Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 1 (2015)

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO MATUA

Revista del programa del matemáticas (2015) 59-64

Solución aproximada del oscilador armónico simple utilizando el método de las diferencias finitas.

Approximate solution of simple harmonic oscillator using the finite difference method

Cesar MAESTRE[1]

[1]*Doc. Facultad de ingeniería, Universidad de la Guajira, Km 5 vía Maicao, Colombia*
e-mail: cdmaestre@uniguajira.edu.co

Eder ALFARO[2]

[2]*Doc. Facultad de ingeniería, Universidad de la Guajira, Km 5 vía Maicao, Colombia*
e-mail: ealfaro@uniguajira.edu.co

Francisco RACEDO[3]

[3]*Doc. Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Km 7 Puerto Colombia - Colombia*
e-mail:fran@mail.uniatlantico.edu.co

Recibido:09/05/2015 - Aceptado:11/06/2015

Resumen

En el presente estudio se utilizó el método de las diferencias finitas (MDF) para la descripción matemática del movimiento armónico simple de un sistema masa resorte. Este método consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierte en las incógnitas y de esta forma el sistema de ecuaciones algebraicas puede ser resuelto a través de operaciones aritméticas. La solución de este método se comparó con las resueltas analíticamente.

Palabras claves: MDF, sistema masa resorte, movimiento armónico simple, ecuaciones diferenciales parciales.

Abstract

In the present study used the method of the finite differences for the mathematical description of the simple harmonic movement of system mass spring. The method consists of an approach of the partial derivatives for algebraic expressions with the values of the dependent variable in a limited number of chosen points. As result of the aprroach, the partial differential equation that describes the problem is replaced by a finite number of algebraic equation, in terms of the values of the dependent variable in chosen points. The value of the chosen points turns into the unknowns and thus the system of algebraic equations can be solved across arithmetical operations. The solution of this method is compared with the ones solves analytically.

Keywords: MDF, mass spring system, simple harmonic motion, partial differential equations.

---

1. Introducción

El movimiento armónico simple es un fenómeno físico de tipo periódico el cual puede ser descrito a través de las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden. A través del presente estudio se pretende resolver la ecuación diferencial de segundo orden a través del método de las diferencias finitas. La aplicación de este método se debe a que muchos problemas físicos que nos rodean se comportan regidos por ecuaciones diferenciales, de esta forma cuando el fenómeno se compone de varios parámetros independientes, este se puede asociar a una función de varias variables independientes o a una ecuación diferencial en derivadas parciales. Cuanto más fiel a la realidad se desea que sea la representación matemática que modela el problema físico que se quiere estudiar, más complejas se vuelven estas ecuaciones diferenciales, siendo de mayor orden e introduciendo más derivadas parciales. [1]

Aunque existen muchos métodos para resolver este tipo de ecuaciones, el estudio se enfocara en la aplicación del método de las diferencias finitas, esto debido a que aporta una gran versatilidad para dar solución a las ecuaciones diferenciales.

Partiendo del concepto del oscilador armónico simple, si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, la oscilación se denomina movimiento armónico simple, que se abrevia MAS. Este fenómeno esta descrito en términos de una ecuación diferencial de segundo orden [2] .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

2. Aspectos teóricos del MDF

La aplicación del método de las diferencias finitas para la solución de la ecuación diferenciales parte con la implementación de la Expansión en Series de Taylor [3], en donde se plantea lo siguiente:

Sea $f(x)$ una función definida en (a, b) que tiene hasta la *k-énesima* derivada, entonces la expansión de $f(x)$ usando series de Taylor alrededor del punto x_i contenido en el intervalo (a, b) será

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!}\frac{df}{dx}|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_i} + \cdots + \frac{(x - x_i)^k}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}|_{\epsilon} \tag{2}$$

Donde $\epsilon = x_i + \theta(x_i)$ y $0 < \theta < 1$.

Con base en la ecuación (2) se pueden encontrar aproximaciones de la primera derivada, cuyas ecuaciones se muestran a continuación:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \tag{3}$$

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \tag{4}$$

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \tag{5}$$

Las ecuaciones (3), (4) y (5) representan las diferencias progresivas, regresivas y centradas respectivamente.

Para el caso de las derivadas de segundo orden, también se parte del desarrollo de Taylor:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_p) \tag{6}$$

y

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_r) \tag{7}$$

y eliminado las derivadas primeras, sumando las ecuaciones anteriores y despejando se encuentra que

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f^{(4)}(\xi_c) \tag{8}$$

Así, la aproximación a la segunda derivada usando diferencias centradas con un error de truncamiento $O_c(?x2)$ es

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{\Delta x^2} \tag{9}$$

En donde la expresión se reduce a [4]

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} \tag{10}$$

Aplicando la ecuación (10) en la ecuación (1), tenemos

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} + \omega^2 f_i = 0 \tag{11}$$

$$f_{i-1}\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) + f_i\left(\omega^2 - \frac{2}{\Delta x^2}\right) + f_{i+1}\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) = 0 \tag{12}$$

Siendo $A = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)$, $B = \left(\omega^2 - \frac{2}{\Delta x^2}\right)$, se obtiene el sistema recurrente

$$f_{i-1}A + f_iB + f_{i+1}A = 0 \tag{13}$$

Con esta ecuación concurrente se puede plantear un sistema de ecuaciones lineales las cuales pueden resolverse mediantes métodos convencionales para nuestro caso el sistema gaussiano.

