UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

MATUA

Revista del programa del matemáticas (2015) 65-90

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 1 (2015)

Algunas Observaciones sobre Pegar y Reversar en Números Naturales

Some Remarks on Pasting and Reversing in Natural Numbers

Primitivo ACOSTA-HUMÁNEZ[1]

[1] *Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.*

Paloma MOLANO[2]

[2] *Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia*

Angela RODRÍGUEZ[3]

[3] *Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia*

Recibido:29/04/2015 - Aceptado:18/06/2015

Resumen

En este artículo, de carácter divulgativo y con resultados elementales, presentaremos algunas propiedades de Pegar y Reversar en números naturales. Comenzaremos con un recorrido histórico de como aparecen estas operaciones, luego haremos las demostraciones omitidas de los resultados concernientes a números naturales presentados en [4, 5] y finalmente presentamos unas nuevas propiedades que involucran divisibilidad, cuadrados y raíces cuadradas.

Palabras claves: Divisibilidad, Números naturales, Pegar, Reversar.

Abstract

In this survey type paper, which includes elementary results, we show some properties concerning to Pasting and Reversing operations in natural numbers. We start with an historical outline about these operations, secondly we do the omitted proofs of some results related with natural numbers, presented in [4, 5] and finally we show new properties that involve divisibility, squares and square roots.

Keywords: Divisibility, Natural numbers, Pasting, Reversing

1. Introducción

Las operaciones *Pegar* y *Reversar* son un ejemplo de cómo el hombre intenta a partir de las acciones de la cotidianidad crear maravillas en la matemática, pues estas operaciones por su fácil interpretación y manejo dan muestra de cómo divertirse haciendo cálculos en matemáticas; un ejemplo de ello está en [2] y sus posteriores desarrollos.

La primera vez que se trabajó en ellas, como operaciones matemáticas por el primer autor, fue en 1992. Un año despúes, se empezó la divulgación de ellas en diferentes encuentros matemáticos, pero es sólo hasta el año 2002 que se hicieron públicos los resultados de éstas presentaciones, consultar [2]. Detalles adicionales se encuentran en [4, 6, 9].

Seis años más tarde, en conjunto con estudiantes de la Universidad Sergio Arboleda se avanzó en el estudio de las operaciones en los números naturales. Así mismo, se aplicó en teoría de permitaciones para obtener familias de *permutaciones simples*, consultar [8].

En el año 2009, en el coloquio de matemáticas de la Universidad Sergio Aboleda y en el XVII Congreso Colombiano de Matemáticas, celebrado en Cali, se presentaron propiedades intuitivas de las operaciones Pegar y Reversar sobre algunos anillos. Trabajo que tres años más tarde, se publicó en Arxiv y en el Boletín de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia ver [4, 5].

Siguiendo el mismo esquema presentado en [4, 5, 8], en la versión número XVIII del Congreso Colombiano de Matemáticas (2011), realizado en la ciudad de Bucaramanga se presentaron nuevos avances del comportamiento de las operaciones sobre Espacios Vectoriales finitos y se volvió a publicar en el mismo portal virtual de la Universidad de Cornell y en el Boletín de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Además, se hizo una recopilación del trabajo realizado hasta éste año, memorias que se encuentran consignadas en el trabajo de grado de A. L. Chuquen, consultar [9].

Finalmente, en el año 2012, se hace un tratamiento de las operaciones Pegar y Reversar en un producto vectorial generalizado, trabajo que es publicado en la Revista Integración, consultar [3].

En este trabajo no pretendemos mejorar o generalizar los resultados anteriores. Nuestra preocupación está fundada en que varios de los artículos anteriores no solo están escritos en ingés sino que también por la forma en que están redactados los resultados son de difícil acceso para un estudiante primerizo o para un no matemático que se sienta motivado por el tema. Es por tanto nuestro aporte el escribir un artículo didáctico en castellano en el cual se presenten las demostraciones omitidas en los trabajos anteriores y se establezcan nuevos resultados, aún cuando éstos sean elementales.

2. Preliminares

En esta sección daremos los preliminares básicos para que el lector se sienta a gusto con la lectura de las secciones siguientes.

2.1. Números Naturales y Divisibilidad

Esta parte corresponde a definiciones y resultados elementales bien conocidos, los cuales pueden también encontrarse en [10], así como más detalles y demostraciones.

Se considerará primero el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el cual se puede caracterizar mediante los siguientes axiomas.

A.1 Hay un elemento $0 \in \mathbb{N}$.

A.2 Para todo $a \in \mathbb{N}$ existe un único elemento $a^+ \in \mathbb{N}$ llamado el *sucesor* de a.

A.3 Para todo $a \in \mathbb{N}$, $a^+ \neq 0$

A.4 Si $a, b \in \mathbb{N}$ y $a^+ = b^+$, entonces $a = b$.

A.5 Si *S* es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $a^+ \in S$ siempre que $a \in \mathbb{N}$, entonces *S* = $\mathbb{N}$

A continuación, algunas definiciones y propiedades de los números naturales que serán de gran utilidad.

DEFINICIÓN **2.1** *Sean a, b números naturales con $a \neq b$. Se dice que a* **divide a** *b si existe un natural c tal que $b = ac$ y se nota como $a \mid b$.*

PROPOSICIÓN 2.1 *Supongamos que a, b, c son números enteros. Entonces,*

1. *Si $a \neq 0$ entonces $a \mid 0$, $a \mid a$ y $a \mid -a$.*
2. *$1 \mid a$, $-1 \mid -a$.*
3. *Si $a \mid b$ entonces $a \mid bc$.*
4. *Si $a \mid bc$, pero $a \nmid b$ entonces $a \mid c$.*
5. *Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$.*
6. *Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, $a \mid bx + cy$.*

PROPOSICIÓN 2.2 *Sea p un número primo. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Si $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ ó $p \mid b$.*

Las siguientes proposiciones corresponden a criterios de divisibilidad del once.

PROPOSICIÓN 2.3 *Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $11 \mid 10^{2k+1} + 1$.*

PROPOSICIÓN 2.4 *Sea $k \in \mathbb{Z}$ si*

$$k = \sum_{i=0}^{n} k_{n-i} 10^{n-i}$$

y se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} k_{2i-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k_{2i}, \quad \text{ó}, \quad 11 \mid \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} k_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k_{2i} \right).$$

Entonces $11 \mid k$.

TEOREMA 1 *Sean a y b enteros, no ambos iguales a cero. El máximo común divisor entre a y b, $\mathrm{mcd}(a, b)$, es el menor entero positivo que puede escribirse en la forma $ax + by$, siendo x, y enteros.*

2.2. Pegar, Reversar y Palindromía

Esta parte, aunque no es bien conocida, está basada en las referencias [1, 2, 4, 6, 9].

OBSERVACIÓN 2.1 *A partir de ahora se tendrá en cuenta:*

1. *El conjunto*

$$\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{N} | 10 \nmid a\}.$$

2. *La escritura de los números se hará en forma arábiga, es decir, de derecha a izquierda por dígitos.*

DEFINICIÓN **2.2** *La* cifra digital *de $n \in \mathbb{N}$, es el número de dígitos que conforman a n y se denota con $\varsigma(a)$. Es decir, si $n \in \mathbb{N}$ y tiene m dígitos, entonces $\varsigma(n) = m$.*

EJEMPLO 1 *Sea $n = 1215$, entonces $\varsigma(n) = 4$*

DEFINICIÓN **2.3** *Sea $n = \sum_{i=0}^{r} a_{r-i} 10^{r-i}$. El* Reverso *de n está dado por*

$$\widetilde{n} = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}.$$

EJEMPLO 2 *Sea $n = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10 + 4$, entonces*

$$\tilde{n} = 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 9 \times 10 + 1$$

DEFINICIÓN **2.4** *Sean $n, p \in \mathbb{N}$. El* Pegamiento *de n con p, se define*

$$n \diamond p = 10^{\varsigma(p)} n + p.$$

EJEMPLO 3 *Sean $n = 3040$ y $p = 362$. Luego $\varsigma(n) = 4$ y $\varsigma(p) = 3$. Entonces,*

$$3040 \diamond 362 = (10^3 \times 3040) + 362 = 3040362$$

DEFINICIÓN **2.5** *Se dice que n es* palíndrome *si $n = \tilde{n}$.*

EJEMPLO 4 *El número $n = 14941 = \tilde{n}$ es un número palíndrome.*

3. Sobre la raíz cuadrada y el cuadrado de números naturales, [2]

Es menester recordar algunos resultados importantes obtenidos en [2] que se centran en encontrar el cuadrado de números naturales y/o hallar la raíz cuadrada exacta, haciendo uso de las operaciones Pegar y Reversar de una manera fácil, divertida y sin extensos cálculos que pueden generar apatía.

