UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 2 (2015)

Revista del programa del matemáticas (2015) 48-56

Suma sucesiva

Successive addition

Jhon Eider RAMÍREZ LÓPEZ[1]
[1] *IER Monseñor Escobar Vélez, San Juan de Uraba - Antioquia - Colombia*
email: jhonralo06@hotmail.com

José Luis GORROSTOLA NADAD[2]
[2] *I E la Salle, Montería - Córdoba - Colombia*
email: matricesnaturales@gmail.com

Recibido:24/10/2015 - Aceptado:10/11/2015

Resumen

La suma sucesiva o raíz digital es la relación matemática que permite colapsar o disminuir un número natural a una sola cifra, utilizando como herramienta la operación suma de forma reiterativa o sucesiva; en el siguiente documento se propone una forma de definir matemáticamente dicha relación desde los parámetros de la matriz natural, es decir, se plantea una escritura para tal relación con base en la estructura de columnas de la matriz. Dicha representación permite el explorar y estudiar un sinnúmero de propiedades que giran alrededor de la suma sucesiva.

Palabras claves: Función parte entera, Matriz, Números naturales, Suma sucesiva, Raíz digital.

Abstract

Successive addition or digital root is a mathematical relationship that allows to collapse or reduce a natural number to a single digit, by using the addition operation iteratively or successively as a tool; in the following document it is proposed a way to define mathematically this relationship from the parameters of the natural matrix, that is, a writing way for such relationship based on the structure of columns in the matrix. This representation allows to explore and to study a countless number of properties that orbit the successive addition relationship.

Keywords: Floor function, Natural numbers, Matrix, Successive addition, Digital root.

1. Introducción

Usualmente al estudiar la teoría de matrices, se observan disposiciones numéricas que pueden estar representando algún tipo de eventos de la cotidianidad (sistemas de ecuaciones) o que por el contrario son arreglos caprichosos que se construyen con el fin de estudiar las diversas propiedades y dinamismos que ofrece la teoría de matrices para la solución de sistemas de ecuaciones [4,5]. El trabajar con matrices cuyas componentes sean números naturales y precisamente se encuentren en su orden no es rutinario, pues se asumen, a simple vista, como triviales. Estas matrices permiten no solo el ser utilizadas como un simple elemento algebraico, si no, que abren la posibilidad desde su punto estructural el facilitar y estudiar la función suma sucesiva, o raíz digital, definirla, escribirla y analizarla.

2. Contenido

$\wr\lambda\wr = x; \quad con \quad \lambda \in N \quad y \quad x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Relación poco estudiada en las aulas como elemento matemático formal en el cual ella sea el eje principal. La suma sucesiva o raíz digital es aquella función que a manera de dialogo permite el colapsar un numero natural a algún $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ solo utilizando dicho número y la suma como eje principal; estudiando los números naturales a partir del número 1. Es de tener en cuenta que la notación $\wr\lambda\wr$ indica que al número que se encuentra en el interior de los dos símbolos en forma de culebrita, en este caso λ, se le sumaran sus dígitos o cifras cuantas veces sea necesario, hasta encontrar un elemento del conjunto { 1,2,3,4,5,6,7,8,9 } [6]. Ejemplo:

$$\wr 10 \wr = \wr 1+0 \wr = \wr 1 \wr = 1$$

$$\wr 8997 \wr = \wr 8+9+9+7 \wr = \wr 3+3 \wr = \wr 6 \wr = 6$$

$$\wr 72 \wr = \wr 7+2 \wr = \wr 9 \wr = 9$$

$$\wr 9999 \wr = \wr 9+9+9+9 \wr = \wr 2+7 \wr = \wr 9 \wr = 9$$

Bajo esta relación podemos notar que:

$$\begin{array}{ccccccc}
\wr 1 \wr = 1 & \wr 2 \wr = 2 & \wr 3 \wr = 3 & . & \wr 7 \wr = 7 & \wr 8 \wr = 8 & \wr 9 \wr = 9 \\
\wr 10 \wr = 1 & \wr 11 \wr = 2 & \wr 12 \wr = 3 & . & \wr 16 \wr = 7 & \wr 17 \wr = 8 & \wr 18 \wr = 9 \\
\wr 19 \wr = 1 & \wr 20 \wr = 2 & \wr 21 \wr = 3 & . & \wr 25 \wr = 7 & \wr 26 \wr = 8 & \wr 27 \wr = 9 \\
\wr 28 \wr = 1 & \wr 29 \wr = 2 & \wr 30 \wr = 3 & . & \wr 34 \wr = 7 & \wr 35 \wr = 8 & \wr 36 \wr = 9 \\
\wr 37 \wr = 1 & \wr 38 \wr = 2 & \wr 39 \wr = 3 & . & \wr 43 \wr = 7 & \wr 44 \wr = 8 & \wr 45 \wr = 9 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Se podría seguir calculando sumas sucesivas hacia el infinito y obtener los mismos resultados, es decir, solo basta con ordenar los números naturales de la siguiente forma matricial. Ordenamiento bajo parámetros de suma sucesiva

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz de números naturales, denominada dentro del conjunto de las llamadas matrices naturales, como matriz guía (MG) [9].

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 39 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 \\ 55 & 56 & 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 \\ 64 & 65 & 66 & 67 & 68 & 69 & 70 & 71 & 72 \\ 73 & 74 & 75 & 76 & 77 & 78 & 79 & 80 & 81 \end{bmatrix}$$

La suma sucesiva ha sido trabajada en su forma elemental por otros autores en revistas de entretenimiento y en trabajos de mayor profundidad, en los cuales se le da el nombre de raíz digital o suma de dígitos [7]. Entre estas producciones se resaltan los trabajos del filipino Kardi Teknomo quien aplica la teoría de la suma sucesiva o raíz digital para solucionar problemas de cálculo con números que representan grandes cantidades, casos en los que módulo n presentó dificultades en el ámbito de la programación y la informática [11]. A diferencia de otros trabajos el estudio en cuestión se hace desde la matemática formal y no constituye una propuesta de aplicación teórica en un área específica del conocimiento como lo hace el profesor Teknomo; constituye una fuente concebida desde el rigor de los teoremas, corolarios, demostraciones, entre otros, susceptible de aplicación tanto dentro de las matemáticas como en contextos diferentes.

A continuación se dan los criterios que debe cumplir una matriz para ser natural.

Matriz natural (MN). Dada una matriz, es natural si cumple con las siguientes condiciones [8]:

- Todas sus componentes son números naturales.
- Cada componente es única dentro de este arreglo (no se repiten componentes).
- El elemento 1 (primer número natural) se encuentra ubicado en la primera fila, primera columna
- La primera fila debe de estar conformada por los k primeros números naturales. Donde k corresponde al número de columnas que posee la matriz.

- La segunda fila poseerá el siguiente de k, como primera componente y sus demás componentes en el orden corriente de los números naturales, leídas de izquierda a derecha a partir de dicha componente (k+1), análogamente son construidas las demás filas de dicha matriz.

Definición 2.1. *Una matriz $N = [a_{ij}]_{mxn}$ es natural cuando cualquiera de sus componentes se puede expresar como:*

$$a_{ij} = k(i-1) + j \quad [10]$$

Ejemplo 2.2. *Determinar el número que se encuentra ubicado en la fila 2 y columna 11 en una matriz natural de 12 columnas*

$$a_{12} = 12(2-1) + 11 = 12 + 11 = 23$$

Teorema 2.3. *(la fila en una matriz natural). Dada una matriz natural $N = [a_{ij}]_{mxn}$, si se representa cualquiera de sus componentes a_{ij} por λ, entonces el número que representa la fila en la que se encuentra λ dentro de la matriz natural de k columnas, está dada por [9]:*

$i = [|(\lambda + k)/k|]$ En caso que λ no sea múltiplo de k

$i = \lambda/k$ En caso que λ es múltiplo de k

Demostración

Sabemos que $\lambda = k(i-1) + j$ (definición de matriz natural)

