0}{\Delta z} \right) && \text{para } k = 1 \\ H_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} &= H_x^k \Big|_{t-\frac{\Delta t}{2}} + C_{H_x}^k \left(\frac{\tilde{E}_y^{k+1} \Big|_t - \tilde{E}_y^k \Big|_t}{\Delta z} \right) && \text{para } k < N_z \\ H_x^k \Big|_{t+\frac{\Delta t}{2}} &= H_x^k \Big|_{t-\frac{\Delta t}{2}} + C_{H_x}^k \left(\frac{0 - \tilde{E}_y^k \Big|_t}{\Delta z} \right) && \text{para } k = N_z \end{aligned}$$

Ya se tiene un problema bien planteado, solo falta inserta una perturbación en algún punto de la red, inicialmente se inserto una perturbación tipo gaussiana en el centro de la red, la fuente gaussiana se inserta en el punto deseado del mallado y esta se propaga radialmente, lo cual implica que en una dimensión se obtendrán dos pulsos propagándose en direcciones opuestas del eje Z.

El código implementado En matlab Es:

```
[ label=codigo1,caption=Calculo de los campos] for T = 1 : 300
```

```
for nz = 1 : Nz-1 c=( Ey(nz+1) - Ey(nz) )/dz; Hx(nz) = Hx(nz) + CHx(nz)*c; end c =( 0 - Ey(Nz) )/dz; Hx(Nz) = Hx(Nz) + CHx(Nz)*c;
```

```
c =( Hx(1) - 0 )/dz; Ey(1) = Ey(1) + CEy(1)*c; for nz = 2 : Nz c=( Hx(nz) - Hx(nz-1) )/dz; Ey(nz) = Ey(nz) + CEy(nz)*c; end
```

```
Ey(nzsrc) = Ey(nzsrc) + Escr(T);
```

```
end
```

1) CHx Es el coeficiente de la ecuación de Faraday.

2) CEy Es el coeficiente de la ecuación de Ampere.

3) $nz_src=100$ Es el punto donde se inserta la fuente de excitación

4) T Es el paso temporal

5) Escr es la fuente de excitación.

la simulación de la onda propagándose en una dimensión en el espacio libre con $N_z = 200$ es:

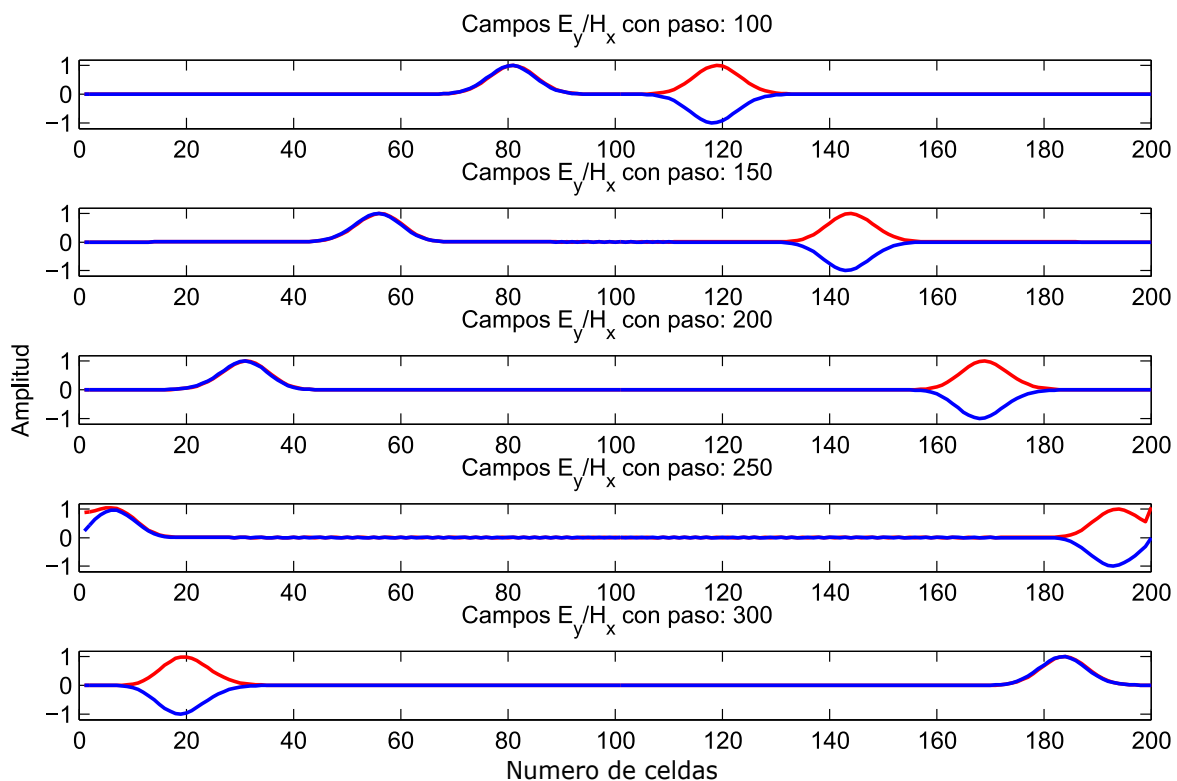


Figura 5: Propagación espacio libre

En la figura (5), se muestran soluciones obtenidas de las ecuaciones (15) y (16) para diferentes pasos temporales, el algoritmo se desarrolló en MATLAB. Se simuló un pulso gaussiano cuya longitud de onda es 532 nanómetros, el pulso de color rojo corresponde a los valores del campo magnético, mientras lo de color azul a los valores del campo eléctrico. Se utilizó una discretización espacial uniforme, con un tamaño de celda

$dz = \lambda/10$, donde λ es la longitud de onda de la señal de excitación. La discretización temporal fue elegida de acuerdo a la condición de Courant de estabilidad [2].

En la implementación anterior las condiciones de frontera de Dirichlet permitieron eliminar el error presentado al desconocer los valores de los campos fuera de la red, pero aun así, esto no es eficiente ya que como se observa en la figura (5) para 250 pasos temporales el pulso se refleja en el borde del dominio computacional y para 300 pasos temporales se observa la onda viajando hacia el centro de la red. Este tipo de resultados son inservibles para estudiar la interacción con materiales, ya que tendremos reflexiones no físicas en nuestro problema.

5. Condiciones de contorno perfectas 1D

Para dar solución al problema de las reflexiones en los límites de la red implemento unas condiciones de frontera absorbentes (ABC) conocidas como condiciones de contorno perfectas[3]. La idea principal es asignarle a la frontera el valor del campo calculado dos pasos temporales anteriores.

La aplicación de la condición de contorno perfecto PEC esta sujeta a unas restricciones que debe cumplir nuestro problema para que estas funcionen correctamente, las cuales son[4]:

1. El campo sólo se desplaza hacia el exterior a los límites
2. Los materiales en los límites son lineales, homogéneo, isótropo y no dispersivo
3. El índice de refracción en ambos límites es n_{bc}
4. Exactamente $\Delta t = \frac{n_{bc}\Delta_{min}}{2c_0}$

- Implementación en la frontera Z inicial: En el límite-z inicial, sólo se tiene que modificar la ecuación de actualización del campo E.

$$h_3 = h_2, \quad h_2 = h_1, \quad h_1 = \tilde{H}_x^1, \quad (17)$$

$$E_y^1|_{t+\Delta t} = E_y^1|_t + C_{E_y}^k \left(\frac{\tilde{H}_x^1|_{t+\frac{\Delta t}{2}} - h_3}{\Delta z} \right). \quad (18)$$

- Implementación en la frontera Z final: En el límite-z final, sólo se tiene que modificar la ecuación de actualización de campo H.

$$e_3 = e_2, \quad e_2 = e_1, \quad e_1 = E_y^{Nz}, \quad (19)$$

$$\tilde{H}_x^{Nz}|_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \tilde{H}_x^{Nz}|_{t+\frac{\Delta t}{2}} + C_{H_x}^k \left(\frac{e_3 - E_y^{Nz}|_t}{\Delta z} \right). \quad (20)$$

