UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 1 (2015)

Revista del programa del matemáticas (2015) Pag. 99-105

Matemática experimental: uso de Geogebra para resolver un problema de razón de cambio

Experimental mathematics: using Geogebra for solving a problem of rate of change

Cindy MORGADO[1]
[1]*Universidad de Santander - Bucaramanga-Colombia*
e-mail: nathalia.morgado@udes.edu.co

David BERRIO[2]
[2]*Universidad de Santander - Bucaramanga-Colombia*
e-mail: jesus_berrio14@hotmail.com

Recibido:10/05/2015 - Aceptado:02/06/2015

Resumen

En este artículo se presenta el diseño y la experimentación de un problema clásico de cálculo diferencial, el cual es planteado en el aula de clase a estudiantes de los programas de ingeniería de la Universidad de Santander, Colombia. Mediante una práctica de la matemática experimental, utilizando el software geometría dinámica Geogebra se pretende determinar la solución del problema, cuyo objetivo principal es favorecer los procesos de visualización para contextualizar el problema de razón de cambio y convertirlo en un problema concreto, asequible y palpable por parte del estudiantado.

Palabras claves: Razón de cambio, matemática experimental, software de geometría dinámica, Geogebra.

Abstract

This paper describes the design and experimentation of a classic problem of differential calculus, which is proposed to students in the engineering classroom at the University of Santander, Bucaramanga, Colombia. Through a practice of experimental mathematics, using the dynamic geometry software, Geogebra, we want to determine the solution of the problem, whose main objective is promote the processes of visualization to contextualize the problem of rate of change and turn it into a concrete, affordable and palpable problem the student.

Keywords: Rate of change, experimental mathematics, dynamic geometry software, Geogebra

---

1. Introducción

En este año se cumple 39 años de la primera demostración por computador del famoso teorema de los cuatro colores; es decir, siempre es posible colorear un mapa con cuatro colores de modo que dos países limítrofes tengan asignado distinto color (Appel & Haken, 1977; Appel, Haken & Koch, 1977, citado por Jacovkis, 2001) las demostraciones se derivan en la comprobación total de las posibilidades mediante un software de computador, lo cual causo un revuelo increíble ya que muchos matemáticos dijeron que esto no era una demostración, sin embargo Thomas (1998) señala:

"Se puede argumentar que nuestra -demostración- no es una demostración en el sentido tradicional, porque contiene pasos que los humanos nunca podrán verificar. (...) Concedemos, sin embargo, que verificar un programa de ordenador es mucho más difícil que comprobar una demostración matemática de la misma longitud".

La aparición de ordenadores con gran capacidad de almacenamiento, cálculos rapidísimos y diseño gráfico de gran resolución ha impulsado cambios tan profundos que ha llegado a ser posible utilizar un ordenador como un instrumento experimental Banegas (2007). En el siglo XX gracias al computador se ha retornado a la observación y la experimentación que se tenía antes de Euclides en el quehacer matemático. Como es sabido Euclides fue el primero que organizo el conocimiento según axiomas, definiciones, postulados y teoremas, y todavía se expone el conocimiento de esta manera. Si conocemos los axiomas, las definiciones y los postulados podemos deducir los teoremas, y con los teoremas podemos resolver problemas. Al matemático le interesa asegurarse que cada vez que utiliza un teorema se haya deducido de los axiomas, definiciones y postulados, sino lo han deducido de esta manera no los utiliza. Esta forma de organización del conocimiento tiene dos ventajas:

1. Economía: Las bases que necesito son pocas para crear todo.
2. Seguridad: En qué sentido seguridad, " yo no utilizó algo si no lo he podido deducir de axiomas, definiciones y postulados". "Si demuestro el teorema lo puedo utilizar con seguridad".

Esta demostración del teorema de los cuatro colores no ha sido reducida a un proceso de formalización que satisfaga a todos los matemáticos. Dado que se ha adoptado de la matemática moderna (desde el siglo XVII) la tradición de publicar sólo resultados en una presentación final, formal y abstracta, dejando en el olvido los ejemplos numéricos y gráficos que conducen al matemático a la formulación inicial de un teorema. En lo que respecta, para nosotros, este hecho marco el inicio de la experimentación como génesis del conocimiento matemático. Prueba de ello es la reciente prueba de la conjetura de Kepler quién afirmaba que la mejor manera de apilar objetos esféricos era formando una pirámide. Este problema se planteó hace aproximadamente 400 años y un programa informático logró verificar paso a paso todas las afirmaciones lógicas de la solución matemática, lo cual es un gran avance, ya que los ordenadores realizaran el trabajo arduo de realizar cálculos demasiado tediosos.