$\lambda - j = k(i-1)$

$i = ((\lambda - j)/k) + 1$

$i = (\lambda + k - j)/k$

$i = ((\lambda + k)/k) - (j/k)$

Por tanto

$i + (j/k) = (\lambda + k)/k$

Ahora

$i \leq i + (j/k) < i + 1$ (ya que $i, j, k \in N$)

Luego

$i \leq (\lambda + k)/k < i + 1$

Luego por definición de la función parte entera [8] se tiene que

$i = [|(\lambda + k)/k|]$

Es de tener en cuenta que el máximo valor que puede tomar j es precisamente k, y cuando λ es múltiplo de k, se tiene que $j = k$.

Teorema 2.4. *(la columna en una matriz natural). Dada una matriz natural $N = [a_{ij}]_{m \times n}$, si se representa a cualquiera de sus componentes a_{ij} por λ, el número que representa la columna en la que se encuentra λ dentro de la matriz natural de k columnas, está dada por [9]:*

$j = [|(\lambda + k)/k|]$ *En caso que* λ *no sea múltiplo de* k

$j = k$ *En caso que* λ *sea múltiplo de* k

Demostración

Se sabe que

$\lambda = k(i - 1) + j$ *(definición de matriz natural)*

Luego

$j = \lambda - k(i - 1)$

$j = \lambda - k([|(\lambda + k)/k|] - 1)$ *remplazando* i *(fila)*

$j = \lambda - k([|(\lambda/k) + (k/k)|] - 1)$

$j = \lambda - k([|(\lambda/k) + 1|] - 1)$

$j = \lambda - k([|\lambda/k|] + [|1|] - 1)$

$j = \lambda - k([|(\lambda/k|] + 1 - 1)$

$j = \lambda - k([|\lambda/k|])$

Y cuando λ *es múltiplo de* k*, se tiene que* $j = k$

Ejemplo 2.5. *Para* $\lambda = 46$ *en la siguiente matriz natural, determinar la respectiva columna a la que pertenece* λ*.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\ 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 & 58 & 59 & 60 \end{bmatrix}$$

$j = \lambda - k[|\lambda/k|]$

$= 46 - 12[|46/12|]$

$= 46 - 12[|3,83|]$

$= 46 - 12(3)$

$= 46 - 36$

$= 10$

3. Definición recursiva de la suma sucesiva

Definición 3.1. $\forall \lambda \in N, \wr\lambda\wr$ *esta dada por*

$\wr\lambda\wr = \lambda - 9[|\lambda/9|]$ *En caso que* λ *no sea múltiplo de 9*

$\wr\lambda\wr = 9$ *En caso que* λ *sea múltiplo de 9 [10]*

es decir, la columna es la suma sucesiva para esta matriz en particular (matriz de nueve columnas o MG).

Ejemplo 3.2. *Calcular la suma sucesiva de* $\lambda = 39$

$\wr 39\wr = 39 - 9[|39/9|]$

$= 39 - 9[|4,33|]$

$= 39 - 9(4)$

$= 39 - 36$

$= 3$

Y efectivamente la suma sucesiva de 39 es 3, ya que

$\wr 39\wr = \wr 3 + 9\wr = \wr 12\wr = \wr 3\wr = 3$

Teniendo en cuenta lo anterior se puede estudiar algunas de las propiedades que presenta la suma sucesiva

Teorema 3.3. $\forall\lambda \in N$, $\wr\lambda\wr \leq \lambda$ *[6]*

Demostración

Se sabe que $-9[|\lambda/9|] \leq 0$

Aplicando la propiedad uniforme de las desigualdades se tiene que

$\lambda - 9[|\lambda/9|] \leq \lambda$

Por tanto

$\wr\lambda\wr \leq \lambda, \forall\lambda \in N$ *(Por definición recursiva de suma sucesiva)*