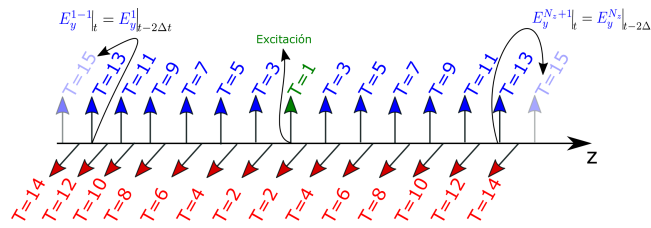


Figura 6: Corrección de valores en la frontera

En la figura (6) se ilustra la solución del problema en el borde del mallado donde se le asigna el valor del campo en dos pasos temporales anteriores a los valores de campos no calculado en el bucle principal.

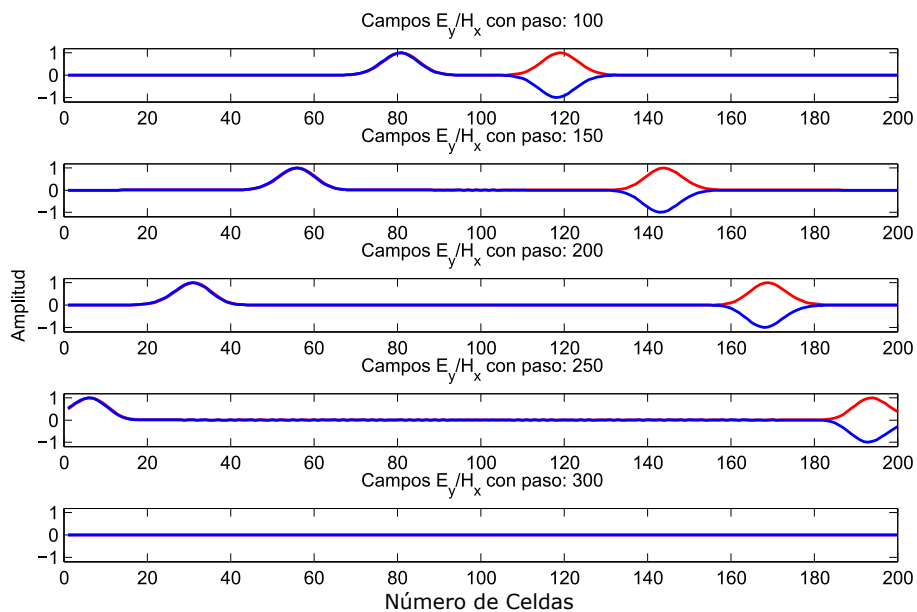


Figura 7: Implementación PEC

La figura (7) muestra la onda propagándose con las mismas condiciones que en la figura (5), pero en este caso se tuvo en cuenta las condiciones de frontera PEC, Se observa que para 250 pasos temporales que la onda incide sobre el borde del red pero en este caso no es reflejada hacia el centro de la red, como se puede apreciar para 300 pasos temporales donde la onda no esta en el dominio del problema, aun así, la implementación no es eficiente para estudiar problemas de reflexiones y trasmisiones en medios, ya que se tienen dos pulsos propagándose en direcciones opuestas debido a que la fuente de excitación es puntual y se propaga en todas las direcciones de la red.

6. Calculo de la Reflectancia y la tramitancia

Para calcular reflectacia y tramitancia en el dominio del problema, se guardan los valores de los campos tomando como referencia los puntos de la red donde se desea calcular dichos parámetros, es decir, se colocan unas pantallas virtuales que miden la cantidad del pulso que pasa sobre ellas en un determinado tiempo.