El propósito de este documento es difundir la práctica de la matemática experimental usando el software de geometría dinámica Geogebra para generar datos, emitir y verificar conjeturas, mediante el uso de las diferentes herramientas que permiten obtener la solución de problemas que involucran variación. Por lo tanto se presenta el diseño y la experimentación de una actividad teórico práctica en un curso de cálculo diferencial, propuesta como una alternativa de acompañamiento y seguimiento en los procesos de construcción del conocimiento relativo al tema de razón de cambio mediante el uso del software con el fin de favorecer los procesos de visualización para contextualizar un problema clásico del cálculo y convertirlo de manera dinámica asequible y palpable por parte del estudiantado. En contraposición al frecuente resultado que se obtiene en una clase magistral, donde muchas veces se memorizan procesos sin llegar a la construcción del concepto matemático deseado.

En la actividad no sólo se trabajarán los conceptos matemáticos, sino también los procedimientos asociados a dicho concepto, ya que en Geogebra se facilita la conexión entre las representaciones gráfica, algebraica, geométrica y analítica, lo cual ayudará al estudiante a una mejor comprensión matemática. Además, pretende familiarizar a docentes y estudiantes universitarios con una herramienta de enseñanza e investigación que permita dejar de lado errores de tipo perceptivo o de exactitud de representación gráfica que se presenta en el trabajo de lápiz y papel (Acosta, Mejía & Rodríguez, 2011).

Esta práctica experimental no está diseñada para estudiantes de secundaria. No obstante, estudiantes de educación media podrían realizar la experimentación para acercarse a la solución de problema

2. Marco Teórico

2.1. Matemática experimental

Para Bailey & Borwein (2003) la matemática experimental es un acercamiento a las matemáticas en las que se utilizan cálculos numéricos para investigar los objetos matemáticos y la identificación de propiedades y patrones. Esta es una rama de las matemáticas que utiliza la tecnología informática como una herramienta diligente en la investigación en matemáticas en ámbitos relativos a la exploración de conjeturas y creencias o indicios y a un meticuloso análisis de los datos obtenidos en la experimentación Bailey & Borwein (2005).

Bailey & Borwein (2003) proponen la tecnología computacional como herramienta para realizar procesos experimentales relativos a:

1. La percepción y la intuición.
2. El descubrimiento de nuevos patrones y relaciones.
3. La utilización de representaciones gráficas que sugieren los principios matemáticos subyacentes.
4. Prueba y falsación de conjeturas.
5. Exploración de posibles resultados.
6. Construcción de enfoques para llegar a una demostración formal.
7. Sustitución de largas experimentaciones a lápiz y papel por resultados derivadas de algoritmos computacionales.
8. Confirmando los resultados obtenidos analíticamente.

2.2. Técnicas y herramientas

Dentro de las técnicas y herramientas de la matemática experimental tenemos: los métodos numéricos, algoritmos computacionales, técnicas de computacionales de agotamiento, sistemas de algebra computacional y para el caso de este laboratorio los software de geometría dinámica.

Geogebra es un software que se puede convertir en un ”laboratorio.en el que podemos realizar exploraciones numéricas y simbólicas a gran escala, sin ”dolores de mano”por los extensos cálculos. De esta manera podemos probar conjeturas y suponer otras completamente nuevas. Este enfoque está dando lugar a descubrimiento de nuevos resultados e incluso resultados parciales (Borwein, 2004).

La matemática experimental, sus métodos y técnicas brindan la posibilidad de:

1. Buscar un contraejemplo a una conjetura.
2. Encontrar nuevos ejemplos de números u objetos que poseen unas propiedades particulares.
3. Hallazgos accidentales de patrones numéricos.
4. Comprobar mediante programas computacionales grandes cantidades de casos (métodos por agotamiento).
5. Verificación de conjeturas que dan luces en la búsqueda de la prueba analítica.
6. Verificación visual de propiedades.

3. Metodología

Determinaremos con el uso de *Geogebra* la solución del siguiente problema:

Una piscina de 50 metros de largo, 20 metros de ancho, 10 metros de profundidad en un extremo y 4 metros en el otro extremo; se está llenando de agua como muestra a continuación (el deslizador t representa el parámetro tiempo contado en minutos). Encontrar la rapidez con la que sube el volumen del agua para cualquier instante de tiempo t. Explica y justifica tu respuesta.