Teorema 3.4. *(desigualdad triangular de la suma sucesiva)* $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in N$, *se cumple que*

$\wr\lambda_1 + \lambda_2\wr \leq \wr\lambda_1\wr + \wr\lambda_2\wr$

Demostración

Sabemos que

$[|(\lambda_1 + \lambda_2)/9|] \leq [|\lambda_1/9|] + [|\lambda_2/9|]$

Por tanto multiplicando por -1 ambos miembros de esta desigualdad obtendremos que

$-[|(\lambda_1 + \lambda_2)/9|] \leq -[|\lambda_1/9|] - [|\lambda_2/9|]$

Luego

$-9[|(\lambda_1 + \lambda_2)/9|] \leq -9[|\lambda_1/9|] - 9[|\lambda_2/9|]$

Por último se suma $\lambda_1 + \lambda_2$ *en ambos miembros de la desigualdad para finalmente obtener*

$(\lambda_1 + \lambda_2) - 9[|(\lambda_1 + \lambda_2)/9|] \leq (\lambda_1 + \lambda_2) - 9[|\lambda_1/9|] - 9[|\lambda_2/9|]$

$(\lambda_1 + \lambda_2) - 9[|(\lambda_1 + \lambda_2)/9|] \leq \lambda_1 - 9[|\lambda_1/9|] + \lambda_2 - 9[|\lambda_2/9|]$

Lo que demuestra que

$\wr\lambda_1 + \lambda_2\wr \leq \wr\lambda_1 \wr + \wr \lambda_2\wr$

Teorema 3.5. *(Periodicidad de la suma sucesiva)* $\forall\lambda, \phi \in N$*, se cumple que* $\wr\lambda + 9\phi\wr = \wr\lambda\wr$

Demostración

$\wr\lambda + 9\phi\wr = \lambda + 9\phi - 9[|(\lambda + 9\phi)/9|]$

$= \lambda + 9\phi - 9[|\lambda/9|] - 9\phi$

$= \lambda - 9[|\lambda/9|]$

$= \wr\lambda\wr$

Ejemplo 3.6. *Tomemos* $\lambda = 123$ *y* $\phi = 1000$.

$\wr 123 + 9\phi\wr = \wr 123 + 9(1000)\wr$

$= \wr 123 + 9000\wr$

$= \wr 9123\wr$

$= \wr 9 + 1 + 2 + 3\wr$

$= \wr 15\wr$

$= \wr 6\wr$

$= 6$

Ahora determinemos por medio de la suma sucesiva

$\wr 123\wr = \wr 1 + 2 + 3\wr = \wr 6\wr = 6$

4. La suma sucesiva y algunas de sus propiedades

Es de tener en cuenta, que de forma paralela a la suma se deducen algunas propiedades para el producto, con presencia de la suma sucesiva como operación principal. A continuación se mostraran a manera de corolarios algunas de las posibles deducciones que se pueden obtener en el ámbito de la suma sucesiva, los cuales de una forma respetuosa quedan abiertos como ejercicio al lector.

Colorario 4.1. $\forall\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in N$*, se cumple que*

$\wr \sum_{i=1}^{k} \wr\lambda_i \wr \wr = \wr \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\wr$

Colorario 4.2. $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in N$*, se tiene que*

$\wr\lambda_1 + \lambda_2\wr = \wr\lambda_2 + \lambda_1\wr$

Colorario 4.3. $\forall\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in N$*, se cumple que*

$\wr \wr \lambda_1 + \lambda_2 \wr + \lambda_3\wr = \wr\lambda_1 + \wr\lambda_2 + \lambda_3 \wr \wr$

Colorario 4.4. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in N$, *se cumple que*

$\wr \lambda_1 + \lambda_2 \wr \leq \lambda_1 + \lambda_2$

Colorario 4.5. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in N$, *se cumple que*

$\wr \lambda_1 \times \lambda_2 \wr \leq \lambda_1 \times \lambda_2$

Colorario 4.6. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in N$, *se cumple que*