La figure (8) muestra donde se calculan los valores de reflectacia y tramitancia, se escogieron los limites de la red dado que es donde solo pasan las ondas que ya han interactuado con el material y han sido reflejas o

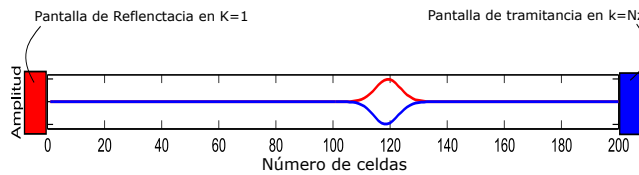


Figura 8: Ubicacion de las pantallas virtuales

transmitidas. Todos los resultados de la simulación se producen directamente en el dominio del tiempo. Por lo tanto, la señal electromagnética resultante se puede observar en todo el espectro de frecuencias con una sola transformada de Fourier de la señal de dominio de tiempo. Esta característica es muy útil para la observación de las frecuencias de resonancia.

6.0.1. Transformada da Fourier

La manera más fácil, para calcular una transformada de Fourier es llevar a cabo una simulación y registrar el campo deseado como una función de tiempo. Una vez finalizada la simulación, estas funciones pueden ser llevadas al dominio de la frecuencia con una transformada rápida de Fourier usando (FFT)[1].

6.0.2. Transformada Rapida de Fourier

La transformada estándar de Fourier esta definida como:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt \tag{21}$$

Si $f(t)$ es conocido solo en puntos discretos, la transformada de Fourier debe ser aproximada numéricamente como:

$$F(f) \cong \sum_{m=1}^M f(m\Delta t) e^{-i2\pi f m \Delta t} \Delta t \tag{22}$$

Donde M es el número total de pasos de tiempo y m es el paso de tiempo entero. Esto se puede escribir en una forma ligeramente diferente.

$$F(f) \cong \Delta t \sum_{m=1}^M (e^{-i2\pi f m \Delta t})^m \cdot f(m\Delta t) \tag{23}$$

En donde $f(m\Delta t)$ se remplazo por los valores de los campos en cada una de las pantallas, este valor se va calculando en un ciclo for dentro del bucle principal.

[label=codigo1,caption=Calculo FFT] for nf = 1 : NFREC REF(nf) = REF(nf) + (K(nf)^T) * Ey(1); TRN(nf) = TRN(nf) + (K(nf)^T) * Ey(Nz); SRC(nf) = SRC(nf) + (K(nf)^T) * Escr(T); end

- 1) NFREC=1000 es el número de particiones para la frecuencia Máxima.
- 2) T es el paso temporal.

3) $K(nf) = (e^{-i2\pi f m \Delta t})^m$

4) $E_y = f(m \Delta t)$

5) Escr es la fuente de excitación.

Luego se normalizaron los valores de reflectancia y tramitancia con respecto a la fuente, para así, tener un patrón de referencia y estudiar la conservación de la energía.

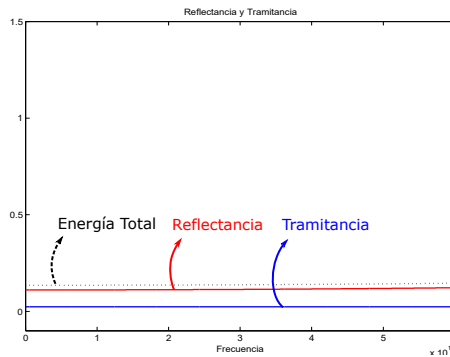


Figura 9: Gráfica de Reflectancia y tramitancia

De la implementación de la trasformada se obtubo la figura (9) en el cual se muestra en el dominio de la frecuencia, el valor de la tramitancia en azul y el valor de la reflectancia en rojo y ademas una linea punteada que es la suma de estos dos y representa la energía total del sitema.