3.1. Cuadrado de un número natural

En el siguiente teorema se recogen los resultados sobre cuadrado de números naturales presentados en [2].

TEOREMA 2 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, los siguientes casos se tienen.*

1. *Si $n = m \diamond 1$ entonces: $(m \diamond 1)^2 = [m(m \diamond 2)] \diamond 1$.*
2. *Si $n = m \diamond 2$ entonces: $(m \diamond 2)^2 = [m(m \diamond 4)] \diamond 4$.*
3. *Si $n = m \diamond 3$ entonces: $(m \diamond 3)^2 = [m(m \diamond 6)] \diamond 9$.*
4. *Si $n = m \diamond 4$ entonces: $(m \diamond 4)^2 = [m(m \diamond 8) + 1] \diamond 6$.*
5. *Si $n = m \diamond 5$ entonces: $(m \diamond 5)^2 = [m(m + 1)] \diamond 25$.*
6. *Si $n = m \diamond 6$ entonces: $(m \diamond 6)^2 = [m((m + 1) \diamond 2) + 3] \diamond 6$.*
7. *Si $n = m \diamond 7$ entonces: $(m \diamond 7)^2 = [m((m + 1) \diamond 4) + 4] \diamond 9$.*
8. *Si $n = m \diamond 8$ entonces: $(m \diamond 8)^2 = [m((m + 1) \diamond 6) + 6] \diamond 4$.*
9. *Si $n = m \diamond 9$ entonces: $(m \diamond 9)^2 = [m((m + 1) \diamond 8) + 8] \diamond 1$.*

EJEMPLO 5 *Ilustraremos ahora cada caso del Teorema 2.*

1. *Sea $n = 51$ así $m = 5$ y tenemos:*

$$51^2 = (5 \diamond 1)^2 = [5(5 \diamond 2)] \diamond 1 = [5(52)] \diamond 1 = 260 \diamond 1 = 2601$$

2. *Sea* $n = 32$ *así* $m = 3$ *y tenemos:*

   $$32^2 = (3 \diamond 2)^2 = [3(3 \diamond 4)] \diamond 4 = [3(34)] \diamond 4 = 102 \diamond 4 = 1024$$

3. *Sea* $n = 43$ *así* $m = 4$ *y tenemos:*

   $$43^2 = (4 \diamond 3)^2 = [4(4 \diamond 6)] \diamond 9 = [4(46)] \diamond 9 = 184 \diamond 9 = 1849$$

4. *Sea* $n = 64$ *así* $m = 6$ *y tenemos:*

   $$64^2 = (6 \diamond 4)^2 = [6(6 \diamond 8) + 1] \diamond 6 = [6(68) + 1] \diamond 6 = (408 + 1) \diamond 6 = 4096$$

5. *Sea* $n = 75$ *así* $m = 7$ *y tenemos:*

   $$75^2 = (7 \diamond 5)^2 = [7(7 + 1)] \diamond 25 = [7(8)] \diamond 25 = 56 \diamond 25 = 5625$$

6. *Sea* $n = 86$ *así* $m = 8$ *y tenemos:*

   $$86^2 = (8 \diamond 6)^2 = [8((8 + 1) \diamond 2) + 3] \diamond 6 = [8(9 \diamond 2) + 3] \diamond 6 = [8(92) + 3] \diamond 6 = 739 \diamond 6 = 7396$$

7. *Sea* $n = 97$ *así* $m = 9$ *y tenemos:*

   $$97^2 = (9 \diamond 7)^2 = [9((9 + 1) \diamond 4) + 4] \diamond 9 = [9(10 \diamond 4) + 4] \diamond 9 = [9(104) + 4] \diamond 9 = 940 \diamond 9 = 9409$$

8. *Sea* $n = 108$ *así* $m = 10$ *y tenemos:*

   $$108^2 = (10 \diamond 8)^2 = [10((10 + 1) \diamond 6) + 6] \diamond 4 = [10(11 \diamond 6) + 6] \diamond 4 = [10(116) + 6] \diamond 4 = 1166 \diamond 4 = 11664$$

9. *Sea* $n = 29$ *así* $m = 2$ *y tenemos:*

   $$29^2 = (2 \diamond 9)^2 = [2((2 + 1) \diamond 8) + 8] \diamond 1 = [2(3 \diamond 8) + 8] \diamond 1 = [2(38) + 8] \diamond 1 = 84 \diamond 1 = 841.$$

3.2. Raíz cuadrada exacta de un número natural

De manera similar, en el siguiente corolario se recogen los resultados concernientes al cálculo de raíces cuadradas presentados en [2].

COLORARIO 1 *Sean* r, n *y* $m \in \mathbb{N}$, r *un cuadrado perfecto, entonces se tienen los siguientes casos.*

1. *Si* $r = m \diamond 1$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 1)} = n \diamond 1$, *siempre que* $m = n(n \diamond 2)$.
2. *Si* $r = m \diamond 4$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 4)} = n \diamond 2$, *siempre que* $m = n(n \diamond 4)$.
3. *Si* $r = m \diamond 9$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 9)} = n \diamond 3$, *siempre que* $m = n(n \diamond 6)$.
4. *Si* $r = m \diamond 6$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 6)} = n \diamond 4$, *siempre que* $m = n(n \diamond 8) + 1$.
5. *Si* $r = m \diamond 25$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 25)} = n \diamond 5$, *siempre que* $m = n(n + 1)$.
6. *Si* $r = m \diamond 6$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 6)} = n \diamond 6$, *siempre que* $m = n((n + 1) \diamond 2) + 3$.
7. *Si* $r = m \diamond 9$ *entonces* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 9)} = n \diamond 7$, *siempre que* $m = n((n + 1) \diamond 4) + 4$.
8. *Si* $r = m \diamond 4$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 4)} = n \diamond 8$, *siempre que* $m = n((n + 1) \diamond 6) + 6$.
9. *Si* $r = m \diamond 1$ *entonces:* $\sqrt{r} = \sqrt{(m \diamond 1)} = n \diamond 9$, *siempre que* $m = n((n + 1) \diamond 8) + 8$.

PRUEBA 1 *Se procede de igual manera como en el Teorema 2.*

EJEMPLO 6 *Ilustramos ahora cada caso del Corolario 1.*

1. *Sea* $r = 2601$ *como* $m = 5(5 \diamond 2) = 260$ *entonces:* $\sqrt{2601} = \sqrt{(260 \diamond 1)} = 5 \diamond 1 = 51$.
2. *Sea* $r = 1024$ *como* $m = 3(3 \diamond 2) = 102$ *entonces:* $\sqrt{1024} = \sqrt{(102 \diamond 4)} = 3 \diamond 2 = 32$.
3. *Sea* $r = 1849$ *como* $m = 4(4 \diamond 6) = 184$ *entonces:* $\sqrt{1849} = \sqrt{(184 \diamond 4)} = 4 \diamond 3 = 43$.
4. *Sea* $r = 4096$ *como* $m = 6(6 \diamond 8) + 1 = 409$ *entonces:* $\sqrt{4096} = \sqrt{(409 \diamond 6)} = 6 \diamond 4 = 64$.
5. *Sea* $r = 5625$ *como* $m = 7(7 + 1) = 56$ *entonces:* $\sqrt{5625} = \sqrt{(56 \diamond 25)} = 7 \diamond 5 = 75$.
6. *Sea* $r = 7396$ *como* $m = 8((8 + 1) \diamond 2) + 3 = 739$ *entonces:* $\sqrt{7396} = \sqrt{(739 \diamond 6)} = 8 \diamond 6 = 86$.
7. *Sea* $r = 9409$ *como* $m = 9((9 + 1) \diamond 4) + 4 = 940$ *entonces:* $\sqrt{9409} = \sqrt{(940 \diamond 9)} = 9 \diamond 7 = 97$.
8. *Sea* $r = 11664$ *como* $m = 10((10 + 1) \diamond 6) + 6 = 1166$ *entonces:* $\sqrt{11664} = \sqrt{(1166 \diamond 4)} = 10 \diamond 8 = 108$.
9. *Sea* $r = 841$ *como* $m = 2((2 + 1) \diamond 8) + 8 = 84$ *entonces:*
   $\sqrt{841} = \sqrt{(84 \diamond 1)} = 2 \diamond 9 = 29$.