3. Análisis y discuaión

Con el fin de demostrar la efectividad del método:

Se considerara un sistema que genera un movimiento armónico simple, cuya ecuación está definida por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 25x = 0$$

Sujeto a las condiciones de frontera: en $x = 0$: $f(x) = 4$ y en $x = 0$ [5].

La solución analítica es la siguiente:

$$f(x) = \frac{24}{10}e^{5x} + \frac{16}{10}e^{-5x}$$

Aplicando el método de diferencias finitas, bajo estas condiciones de frontera se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ A & B & A & 0 \\ 0 & A & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha'\Delta x A - \alpha B \\ -\alpha A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo $A = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)$, $B = \left(\omega^2 - \frac{2}{\Delta x^2}\right)$, $\Delta x = 0{,}1$.

Se tiene que Siendo $A = \frac{1}{0{,}1^2} = 100$, $B = -25 - \frac{2}{0{,}1^2} = -225$, $\alpha = 4$, $\alpha' = 4{,}16876244$

$$\begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ -225 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & -225 & 100 & 0 \\ 0 & 100 & -225 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 983{,}4 \\ -400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = 4{,}91687624;\ f_3 = 7{,}06297155;\ f_4 = 10{,}9748097;\ f_5 = 12{,}1429455$$

Los resultados muestran que el método de diferencias finitas arroja una gran aproximación al resultado obtenido de forma analítica.

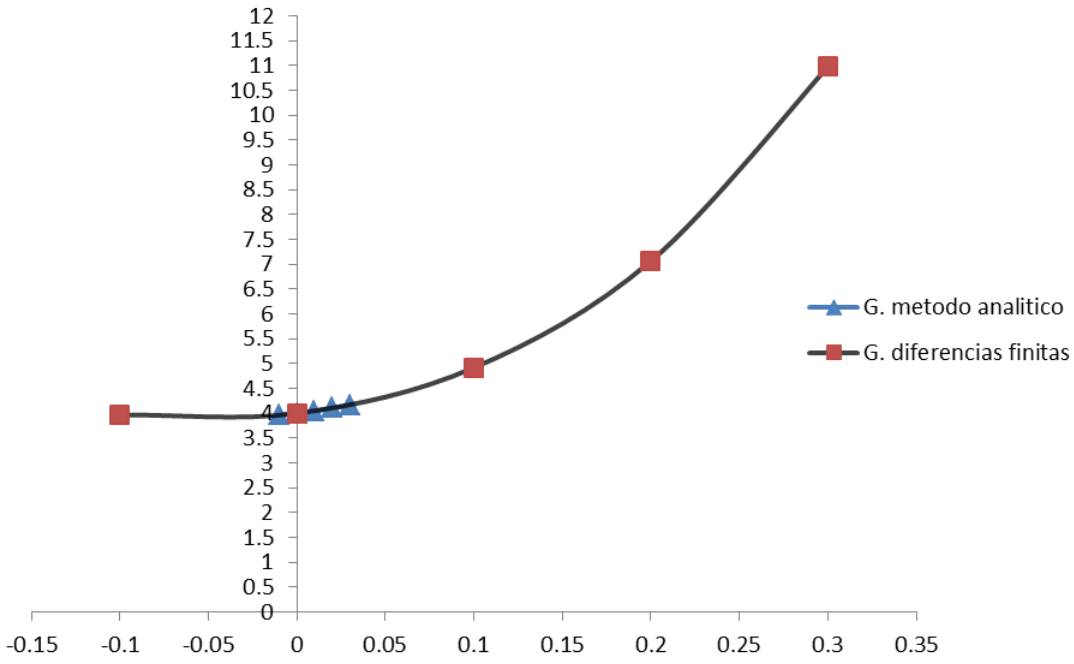

Figura 1: Solución del problema con desratización $\Delta t = 0{,}1$

En la Figura 1, se aprecia que las funciones generadas por ambos métodos toman los mismos puntos en el intervalo de $[-0{,}1, 0{,}3]$ para la solución analítica y aproximada, la desratización que se utilizó es de, $\Delta t = 0{,}1$. Si seguimos disminuyendo Δt obtenemos la mejor aproximación, esto demuestra que el MDF es muy eficiente y eficaz en la solución de las ecuaciones diferenciales, las cuales son de gran aplicación uso en las ciencias e ingenierías.

4. Conclusión

A partir de una compresión apropiada en los conceptos matemáticos y físicos, se pueden obtener soluciones adecuadas, las cuales son fácil de comprender y aplicar en problemas de las ciencias aplicadas utilizando las herramientas computacionales, que son necesarias ya que comúnmente se presentan problemas de ecuaciones diferenciales que no tienen una solución analítica, y por el MDF se llega a una muy buena solución como se pudo demostrar.

Referencias

[1] Juan A. Pérez Ruiz, un método de diferencias finitas para el análisis de la propagación de ondas, Tesis doctoral (2007)

[2] Robert Borrelli. Courtney S. Ecuaciones diferenciales,OXFORD 2002.

[3] Steven C. Chapra, Raymond P. Canalé- MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS, 5ta edición, © 2007, McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A.

[4] A. Carrillo Ledesma y O. Mendoza, Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional, Bernal, Facultad de Ciencias, UNAM, 2015

[5] Shoichiro Nakamura, Métodos Numéricos Aplicados con Software,PRENTICE HALL 1992 .

Para citar este articulo: Cesar MAESTRE et al, 2015, *"Solución aproximada del oscilador armónico simple utilizando el método de las diferencias finitas"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.