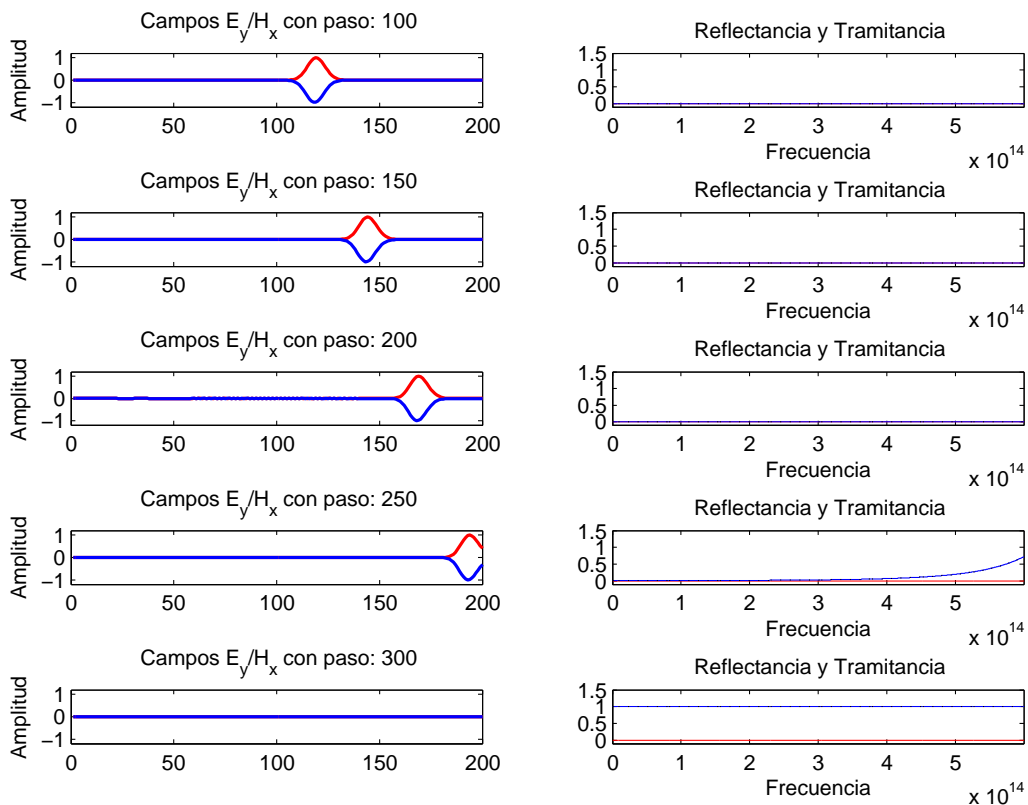


Figura 10: Reflectancia y Tramitancia

Junto a cada gráfico de propagación de la figura(10) se encuentre el gráfico de transmitancia y reflectancia. En este caso no existen materiales que interactuen con la onda, lo cual genera una propagación libre y con cero reflexiones. Además a 250 pasos temporales cuando la onda comienza a incidir sobre el borde de la red, se observa cómo el valor de la transmitancia empieza a aumentar, luego para 300 pasos temporales la onda ya a pasado en su totalidad y el valor de la transmitancia se encuentra en 1 y la reflectancia en cero, lo cual indica que la onda se transmitió en su totalidad. Ahora que el algoritmo esta completamente optimizado, El siguiente paso fue introducir materiales dieléctricos.

7. Medios Dieléctricos

En general, los materiales pueden ser dieléctrico y conductor, al mismo tiempo, lo que significa que en la naturaleza es imposible tener conductores perfectos eléctricos (PEC) o dieléctricos perfectos. Sólo después de aproximaciones, es posible dividir materiales en buenos conductores y dieléctricos. Inicialmente se considero la interacción con materiales dieléctricos sin pérdidas, lo cual implica que la energía en nuestro dominio de simulación se debe conservar ya que no existe ningún tipo de absorbanca en el sistema.