4. Demostraciones y nuevos resultados

En esta sección se dan las contribuciones de este trabajo, las cuales tal y como se mencionó anteriormente corresponden a demostraciones detalladas que fueron omitidas o están incompletas en el artículo [4], así como también a nuevos resultados relativos a Pegar y Reversar en números naturales.

4.1. Demostraciones omitidas y ampliadas de resultados anteriores

Esta parte corresponde a la ampliación y elaboración de algunas pruebas de resultados presentados en [4].

PROPOSICIÓN 4.1 *Sea $n, \widetilde{n} \in \mathbb{N}$ donde $\tilde{n}$ es el Reverso de n, entonces $\varsigma(n) = \varsigma(\tilde{n})$*

PRUEBA 2 *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_{r-i}10^{r-i}, \quad \widetilde{n} = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i},$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\varsigma(n) &= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{r} a_{r-i}10^{r-i}\right) \\
&= r+1 \\
&= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}\right) \\
&= \varsigma(\widetilde{n})
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.2 *Sean $a, b \in \mathbb{A}$. Entonces $\varsigma(a \diamond b) = \varsigma(a) + \varsigma(b)$.*

PRUEBA 3 *Sean $a = \sum_{i=0}^{m} a_{m-i}10^{m-i}$ y $b = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}10^{n-i}$, por lo tanto:*

$$\begin{aligned}
\varsigma(a \diamond b) &= \varsigma((10^{\varsigma(b)}a) + b) \\
&= \varsigma\left(10^{\varsigma\left(\sum_{i=0}^{n} b_{n-i}10^{n-i}\right)} \sum_{i=0}^{m} a_{m-i}10^{m-i} + \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}10^{n-i}\right) \\
&= \varsigma\left(10^{n+1}\sum_{i=0}^{m} a_{m-i}10^{m-i} + \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}10^{n-i}\right) \\
&= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{m} a_{m-i}10^{m+n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}10^{n-i}\right) \\
&= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{m+n+1} c_{m+n+1-i}10^{m+n+1-i}\right) \\
&= (m+1)+(n+1) \\
&= \varsigma(a) + \varsigma(b)
\end{aligned}$$

Esto último se puede concluir porque en la primera sumatoria de la cuarta igualdad se tienen los dígitos de a y tantos ceros como los dígitos de b; por lo que al sumar los dígitos de b éstos ocuparán los ceros dados por el 10^{n+1}. Teniendo así, la suma de las cifras digitales. Además, $c_k = b_k$ siempre que $k \leq n$, mientras que $c_k = a_k$ cuando $k > n$.

PROPOSICIÓN 4.3 *Sean $n, p, q \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones se tienen:*

1. $\tilde{\tilde{n}} = n$
2. $\tilde{n} \diamond \tilde{q} = \widetilde{q \diamond n}$
3. $(n \diamond p) \diamond q = n \diamond (p \diamond q)$
4. $11 \mid n \diamond \tilde{n}$
5. *Si n es palíndrome y ç(n) es par, entonces 11 es un divisor de n.*

PRUEBA 4 *Suponga que $\varsigma(n) = r$, $\varsigma(p) = t$ y $\varsigma(q) = s$. Demostraremos la proposición de acuerdo a cada item.*

1. *Como $\varsigma(n) = r$ y por la Proposición 2.4 se tiene $\varsigma(n) = \varsigma(\tilde{n})$.*
   Por lo tanto,

$$\widetilde{n} = \sum_{\varsigma(\tilde{n})=0}^{r} a_{\varsigma(\tilde{n})} 10^{r-\varsigma(\tilde{n})}$$

Entonces,

$$\tilde{\tilde{n}} = \sum_{\varsigma(\tilde{n})=0}^{r} a_{\varsigma(\tilde{n})} 10^{r-\varsigma(\tilde{n})} = \sum_{\varsigma(n)=0}^{r} a_{\varsigma(n)} 10^{r-\varsigma(n)} = n$$

2. *Consideremos los enteros n, q tales que*

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_{r-i} 10^{r-i}, \quad q = \sum_{j=0}^{s} b_{s-j} 10^{s-j}.$$

Por la Definición 2.3 tenemos, $\widetilde{n} = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}$ y $\widetilde{q} = \sum_{j=0}^{s} b_j 10^{s-j}$
Así, al definir $R = q \diamond n$ tenemos:

$$\begin{aligned} R &= \left(\sum_{j=0}^{s} b_{s-j} 10^{s-j}\right) \diamond \left(\sum_{i=0}^{r} a_{r-i} 10^{r-i}\right) \\ &= 10^{r+1} \sum_{j=0}^{s} b_s 10^{s-j} + \left(\sum_{i=0}^{r} a_r 10^{r-i}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{s} b_s 10^{s+1+r-j} + \sum_{i=0}^{r} a_r 10^{r-i} \\ &= \sum_{j=0}^{r+s+1} c_{r+s+1-j} 10^{r+s+1-i} \end{aligned}$$

donde, $c_{s+r+1-j} = c_t$ *está dado por:*

$$c_t := \begin{cases} b_t & \text{if } 0 \leq t \leq s \\ a_t & \text{if } s+1 \leq t \leq r+s+1 \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \widetilde{R} &= \sum_{j=0}^{r+s+1} c_j 10^{r+s+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{r} a_j 10^{s+1r-j} + \sum_{j=0}^{s} b_j 10^{s-j} \\ &= 10^{s+1} \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i} + \sum_{j=0}^{s} b_j 10^{s-j} \end{aligned}$$

Esto último es consecuencia de la Definición 2.4. Así, obtenemos que $\widetilde{R} = \widetilde{n} \diamond \widetilde{q}$.

3. *Probemos ahora la asociatividad del Pegamiento.*

$$\begin{aligned} (n \diamond p) \diamond q &= (10^t n + p) \diamond q \\ &= 10^s (10^t n + p) + q \\ &= 10^{s+t}(n) + 10^s(p) + q \\ &= 10^{s+t}(n) + (p \diamond q) \\ &= 10^{\varsigma(p \diamond q)} + (p \diamond q). \\ &= n \diamond (p \diamond q) \end{aligned}$$

Como pudimos observar, el uso de la Proposición 4.1 es clave en la demostración.