$\wr \lambda_1 \times \lambda_2 \wr = \wr \lambda_2 \times \lambda_1 \wr$

Colorario 4.7. $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in N$, *se cumple que*

$\wr (\lambda_1 \times \lambda_2) \times \lambda_3 \wr = \wr \lambda_1 \times (\lambda_2 \times \lambda_3) \wr$

Colorario 4.8. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in N$, *se cumple que*

$\wr \lambda_1 \times \lambda_2 \wr = \wr \wr \lambda_1 \wr \times \wr \lambda_2 \wr \wr$

Colorario 4.9. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in N$, *con* $c \in N$

$\wr c \wr \lambda_1 + \lambda_2 \wr \wr = \wr c\lambda_1 + c\lambda_2 \wr$

Colorario 4.10. $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in N$, *con y* $n \in N$, *se cumple que*

$\wr \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \wr \leq \sum_{i=1}^{k} \wr \lambda_i \wr \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$

Colorario 4.11. $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in N$, *con y* $k \in N$, *se cumple que*

$\wr \prod_{i=1}^{n} \wr \lambda_i \wr \wr = \wr \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \wr$

Colorario 4.12. $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in N$, *con y* $n \in N$, $k \in N$ *se cumple que*

$\wr \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \wr \leq \prod_{i=1}^{n} \wr \lambda_i \wr \leq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

5. Conclusiones

La matriz natural permite expresar la suma sucesiva o raíz digital por medio de su composición, situación que proporciona el análisis y estudio de una diversidad de relaciones y propiedades numéricas en su rango de acción.

La teoría de progresiones brinda un camino que permite la validación y contrastación de las fórmulas que involucran la función parte entera dentro del contexto de la suma sucesiva como tal.

Agradecimientos

Primitivo Belén Acosta-Humánez; por motivarnos no solo a través de sus primeros trabajos [1], [2] y [3] sino también por empeñarse en que este proyecto salga adelante.

Hugo Ramón Pérez Carrascal

Antonio María Anaya Bru

Israel Ariza Daza

Eulises Ramírez

A nuestros padres Harvey, María, Javier y Flora

A nuestras esposas Edilsa y María

Referencias

[1] P.B. Acosta-Humánez, *La Operación Pegamiento y el Cuadrado de Números Naturales*. Civilizar, Bogotá 2003.

[2] P.B. Acosta-Humánez, *Aprenda Jugando y Juegue Aprendiendo: Matemáticas Elementales*. Primy Math Ediciones, Bogotá 1998

[3] P.B. Acosta-Humánez, *Ley Costeana* memorias del Primer Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas, Popayán 1991. F.

[4] F. Ayres, *Algebra Moderna*. México: McGraw-Hill,1989.

[5] J. Fraleigh. *Algebra Abstracta*. Wilmington, Delaware, E.U.A: Addison Wesley Iberoamérica, S.A, 1987.

[6] J.L. Gorrostola, *Matrices Naturales y Sumas Sucesivas*, V congreso nacional de estudiantes de matemáticas ACEM, universidad de Córdoba Montería, 1998.

[7] P.R. Hernádez V, *Sobre la raíz digital de los números primos*, Revista Digital Matemáticas, Educación e Internet, Vol. 10, No 1. 2009, http:www.cidse.itcr.ac.cr-revistamate

[8] L. Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica*, 6aEd. México: Harla, 1992, pp. 58-60.

[9] J.E. Ramírez y J. L. Gorrostola, *Matrices Cabalísticas*, IV congreso nacional de estudiantes de matemáticas ACEM universidad nacional de Colombia sede Medellín, 1997.

[10] J.E. Ramírez y J. L. Gorrostola *Matrices Naturales*, X encuentro internacional de matemáticas EIMAT Universidad de Atlántico Barranquilla, 2014.

[11] K. Teknomo, *What is Digital Root*, http:people.revoledu.com-kardi-copyright.html

Para citar este articulo: RAMÍREZ LÓPEZ J y GORROSTOLA NADAD J., 2015, *"Suma sucesiva"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.