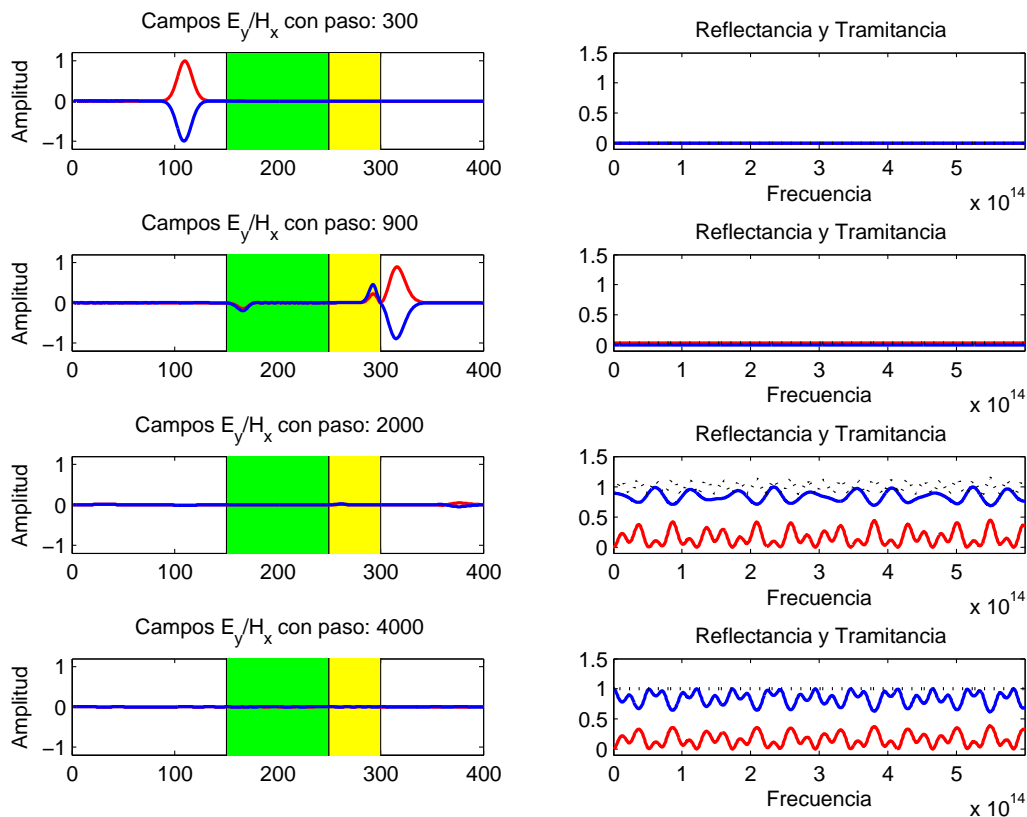


Figura 11: Medios Dieléctricos

En la figura (11) se presenta un pulso Gaussiano de longitud de onda $\lambda = 532$ nanómetros que interacciona con dos medios dieléctricos sin pérdidas. Se observo que parte de la onda se reflejo y otra parte se transmitio al incidir sobre cada medio lo cual se puede apreciar en la grafica de transmitancia y reflectancia en donde para 900 pasos temporales se tiene una pequeña reflexión de la onda, a 2000 pasos temporales gran parte de la onda ya no se encuentra en el sistema y se ve como la energía total tiene a ser constante, por ultimo para 4000 pasos