4. *Sea el número natural* n *tal que*

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_{r-i} 10^{r-i};$$

por la Definición 2.3 tenemos que

$$\widetilde{n} = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}.$$

Así se tiene que $n \diamond \widetilde{n} = \widetilde{\widetilde{n}} \diamond \widetilde{n} = \widetilde{n \diamond \widetilde{n}}$ *con lo que podemos concluir que* $n \diamond \widetilde{n}$ *es palíndrome. Además, dado que*

$$\begin{aligned}
\varsigma(n \diamond \widetilde{n}) &= \varsigma\left(\left(\sum_{i=0}^{r} a_{r-i}10^{r-i}\right) \diamond \left(\sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}\right)\right) \\
&= \varsigma\left(10^{r+1}\left(\sum_{i=0}^{r} a_{r-i}10^{r-i}\right) + \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}\right) \\
&= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{r} a_{r-i}10^{r+1+r-i} + \sum_{i=0}^{r} a_i 10^{r-i}\right) \\
&= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{r} a_{r-i}10^{2r+1-i} + a_i 10^{r-i}\right) \\
&= \varsigma\left(\sum_{i=0}^{t} a_{t-r-1-i}10^{t-i} + a_i 10^{t-r-1-i}\right) \\
&= t+1 \\
&= 2r+2 \\
&= 2(r+1).
\end{aligned}$$

Con lo cual se puede afirmar que $\varsigma(n \diamond \widetilde{n}) = t+1 = 2r+2$ *es par. Sea* $b = n \diamond \widetilde{n}$*, el cual se probó que es palíndrome. Es decir, los dígitos de* b *satisfacen*

$$\begin{aligned}
b_0 &= b_{2r+1} \\
b_1 &= b_{2r} \\
&\vdots \\
b_{r-1} &= b_{r+2} \\
b_r &= b_{r+1}.
\end{aligned}$$

Agrupando y sumando los dígitos de las posiciones pares e impares tenemos:

$$b_0 + b_2 + \cdots + b_{2r-2} + b_{2r} = b_{2r+1} + b_{2r-1} + \cdots + b_3 + b_1,$$

Lo cual indica que

$$\sum_{i=1}^{r+1} b_{2i-1} - \sum_{i=0}^{r} b_{2i} = 0.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.4 se tiene el resultado deseado.

5. *Suponga que* $n \in \mathbb{N}$ *es un número palíndrome, entonces* $n = \widetilde{n}$*. Ahora bien,*

$$\begin{aligned}
n \diamond \widetilde{n} &= n \diamond n \\
&= 10^{\varsigma(n)} n + n \\
&= n(10^{2k}+1)
\end{aligned}$$

Donde, $\varsigma(n) = 2k$ *para algún* $k \geqslant 1$*, por el item anterior se tiene que* $11 \mid n(10^{2k}+1)$*. Pero,* $11 \nmid 10^{2k}+1$*. Por lo* *tanto, por la Proposición 2.1, se tiene* $11 \mid n$.

La siguiente proposición no solo es una forma simplificada del Teorema 2, sino que también nos ilustra el procedimiento para construir cada uno de los casos del mencionado teorema.

PROPOSICIÓN 4.4 *Sean* $0 \leq m, p, q, r, s \leq 9$. *Entonces,*

$$(n \diamond m)^2 = (n((n + p) \diamond q) + r) \diamond s,$$

donde $p \diamond q = 2m$ *y* $r \diamond s = m^2$.

PRUEBA 5 *Suponga que* $p \diamond q = 2m$ *y* $r \diamond s = m^2$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}
(n \diamond m)^2 &= (10n + m)^2 \\
&= (10n)^2 + 20nm + m^2 \\
&= (10n)^2 + 20nm + r \diamond s \\
&= (10n)^2 + 20nm + 10r + s \\
&= 10n(10n + 2m + r) + s \\
&= 10n(10n + p \diamond q + r) + s \\
&= 10n(10n + 10p + q + r) + s \\
&= 10n(10(n + p) + q + r) + s \\
&= [n((n + p) \diamond q) + r] \diamond s
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 *Calculemos* 37^2. *Como el doble de* 7 *es* 14 *y el cuadrado de* 7 *es* 49, *tenemos que* $37^2 = [3((3+1)\diamond 4)+4]\diamond 9 = [3(44) + 4] \diamond 9 = 1369$.

COLORARIO 2 *Sean* $0 \leq p, q, r, s, m \leq 9 \in \mathbb{Z}$ *tales que* $p \diamond q = 2m$, $r \diamond s = m^2$, $n \in \mathbb{N}$, $j = n((n + p) \diamond q) + r$. *Entonces* $\sqrt{j \diamond s} = n \diamond m$.

PRUEBA 6 *Por hipótesis* $p \diamond q = 2m$ *y* $r \diamond s = m^2$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}
\sqrt{j \diamond s} &= \sqrt{[n(n + p) \diamond q + r] \diamond s} \\
&= \sqrt{10n(10(n + p) + q + r) + s} \\
&= \sqrt{10n(10n + 10p + q + r) + s} \\
&= \sqrt{10n(10n + 2m + r) + s} \\
&= \sqrt{(10n)^2 + 20nm + 10r + s} \\
&= \sqrt{(10n)^2 + 20nm + m^2} \\
&= \sqrt{(10n + m)^2} \\
&= \sqrt{(n \diamond m)^2} \\
&= n \diamond m
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 *Calculemos $\sqrt{3364}$. Por el Teorema 2, como la última cifra es 4, entonces 3364 proviene del cuadrado de un número con cifra final 2 o con cifra final 8. Si fuese 2, entonces debe existir n tal que $336 = n(n \diamond 4)$, lo cual no es posible. Si fuese 8, entonces debe existir n tal que $336 = n((n+1) \diamond 6) + 6$. Es decir, $330 = n((n+1) \diamond 6)$, lo cual a simple vista indica que la cifra final de n debe ser 5 y concluimos que $\sqrt{3364} = 58$.*

COLORARIO 3 *Sea $n \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones se tienen.*

1. $(n \diamond 5)^2 = n(n+1) \diamond 25$
2. *Para $n, p \in \mathbb{N}$, $\sqrt{p \diamond 25} = n \diamond 5$ si y sólo si $p = n(n+1)$.*

PRUEBA 7 *Procederemos de acuerdo a cada ítem.*

1. *Aplicando el Teorema 2 y la Proposición 4.4 se tiene que*

$$\begin{aligned}
(n \diamond 5)^2 &= [n((n+1) \diamond 0) + 2)] \diamond 5 \\
&= 10[n((n+1) \diamond 0) + 2)] + 5 \\
&= 10n((n+1) \diamond 0)) + 25 \\
&= 10n(10(n+1))) + 25 \\
&= 10^2(n(n+1)) + 25 \\
&= n(n+1) \diamond 25.
\end{aligned}$$

2. *Si $p = n(n+1)$, entonces*

$$\begin{aligned}
\sqrt{p \diamond 25} &= \sqrt{n(n+1) \diamond 25} \\
&= \sqrt{100n(n+1) + 25} \\
&= \sqrt{(10n)^2 + 2(50n) + 5^2} \\
&= \sqrt{(10n+5)^2} \\
&= \sqrt{(n \diamond 5)^2} \\
&= n \diamond 5
\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 *Procedemos de acuerdo a cada ítem.*

1. $85^2 = 8(9) \diamond 25 = 72 \diamond 25 = 7225.$
2. $\sqrt{13225} = \sqrt{11(12) \diamond 25} = 11 \diamond 5 = 115.$

4.2. Nuevos resultados

En esta parte se presentan y demuestran nuevos resultados, algunos muy elementales, concernientes a Pegar y Reversar en números naturales.

PROPOSICIÓN 4.5 *Si $a \in \mathbb{A}$ entonces $a \diamond \widetilde{a}$ es palíndrome.*

PRUEBA 8 *De manera inmediata se tiene* $a \diamond \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}} \diamond \widetilde{a} = \widetilde{a \diamond \widetilde{a}}$.

PROPOSICIÓN 4.6 *Para todo* $a \in \mathbb{A}$ *palíndrome se tiene* $a \diamond \widetilde{a} = \widetilde{a} \diamond a$.

PRUEBA 9 *Dado* $a \in \mathbb{A}$ *palíndrome, es decir,* $a = \widetilde{a}$*; así se tiene*

$$a \diamond \widetilde{a} = a \diamond a = \widetilde{a} \diamond a.$$

PROPOSICIÓN 4.7 *Sea* $a \in \mathbb{A}$ *palíndrome. Entonces,* $a | a \diamond \widetilde{a}$ *y* $a | (\widetilde{a} \diamond a)$.