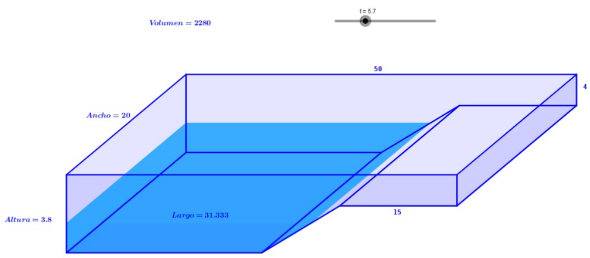


Figura 1: Llenado de la piscina para t=5.7 minutos

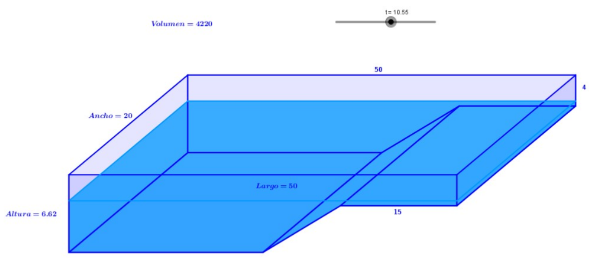


Figura 2: Llenado de la piscina para t=10.55 minutos

La intención de esta actividad es que el estudiante realice una serie de cálculos aritméticos, usando tablas de valores, para relacionar los intervalos de tiempo con la variación del volumen de agua y su respectivo cociente de diferencias. Se realizará este proceso para distintos intervalos de tiempo e incrementos cada vez más pequeños.

Esta actividad va acompañada de una construcción en Geogebra, llamado Piscina.ggb, que simula el problema mencionado. Se le propone al estudiante una serie de acciones que le ayudaran a encontrar la solución del problema.

Mostraremos cuales son acciones que deberá llevar a cabo el estudiante para resolver el problema planteado.

1. Analiza la variación del volumen con respecto al tiempo y describe lo que observas.

   1.1 Realice los cálculos indicados para los intervalos de tiempo dados:

Intervalo de tiempo	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta t}$
(4.95 , 5)		
(4.96 , 5)		
(4.97 , 5)		
(4.98 , 5)		
(4.99 , 5)		
(5 , 5.01)		
(5 , 5.02)		
(5 , 5.03)		
(5 , 5.04)		
(5, 5.05)		

   En esta apartado, el estudiante deberá manipular el deslizador t para obtener los datos que le permitan llenar la segunda columna de la tabla anterior. Posteriormente, deberá realizar los cálculos que le brindarán los datos para completar la tercera columna.

   1.2 ¿Aproximadamente cuál es la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo alrededor de 5 minutos?

   Una vez completa la tabla, el estudiante responderá esta pregunta de acuerdo a los datos que obtuvo.

   1.3 Realiza los siguientes cálculos para los intervalos de tiempo dados:

Intervalo de tiempo	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta t}$
(8.995 , 9)		
(8.996 , 9)		
(8.997 , 9)		
(8.998 , 9)		
(8.999 , 9)		
(9 , 9.001)		
(9 , 9.002)		
(9 , 9.003)		
(9 , 9.004)		
(9 , 9.005)		

   En esta ocasión se realiza el mismo procedimiento al realizado en el numeral 1.1, con la diferencia que el centro del intervalo ahora es $t = 9$ y el incremento del tiempo es $\Delta t = 0{,}001$.

   1.4 ¿Aproximadamente cuál es la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo alrededor de 9 minutos?

Se responde de acuerdo a los datos que se obtuvieron previamente.

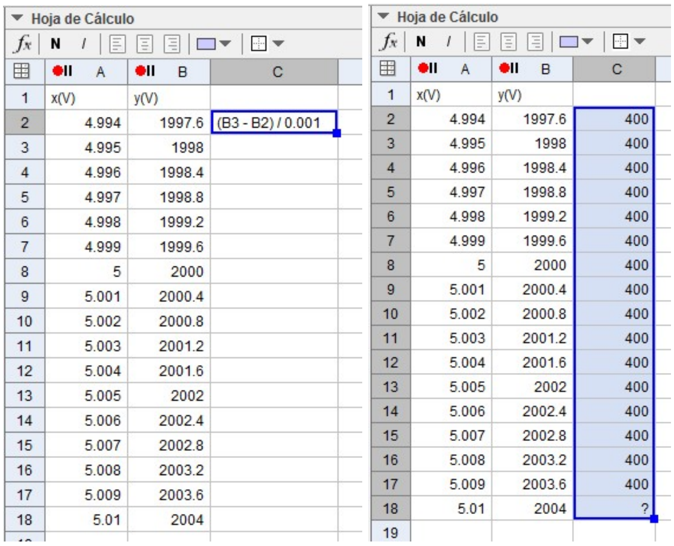
1.5 Registra en tu hoja de cálculo los datos del punto V (tiempo, volumen) de la vista algebraica.