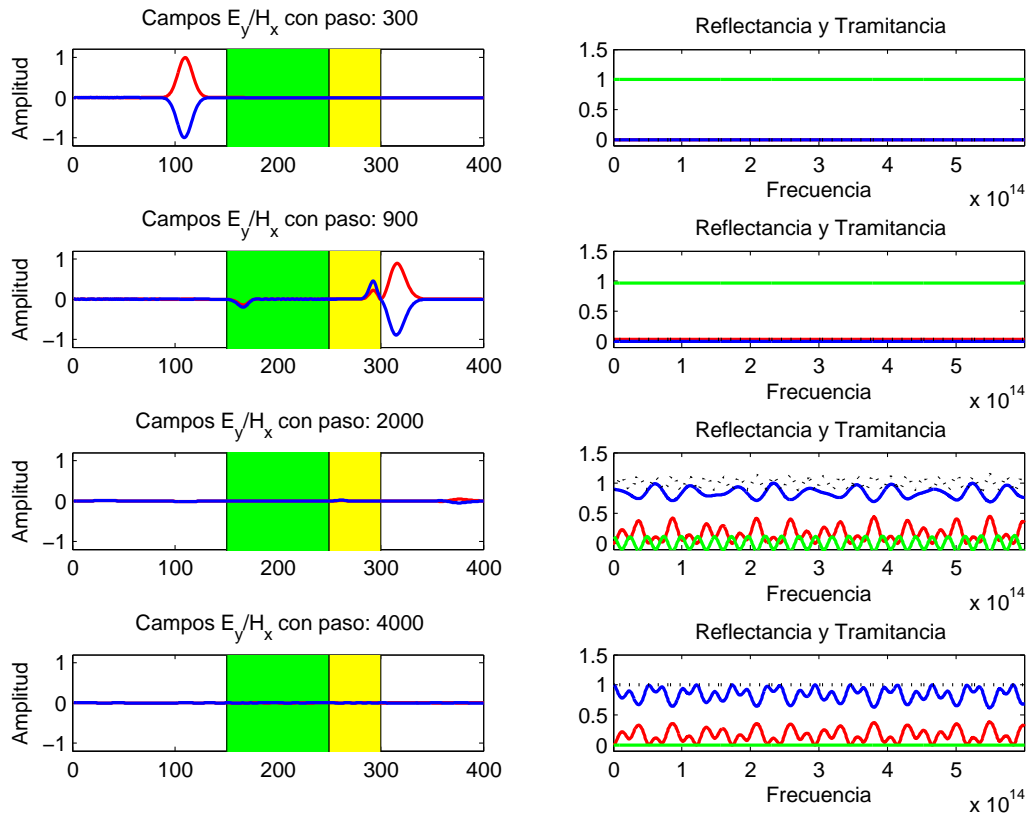


Figura 12: Medios dieléctricos

temporales la energía total es constante lo que implica que la energía del sistema se conserve.

En la figura (12) la línea verde hace referencia a las pérdidas en el sistema, como se ve al final de la simulación, esta línea tiende a cero, para el número de pasos temporales en esta simulación aun quedo el 0,003 % de la onda inmersa en el material dieléctrico. Para que este valor sea cero el número de pasos temporales debe ser lo suficientemente grande.

8. Conclusiones

Con el simulador obtenido de la implementación unidimensional, se tuvieron en cuenta las condiciones de frontera PEC, que permitieron evitar reflexiones en el borde de la red, evitando así datos espurios en el dominio computacional. Con el algoritmo ya optimizado, se logro realizar un estudio de las reflexiones causadas por la incidencia de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos, se implementó la transformada Rápida de Fourier, de tal manera se midieron las pérdidas de material que presentan conductividades, permitiendo así caracterizar las pérdidas de la onda incidente.

Referencias

- [1] A. TAFLOVE, S. HAGNESS (2005) *Computational Electrodynamics the finite-difference time-domain method*. Artech House, Boston, London.
- [2] DENNIS M. SULLIVAN (2000) "Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method". *IEEE PRESS*.
- [3] Valéria de Magalhaes Iório. *EDP um curso de graduacao*. Instituto de matemática pura y aplicada IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [4] Moysey Brio, Aramais Zakharian & Gary M. Webb. *Numerical Time-Dependent Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. C.K Chui, Stanford University, 2010.
- [5] Univ. de Extremadura. *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, Dpto. de Matemáticas. Badajoz-España, Mayo 2013. [Documento en línea]. <http://matematicas.unex.es/ricarfr/EcDiferenciales/LibroEDlat.pdf>.
- [6] Ignacio Gracia Rivas & Narciso Román Roy. *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, Departamento de de Matemática Aplicada IV, Barcelona España, Octubre 2008. [Documento en línea]. <http://www-ma4.upc.edu/nrr/docs/edteor.pdf>.

Para citar este artículo: Larry THERAN et all., 2015, "Implementación del Método FDTD para la simulación de la interacción de ondas electromagnéticas con medios dieléctricos 1D".

Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:

<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.