PRUEBA 10 *Como* a *es palíndrome se tiene que* $a = \tilde{a}$. *Por lo tanto* $a \diamond \widetilde{a} = \widetilde{a} \diamond a$. *Esto nos conlleva a:*

$$\begin{aligned} a \diamond \widetilde{a} &= 10^{\varsigma(\widetilde{a})} a + \widetilde{a} \\ &= 10^{\varsigma(a)} a + a \\ &= a(10^{\varsigma(a)} + 1) \end{aligned}$$

Como $10^{\varsigma(a)} + 1 \in \mathbb{N}$ *se concluye que* $a | a \diamond \widetilde{a}$ *y* $a | (\widetilde{a} \diamond a)$.

PROPOSICIÓN 4.8 *Sean* $a, b \in \mathbb{A}$ *palíndromes tales que*

$$a = a_0 \diamond a_1 \diamond \cdots \diamond a_n, \quad b = b_0 \diamond b_1 \diamond \cdots \diamond b_n, \quad a_i + b_i \leq 9, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Entonces $a + b$ *es palíndrome.*

PRUEBA 11 *Debido a que* $a + b = (a_1 \diamond a_2 \diamond \cdots \diamond a_n) + (b_1 \diamond b_2 \diamond \cdots \diamond b_n)$*, se tiene que*

$$a + b = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} 10^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} b_{n-i} 10^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (a_{n-i} + b_{n-i}) 10^{n-i}, \quad a_i + b_i \leq 9.$$

Además, puesto que a *y* b *son palíndromes entonces,* $c_i = a_i + b_i = a_{n-i} + b_{n-i} = c_{n-i}$*, por lo tanto*

$$a + b = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} 10^{n-i} = c_0 \diamond \cdots \diamond c_n$$

es palíndrome.

PROPOSICIÓN 4.9 *Sean* $a \in \mathbb{A}$ *palíndrome,* $b \in \mathbb{A}$ *tales que*

$$a = a_1 \diamond a_2 \diamond \cdots \diamond a_n, \quad \varsigma(b) = 1, \quad b \cdot a_i \leq 9, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Entonces $a \cdot b$ *es palíndrome.*

PRUEBA 12 *Debido a que* $a \cdot b = (a_1 \diamond a_2 \diamond \cdots \diamond a_n) \cdot b$*, se tiene que*

$$a \cdot b = b \cdot \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} 10^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (b \cdot a_{n-i})\, 10^{n-i}, \quad b \cdot a_i \leq 9.$$

Además, puesto que a y b son palíndromes entonces, $c_i = a_i \cdot b = a_{n-i} \cdot b = c_{n-i}$, por lo tanto

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}10^{n-i} = c_0 \diamond \cdots \diamond c_n$$

es palíndrome.

PROPOSICIÓN 4.10 *Sea $m \in \mathbb{A}$ tal que $ç(m) = 1$. Entonces*

$$9m \cdot (1 \diamond 2 \diamond 3 \diamond \ldots \diamond 7 \diamond 9) = \underbrace{m \diamond m \diamond \ldots \diamond m}_{9\,veces}$$

PRUEBA 13 *Debido a que $m \in \mathbb{A}$ es tal que $ç(m) = 1$, entonces*

$$\begin{aligned} 9 \cdot m \cdot (1 \diamond 2 \diamond 3 \diamond \ldots \diamond 7 \diamond 9) &= m \cdot 9 \cdot (12345679) \\ &= m \cdot 111111111 \\ &= m \cdot \left(\underbrace{1 \diamond 1 \diamond \ldots \diamond 1}_{9\,veces} \right) \\ &= \underbrace{m \diamond m \diamond \ldots \diamond m}_{9\,veces} \end{aligned}$$

obteniendo el resultado deseado.

PROPOSICIÓN 4.11 *Sea $0 \leq m \leq 9 \in \mathbb{N}$. Entonces las cifras finales de m^2 y $(10 - m^2)$ coinciden.*

PRUEBA 14 *Sean $0 \leq m, p, q, r, s \leq 9 \in \mathbb{Z}$ Tales que $2m = p \diamond q$ y $m^2 = r \diamond s$. Por lo tanto*

$$\begin{aligned} (10 - m)^2 &= 100 - 20m + m^2 \\ &= 100 - 10(p \diamond q) + r \diamond s \\ &= 100 - 10(p \diamond q) + 10r + s \\ &= 10(10 - (p \diamond q) + r) + s \\ &= (10 + r - (p \diamond q)) \diamond s \end{aligned}$$

Al ser $(10 - m)$ un entero positivo, obligatoriamente $10 + r > p \diamond q$ y esto concluye la prueba.

EJEMPLO 10 $3^2 = 9$, $7^2 = 49$.

COLORARIO 4 *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces la cifra final de n^2 pertenece al conjunto $\{1, 4, 5, 6, 9\}$.*

PRUEBA 15 *Basta sustituir m en la Proposición 4.11 por $1, 2, \ldots 9$.*

Algo atractivo que se encuentran en la Proposición 4.11 y en su corolario corresponde al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} n & \longleftrightarrow & n^2 \\ \underbrace{1 \qquad 9} & \vdots & \underbrace{1} \\ \underbrace{2 \quad\; 8} & & \underbrace{4} \\ \underbrace{3 \quad 7} & & \underbrace{9} \\ \underbrace{4 \;\, 6} & & \underbrace{6} \\ \underbrace{5} & & \underbrace{5} \end{array}$$

PROPOSICIÓN 4.12 *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

1. $0 \diamond n = n$
2. $n \diamond 0 = 10n$

PRUEBA 16 *Se hace la prueba de acuerdo a cada ítem.*

1. $0 \diamond n = 0 \cdot 10^{\varsigma(n)} + n = 0 + n = n.$
2. $n \diamond 0 = n \cdot 10^{\varsigma(0)} + 0 = 10n + 0 = 10n.$

La proposición anterior, aunque muy elemental, nos indica que la operación Pegamiento en los naturales tiene *módulo o elemento neutro* a izquierda, el cual es el cero. Mientras que, al pegar el cero por la derecha a un número natural, estamos multiplicando por diez a dicho número. Se puede re-demostrar de una manera más sencilla el Corolario 3 usando la Proposición 4.12 debido a que $(n((n+1) \diamond 0) + 2) \diamond 5 = (10n(n+1) + 2) \diamond 5 = (n(n+1) \diamond 2) \diamond 5 = (n(n+1)) \diamond 25$.

4.3. Cuadrado de un número natural con cifra final cinco

Siguiendo el mismo procedimiento para elevar números naturales al cuadrado, las siguientes proposiciones son réplicas que permiten obtener el cuadrado de un número natural terminado en 5, basándonos en las dos últimas cifras.

PROPOSICIÓN 4.13 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones se tienen*

1. $(n \diamond 05)^2 = (n(n \diamond 1)) \diamond 025$
2. $(n \diamond 15)^2 = (n(n \diamond 3)) \diamond 225$
3. $(n \diamond 25)^2 = (n(n \diamond 5)) \diamond 625$
4. $(n \diamond 35)^2 = (n(n \diamond 7) + 1) \diamond 225$
5. $(n \diamond 45)^2 = (n(n \diamond 9) + 2) \diamond 025$
6. $(n \diamond 55)^2 = (n((n+1) \diamond 1)) + 3) \diamond 025$
7. $(n \diamond 65)^2 = (n((n+1) \diamond 3)) + 4) \diamond 225$

8. $(n \diamond 75)^2 = (n((n+1) \diamond 5)) + 5) \diamond 625$

9. $(n \diamond 85)^2 = (n((n+1) \diamond 7)) + 7) \diamond 225$

10. $(n \diamond 95)^2 = (n((n+1) \diamond 9)) + 9) \diamond 025$

PRUEBA 17 *Se hace la prueba de acuerdo a cada ítem.*

1.