1.5.1 Anima con la flecha derecha del teclado el deslizador t (tiempo), hasta 5.01 (?t=0.001)

1.6 Halla la razón de cambio entre el volumen y el tiempo $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1}$, para $\Delta t = 0{,}001$ de la siguiente manera:

1.6.1 En la columna C, ubícate en la celda C2 y escribe $= (B3 - B2)/0{,}001$. Arrastra la fórmula hasta $t = 5{,}01$. ¿Qué significan los valores encontrado en la columna C? ¿El valor obtenido es igual al obtenido en 1.3?

El estudiante hará los cálculos apoyado con la hoja de cálculo de Geogebra. Y obtendrá un resultado como el que se muestra en las siguientes tablas.



Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	x(V)	y(V)	
2	4.994	1997.6	(B3 - B2) / 0.001
3	4.995	1998	
4	4.996	1998.4	
5	4.997	1998.8	
6	4.998	1999.2	
7	4.999	1999.6	
8	5	2000	
9	5.001	2000.4	
10	5.002	2000.8	
11	5.003	2001.2	
12	5.004	2001.6	
13	5.005	2002	
14	5.006	2002.4	
15	5.007	2002.8	
16	5.008	2003.2	
17	5.009	2003.6	
18	5.01	2004	

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	x(V)	y(V)	
2	4.994	1997.6	400
3	4.995	1998	400
4	4.996	1998.4	400
5	4.997	1998.8	400
6	4.998	1999.2	400
7	4.999	1999.6	400
8	5	2000	400
9	5.001	2000.4	400
10	5.002	2000.8	400
11	5.003	2001.2	400
12	5.004	2001.6	400
13	5.005	2002	400
14	5.006	2002.4	400
15	5.007	2002.8	400
16	5.008	2003.2	400
17	5.009	2003.6	400
18	5.01	2004	?
19			

Figura 3: Resultados obtenidos con hoja de cálculo

Aquí deberá interpretar el resultado obtenido en la columna C ("400" corresponde a la rapidez con la que varía el volumen a medida que transcurre el tiempo t. Es decir, $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 400m^3/min$ y compararlo con los resultados obtenidos anteriormente.

1.6.2 ¿Cuál es la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo alrededor de $t = 5$? ¿Es igual para cualquier otro tiempo t? ¿Qué pasa cuando ?t se hace más pequeño? Explica tus respuestas. Finalmente, el estudiante deberá plantear el mismo proceso para distintos tiempos t, incluso para cada Δt vez más pequeños.

4. Conclusiones

Esta experiencia resulta enriquecedora en primera medida porque se aprende a utilizar el software de geometría dinámica Geogebra mediante una práctica experimental de las matemáticas, este tipo de prácticas permite: La utilización de representaciones gráficas que sugieren los principios matemáticos subyacentes y la exploración de posibles resultados como un acercamiento a la definición no formal o intuitiva de razón de cambio.

La práctica de matemática experimental permite la confirmación de resultados obtenidos analíticamente o también un acercamiento al proceso analítico a partir de procesos numéricos. Tal es el caso de la actividad planteada donde practicamos una serie de cálculos numéricos para acercarnos a la solución del problema sin necesidad de realizar procesos analíticos o incluso tener ecuaciones o fórmulas que modelen el problema.

Este tipo de actividades, además de pretender construir conceptos matemáticos, trabaja con los procedimientos asociados a dichos conceptos. Esta relación se evidencia gracias a la conexión entre las representaciones gráfica, numérica, geométrica y analítica que ofrece Geogebra en el tratamiento de problemas de variación en contraste al trabajo de una clase magistral.

Referencias

[1] Acosta, E., Mejía, C., & Rodríguez, W. (2011). Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido", Revista Integración, 29 (2), pp. 163-174.

[2] Bailey, H. & Borwein, J. (2003). "Sample Problems of Experimental Mathematics". Recuperado de http://www.experimentalmath.info/books/expmath-probs.pdf

[3] Bailey, H. & Borwein, J. (2005). "Experimental mathematics: Examples, Methods and Implications", Notices of the AMS, 52 (5), pp. 502-514.

[4] Banegas, J. (2006). Razonamientos no rigurosos y demostraciones asistidas por ordenador", Revista contraste, 12 (1), pp. 27-50. Recuperado de http://www.uma.es/contrastes/pdfs/012/02jesusalcolea.pdf

[5] Borwein J. et al. (2004). Experimentation in mathematics, computational paths to discovery. A.K. Peters. USA

[6] Jacovkis, P. M. (2005). Çomputadoras, modelización matemática y ciencia experimental", Revista CTS, 2 (5), pp. 51-63. Thomas, R. (1998). "An Update on the Four-Color Theorem". Notices of the American Mathematical Society 45 (7): 848859

Para citar este articulo: Cindy MORGADO y David BERRIO, 2015, *"Matemática experimental: uso de Geogebra para resolver un problema de razón de cambio"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.