$$\begin{aligned} (n \diamond 05)^2 &= (10^2 n + 5)^2 \\ &= (100n + 5)^2 \\ &= 10000n^2 + 1000n + 25 \\ &= 10^3(10n^2 + n) + 25 \\ &= (10n^2 + n) \diamond 025 \\ &= (n(10n + 1)) \diamond 025 \\ &= (n(n \diamond 1)) \diamond 025 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (n \diamond 15)^2 &= (10^2 n + 15)^2 \\ &= 10000n^2 + 3000n + 225 \\ &= 10^3(10n^2 + 3n) + 225 \\ &= (10n^2 + 3n) \diamond 225 \\ &= (n(10n + 3)) \diamond 225 \\ &= (n(n \diamond 3)) \diamond 225 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (n \diamond 25)^2 &= (10^2 n + 25)^2 \\ &= 10000n^2 + 5000n + 625 \\ &= 1000(n(10n + 5)) + 625 \\ &= (n(10n + 5)) \diamond 625 \\ &= (n(n \diamond 5)) \diamond 625 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (n \diamond 35)^2 &= (10^2 n + 35)^2 \\ &= 10000n^2 + 7000n + 1225 \\ &= 1000(n(10n + 7) + 1) + 225 \\ &= (n(10n + 7) + 1) \diamond 225 \\ &= (n(n \diamond 7) + 1) \diamond 225 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(n\diamond 45)^2 &= (10^2n+45)^2\\ &= 10000n^2+9000n+2025\\ &= 1000(n(10n+9)+2)+025\\ &= (n(10n+9)+2)\diamond 025\\ &= (n(n\diamond 9)+2)\diamond 025\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(n\diamond 55)^2 &= (10^2n+55)^2\\ &= 10000n^2+11000n+3025\\ &= 1000(n(10(n+1)+1)+3)+025\\ &= (n(10(n+1)+1)+3)\diamond 025\\ &= (n(n+1)\diamond 1)+3)\diamond 025\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}(n\diamond 65)^2 &= (10^2n+65)^2\\ &= 10000n^2+13000n+4225\\ &= 1000(n(10(n+1)+3)+4)+225\\ &= (n(10(n+1)+3)+4)\diamond 225\\ &= (n(n+1)\diamond 3)+4)\diamond 225\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}(n\diamond 75)^2 &= (10^2n+75)^2\\ &= 10000n^2+15000n+5625\\ &= 1000(n(10(n+1)+5)+5)+625\\ &= (n(10(n+1)+5)+5)\diamond 625\\ &= (n(n+1)\diamond 5)+5)\diamond 625\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}(n\diamond 85)^2 &= (10^2n+85)^2\\ &= 10000n^2+17000n+7225\\ &= 1000(n(10(n+1)+7)+7)+225\\ &= (n(10(n+1)+7)+7)\diamond 225\\ &= (n(n+1)\diamond 7)+7)\diamond 225\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}(n\diamond 95)^2 &= (10^2n+95)^2\\ &= 10000n^2+19000n+9025\\ &= 1000(n(10(n+1)+9)+9)+025\\ &= (n(10(n+1)+9)+9)\diamond 025\\ &= (n(n+1)\diamond 9)+9)\diamond 025\end{aligned}$$

Debido a que $n\in\mathbb{N}$ se tiene que obteniendo el resultado deseado.

EJEMPLO 11 *Ilustraremos la proposición anterior de acuerdo a cada caso.*

1. *Sea* $n=12$ *entonces:* $1205^2=(12\diamond 05)^2=(12(12\diamond 1))\diamond 025=1452\diamond 025=1452025.$
2. *Sea* $n=21$ *entonces:* $2115^2=(21\diamond 15)^2=(21(21\diamond 3))\diamond 225=4473\diamond 225=4473225.$
3. *Sea* $n=43$ *entonces:* $4325^2=(43\diamond 25)^2=(43(43\diamond 5))\diamond 625=18705\diamond 625=18705625.$
4. *Sea* $n=74$ *entonces:* $7435^2=(74\diamond 35)^2=(74(74\diamond 7)+1)\diamond 225=55279\diamond 225=55279225.$
5. *Sea* $n=25$ *entonces:* $2545^2=(25\diamond 45)^2=(25(25\diamond 9)+2)\diamond 025=6477\diamond 025=6477025.$
6. *Sea* $n=6$ *entonces:* $655^2=(6\diamond 55)^2=(6(7\diamond 1)+3)\diamond 025=429\diamond 025=429025.$
7. *Sea* $n=95$ *entonces:* $9565^2=(95\diamond 65)^2=(95((95+1)\diamond 3)+4)\diamond 225=91489\diamond 225=91489225.$
8. *Sea* $n=37$ *entonces:* $3775^2=(37\diamond 75)^2=(37((37+1)\diamond 5)+5)\diamond 625=14250\diamond 625=14250625.$
9. *Sea* $n=12$ *entonces:* $1285^2=(12\diamond 85)^2=(12((12+1)\diamond 7)+7)\diamond 225=1651\diamond 225=1651225.$
10. *Sea* $n=23$ *entonces:* $2395^2=(23\diamond 95)^2=(23((23+1)\diamond 9)+9)\diamond 025=5736\diamond 025=5736025.$

En la siguiente proposición no solo se recogen los resultados de la Proposición 4.13 sino que también se da el método para construirla.

PROPOSICIÓN 4.14 *Sean* $0\le m,p,q,r,s\le 9\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$. *Entonces,*

$$(n\diamond(m\diamond 5))^2=(n((n+p)\diamond q)+r)\diamond s\diamond 25,\quad p\diamond q=\frac{m\diamond 5}{5},\quad r\diamond s=m(m+1).$$

PRUEBA 18

$$
\begin{aligned}
(n \diamond (m \diamond 5))^2 &= (n \diamond (10m+5))^2 \\
&= (10^2 n + (10m+5))^2 \\
&= 10000n^2 + 2 \cdot 100 \cdot n(10m+5) + (10m+5)^2 \\
&= 10000n^2 + 2000nm + 1000n + 100m^2 + 100m + 25 \\
&= 100(100n^2 + 20nm + 10n + m^2 + m) + 25 \\
&= (100n^2 + 20nm + 10n + m^2 + m) \diamond 25 \\
&= (100n^2 + 20nm + 10n + m(m+1)) \diamond 25 \\
&= (100n^2 + 20nm + 10n + r \diamond s) \diamond 25 \\
&= (100n^2 + 20nm + 10n + 10r + s) \diamond 25 \\
&= (10(10n^2 + 2nm + n) + r) + s) \diamond 25 \\
&= ((10n^2 + 2nm + n) + r) \diamond s) \diamond 25 \\
&= (n(10n + 2m + 1) + r) \diamond s \diamond 25 \\
&= \left(n\left(10n + \frac{10m+5}{5}\right) + r\right) \diamond s \diamond 25 \\
&= \left(n\left(10n + \frac{m \diamond 5}{5}\right) + r\right) \diamond s \diamond 25 \\
&= (n\,(10n + p \diamond q) + r) \diamond s \diamond 25 \\
&= (n\,(10n + 10p + q) + r) \diamond s \diamond 25 \\
&= (n\,(10(n+p) + q) + r) \diamond s \diamond 25 \\
&= (n((n+p) \diamond q) + r) \diamond s \diamond 25
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 12 *Calculemos el cuadrado de* 375. *Por tanto* $n = 3$, $m = 7$, $p \diamond q = 75/5 = 15$, $r \diamond s = 56$, *lo cual conduce a* $p = 1$, $q = 5$, $r = 5$, $s = 6$. *Entonces:* $375^2 = (3 \diamond (7 \diamond 5))^2 = (3((3+1) \diamond 5) + 5) \diamond 6 \diamond 25 = (3(45) + 5) \diamond 625 = 140625$.

4.4. Raíz cuadrada de un número natural con cifra final venticinco

Como aplicación de la Proposición 4.13 se tiene el siguiente resultado.

COLORARIO 5 *Sean* $n, r, m \in \mathbb{N}$. *Las siguientes afirmaciones se tienen.*

1. *Si* $r = m \diamond 025$ *y* $m = n(n \diamond 1)$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 05$
2. *Si* $r = m \diamond 225$ *y* $m = n(n \diamond 3)$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 15$
3. *Si* $r = m \diamond 625$ *y* $m = n(n \diamond 5)$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 25$
4. *Si* $r = m \diamond 225$ *y* $m = n(n \diamond 7) + 1$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 35$
5. *Si* $r = m \diamond 025$ *y* $m = n(n \diamond 9) + 2$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 45$
6. *Si* $r = m \diamond 025$ *y* $m = n((n+1) \diamond 1) + 3$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 55$
7. *Si* $r = m \diamond 225$ *y* $m = n((n+1) \diamond 3) + 4$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 65$

8. *Si* $r = m \diamond 625$ *y* $m = n((n+1)\diamond 5) + 5$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 75$
9. *Si* $r = m \diamond 225$ *y* $m = n((n+1)\diamond 7) + 7$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 85$
10. *Si* $r = m \diamond 025$ *y* $m = n((n+1)\diamond 9) + 9$ *entonces* $\sqrt{r} = n \diamond 95$

PRUEBA 19 *Se procede de acuerdo a cada ítem.*

1. *Por hipótesis* $r = m \diamond 025$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 025} \\
&= \sqrt{(n(n\diamond 1))\diamond 025} \\
&= \sqrt{(n(10n+1))\diamond 025} \\
&= \sqrt{(10n^2+n)\diamond 025} \\
&= \sqrt{10^3(10n^2+n)+25} \\
&= \sqrt{10000n^2+1000n+25} \\
&= \sqrt{(100n+5)^2} \\
&= 10^2n+5 \\
&= n\diamond 05
\end{aligned}$$

2. *Por hipótesis* $r = m \diamond 225$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 225} \\
&= \sqrt{(n(n\diamond 3))\diamond 225} \\
&= \sqrt{(n(10n+3))\diamond 225} \\
&= \sqrt{(10n^2+3n)\diamond 225} \\
&= \sqrt{10^3(10n^2+3n)+225} \\
&= \sqrt{10000n^2+3000n+225} \\
&= \sqrt{(100n+15)^2} \\
&= 10^2n+15 \\
&= n\diamond 15
\end{aligned}$$

3. *Por hipótesis* $r = m \diamond 625$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 625} \\
&= \sqrt{(n(n\diamond 5))\diamond 625} \\
&= \sqrt{(n(10n+5))\diamond 625} \\
&= \sqrt{(10n^2+5n)\diamond 625} \\
&= \sqrt{10^3(10n^2+5n)+625} \\
&= \sqrt{10000n^2+5000n+625} \\
&= \sqrt{(100n+25)^2} \\
&= 10^2n+25 \\
&= n\diamond 25
\end{aligned}$$

4. *Por hipótesis* $r = m \diamond 225$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 225}\\
&= \sqrt{(n(n \diamond 7) + 1) \diamond 225}\\
&= \sqrt{(n(10n + 7) + 1) \diamond 225}\\
&= \sqrt{1000(n(10n + 7) + 1) + 225}\\
&= \sqrt{10000n^2 + 7000n + 1225}\\
&= \sqrt{(10^2n + 35)^2}\\
&= 10^2n + 35\\
&= n \diamond 35
\end{aligned}$$

5. *Por hipótesis* $r = m \diamond 025$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 025}\\
&= \sqrt{(n(n \diamond 9) + 2) \diamond 025}\\
&= \sqrt{(n(10n + 9) + 2) \diamond 025}\\
&= \sqrt{1000(n(10n + 9) + 2) + 025}\\
&= \sqrt{10000n^2 + 9000n + 2025}\\
&= \sqrt{(10^2n + 45)^2}\\
&= 10^2n + 45\\
&= n \diamond 45
\end{aligned}$$

6. *Por hipótesis* $r = m \diamond 025$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 025}\\
&= \sqrt{(n(n + 1) \diamond 1) + 3) \diamond 025}\\
&= \sqrt{(n(10(n + 1) + 1) + 3) \diamond 025}\\
&= \sqrt{1000(n(10(n + 1) + 1) + 3) + 025}\\
&= \sqrt{10000n^2 + 11000n + 3025}\\
&= \sqrt{(10^2n + 55)^2}\\
&= 10^2n + 55\\
&= n \diamond 55
\end{aligned}$$

7. *Por hipótesis* $r = m \diamond 225$, *luego*

$$\begin{aligned}\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 225}\\ &= \sqrt{(n(n+1) \diamond 3) + 4) \diamond 225}\\ &= \sqrt{(n(10(n+1)+3)+4) \diamond 225}\\ &= \sqrt{1000(n(10(n+1)+3)+4)+225}\\ &= \sqrt{10000n^2+13000n+4225}\\ &= \sqrt{(10^2n+65)^2}\\ &= 10^2n+65\\ &= n \diamond 65\end{aligned}$$

8. *Por hipótesis* $r = m \diamond 625$, *luego*

$$\begin{aligned}\sqrt{r} = &\quad \sqrt{m \diamond 625}\\ &= \sqrt{(n(n+1) \diamond 5) + 5) \diamond 625}\\ &= \sqrt{(n(10(n+1)+5)+5) \diamond 625}\\ &= \sqrt{1000(n(10(n+1)+5)+5)+625}\\ &= \sqrt{10000n^2+15000n+5625}\\ &= \sqrt{(10^2n+75)^2}\\ &= 10^2n+75\\ &= n \diamond 75\end{aligned}$$

9. *Por hipótesis* $r = m \diamond 225$, *luego*

$$\begin{aligned}\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 225}\\ &= \sqrt{(n(n+1) \diamond 7) + 7) \diamond 225}\\ &= \sqrt{(n(10(n+1)+7)+7) \diamond 225}\\ &= \sqrt{1000(n(10(n+1)+7)+7)+225}\\ &= \sqrt{10000n^2+17000n+7225}\\ &= \sqrt{(10^2n+85)^2}\\ &= 10^2n+85\\ &= n \diamond 85\end{aligned}$$

10. *Por hipótesis* $r = m \diamond 025$, *luego*

$$\begin{aligned}
\sqrt{r} &= \sqrt{m \diamond 025} \\
&= \sqrt{(n(n+1) \diamond 9) + 9) \diamond 025} \\
&= \sqrt{(n(10(n+1) + 9) + 9) \diamond 025} \\
&= \sqrt{1000(n(10(n+1) + 9) + 9) + 025} \\
&= \sqrt{10000n^2 + 19000n + 9025} \\
&= \sqrt{(10^2 n + 95)^2} \\
&= 10^2 n + 95 \\
&= n \diamond 95
\end{aligned}$$

EJEMPLO 13 *Se ilustra cada caso.*

1. *Sea* $r = 11025$ *así* $m = 11 = 1(1 \diamond 1)$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{11025} = 1 \diamond 05 = 105$.
2. *Sea* $r = 46225$ *así* $m = 46 = 2(2 \diamond 3)$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{46225} = 2 \diamond 15 = 215$.
3. *Sea* $r = 105625$ *así* $m = 105 = 3(3 \diamond 5)$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{105625} = 3 \diamond 25 = 325$.
4. *Sea* $r = 189225$ *así* $m = 189 = 4(4 \diamond 7) + 1$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{189225} = 4 \diamond 35 = 435$.
5. *Sea* $r = 297025$ *así* $m = 297 = 5(5 \diamond 9) + 2$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{297025} = 5 \diamond 05 = 545$.
6. *Sea* $r = 429025$ *así* $m = 429 = 6(7 \diamond 1) + 3$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{429025} = 6 \diamond 55 = 655$.
7. *Sea* $r = 40513225$ *así* $m = 40513 = 63(64 \diamond 3) + 4$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{40513225} = 63 \diamond 65 = 6365$.
8. *Sea* $r = 600625$ *así* $m = 600 = 7(8 \diamond 5) + 5$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{600625} = 7 \diamond 75 = 775$.
9. *Sea* $r = 66994225$ *así* $m = 66994 = 81(82 \diamond 7) + 7$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{66994225} = 81 \diamond 85 = 8185$.
10. *Sea* $r = 1199025$ *así* $m = 1199 = 10(11 \diamond 9) + 9$ *y por tanto:* $\sqrt{r} = \sqrt{1199025} = 10 \diamond 95 = 1095$.

De la Proposición 4.14 y recogiendo los resultados del Corolario 6 de una forma sistemática, se tiene el siguiente resultado.

COLORARIO 6 *Sean* $0 \leq m, p, q, r, s \leq 9$, $n, j \in \mathbb{N}$ *tales que* $j = n((n+p) \diamond q) + r$, $p \diamond q = \frac{1}{5}(m \diamond 5)$ *y* $r \diamond s = m(m+1)$. *Entonces* $\sqrt{j \diamond s \diamond 25} = n \diamond (m \diamond 5)$.

PRUEBA 20

$$\begin{aligned}
\sqrt{j \diamond s \diamond 25} &= \sqrt{(n((n+p) \diamond q) + r) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{(n\,(10(n+p)+q)+r) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{(n\,(10n+10p+q)+r) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{(n\,(10n+p \diamond q)+r) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{\left(n\left(10n+\frac{m \diamond 5}{5}\right)+r\right) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{\left(n\left(10n+\frac{10m+5}{5}\right)+r\right) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{(n(10n+2m+1)+r) \diamond s \diamond 25} \\
&= \sqrt{((10n^2+2nm+n)+r) \diamond s) \diamond 25} \\
&= \sqrt{(10(10n^2+2nm+n)+r)+s) \diamond 25} \\
&= \sqrt{(100n^2+20nm+10n+10r+s) \diamond 25} \\
&= \sqrt{(100n^2+20nm+10n+r \diamond s) \diamond 25} \\
&= \sqrt{(100n^2+20nm+10n+m(m+1)) \diamond 25} \\
&= \sqrt{(100n^2+20nm+10n+m^2+m) \diamond 25} \\
&= \sqrt{100(100n^2+20nm+10n+m^2+m)+25} \\
&= \sqrt{10000n^2+2000nm+1000n+100m^2+100m+25} \\
&= \sqrt{10000n^2+2 \cdot 100 \cdot n(10m+5)+(10m+5)^2} \\
&= \sqrt{(10^2n+(10m+5))^2} \\
&= 10^2n+(10m+5) \\
&= n \diamond (10m+5) \\
&= n \diamond (m \diamond 5)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 14 *Calculemos la raíz cuadrada de* 180625. *Como* $s = 6$, $r = 0$ *ó* $r = 5$ *porque* $r \diamond s = m(m+1)$. *Si fuese* $r = 0$, *entonces* $m = 2$. *Por tanto,* $p \diamond q = \frac{1}{5}(25) = 5$, *luego* $p = 0$ *y* $q = 5$. *De esta forma tenemos que* $j = 180 = n(n \diamond 5)$ *y descomponiendo* 180 *en factores primos tenemos que* $180 = 4(45)$, *de lo cual obtenemos* $n = 4$. *Así que* $\sqrt{180625} = 4 \diamond 2 \diamond 5 = 425$ *y el caso* $r = 5$ *no se tiene por la unicidad de la raíz cuadrada que estamos considerando.*

Debemos recordar que por la Proposición 4.3 se cumple la asociatividad del Pegamiento en números naturales, por lo tanto en la Proposición 4.14 y en el Corolario 6, así como en las respectivas demostraciones, podemos utilizar $(n \diamond m) \diamond 5$ en lugar de $n \diamond (m \diamond 5)$ y obtener los mismos resultados.

Conclusiones

1. Como se mencionó al principio, se ha presentado el encanto de las operaciones Pegar y Reversar sobre los números naturales que por su sencilla comprensión y manejo, pueden ser llevadas a las aulas y tener una divertida clase de matemáticas. Se han demostrado corolarios por razones netamente pedagógicas,

aún cuando éstos no eran necesarios por ser consecuencias inmediatas de teoremas o proposiciones.

2. También, se expuso un método alternativo para calcular el cuadrado y la raíz de un número natural. Algoritmo que resulta ser menos tedioso y óptimo para quienes decidan hacer uso de él de forma manual.

3. Retomando el trabajo de anteriores publicaciones sobre las operaciones con números naturales se encontró un comportamiento regular con la divisibilidad.

Se han dejado algunas operaciones de los naturales sin explorar como la suma y la multiplicación, lo que podría motivar al lector a trabajar en ello, y sobre la generalización del comportamiento de Pegar y Reversar con la potenciación. Actualmente se desarrollan trabajos en donde se involucran las operaciones Pegar y Reversar:

1. Polinomios en una indeterminada.
2. Álgebra lineal.
3. Ecuaciones diferenciales.
4. Polinomios ortogonales en varias variables.
5. Métodos numéricos.
6. Dinámica combinatoria.
7. Teoría de grupos.
8. Física matemática.

Esperamos que los lectores hayan disfrutado de la lectura de este trabajo y en su mente quede la idea de que las operaciones Pegar y Reversar aparecen donde uno menos lo espera: *Entonces se le acercó Pedro y le dijo: Señor, ¿cuántas veces perdonaré a mi hermano que peque contra mí? ¿Hasta siete? Jesús le dijo: No te digo hasta siete, sino aun hasta setenta veces siete. Mateo 18, 21–22.* En esta cita bíblica, el número al que Jesús se refiere es

$$\underbrace{7 \diamond 7 \diamond \cdots \diamond 7 \diamond 7}_{70\ veces}$$

Agradecimientos

Los autores dedican este trabajo a la memoria del Profesor Jesús Hernando Pérez (Pelusa), impulsor y asesor de las primeras publicaciones sobre Pegar y Reversar. Los autores agradecen a Adriana Chuquen las sugerencias y comentarios que fueron útiles para finalizar este trabajo.

Referencias

[1] P.B. Acosta-Humánez, *Genealogía de permutaciones simples de orden una potencia de dos*. Revista Colombiana de Matemáticas, **42**, (2008) no. 1, 1–14.

[2] P.B. Acosta-Humánez, *La operación Pegamiento y el cuadrado de números naturales*, Civilizar, **4**, (2003) 85–97.

[3] P.B. Acosta-Humánez, M. Aranda, R. Núñez *Some remarks on a generalized vector product*, Revista Integración, **29**, (2011) no. 2, 151–162.

[4] P.B. Acosta-Humánez, A.L. Chuquen, A.M. Rodríguez *On Pasting and Reversing operations over some rings*, Arxiv, http://arxiv.org/abs/1010.1967v1, Octubre 10/2010, 19 págs.

[5] P.B. Acosta-Humánez, A.L. Chuquen, A.M. Rodríguez *Pasting and Reversing operations over some rings*, Boletín de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia, **17**, (2010), no. 2, 143–164.

[6] P.B. Acosta-Humánez, A.L. Chuquen, A.M. Rodríguez *Pasting and Reversing operations over some vector spaces* Boletín de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia, **20**, (2013), no. 2, 145–161.

[7] P.B. Acosta-Humánez, A.L. Chuquen, A.M. Rodríguez *Pasting and Reversing Operations over Vector Spaces*, Arxiv, http://arxiv.org/abs/1209.4598v1, Septiembre 19/2012, 19 págs.

[8] P.B. Acosta-Humánez, O.E. Martínez, *Simple permutations with order* $4n + 2$, Arxiv, http://arxiv.org/abs/1012.2076v1, Diciembre 9/ 2010, 19 págs.

[9] A.L. Chuquen,*Pegar y Reversar* Trabajo de Grado, Universidad Sergio Arboleda, Diciembre 16, 2011.

[10] L. R. Jiménez B., J. E. Gordillo A., G. N. Rubiano O., *Teoría de números (para principiantes)*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Sede Bogotá, 2004.

Para citar este articulo: Primitivo ACOSTA HUMÁNEZ et al, 2015, *"Algunas Observaciones sobre Pegar y Reversar en Números Naturales"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.