UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 1 (2015)

Revista del programa del matemáticas (2015) Pag. 51-58

Una nota sobre los polinomios de Bernoulli, Euler y Genocchi de orden negativo

A note on negative order Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials

William RAMÍREZ[1]
[1]*EDICBAS, Universidad de la Costa CUC, Barranquilla-Colombia*
e-mail: wramirez4@cuc.edu.co

Julio ROMERO P.[2]
[2]*Gecit, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*
e-mail: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co

Alejandro URIELES G.[3]
[3]*Sistema Dinámico y EDO, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*
e-mail: alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Recibido:18/05/2015 - Aceptado:25/05/2015

Resumen

Sea n un entero no negativo y sea $B_n^{(-\alpha)}$, $E_n^{(-\alpha)}$ y $G_n^{(-\alpha)}$ los polinomios de orden negativo de Bernoulli, Euler y Genocchi. En el presente paper estudiamos algunas propiedades de estos polinomios y demostramos algunas propiedades de los polinomios de Genocchi.

Palabras claves: polinomios de Genocchi, números de Genocchi, fórmula de sumación, polinomios de Bernoulli, Euler y Genocchi de orden negativo.

Abstract

Let n be a integer non-negative and let be $B_n^{(-\alpha)}$, $E_n^{(-\alpha)}$ and $G_n^{(-\alpha)}$ the negative order Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. In the present paper we study Some properties of these polynomials and prove some properties Genocchi polynomials.

Keywords: Genocchi polynomials, Genocchi number, summation formula, negative order Bernolli Euler and Genocchi.

1. Introducción

Para $n \in \mathbb{N}$ los polinomios de Genocchi $G_n(x)$ [1, 5] son definidos por medio de la siguiente función generatriz

$$\frac{2z}{e^z+1}e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(x)z^n}{n!}, \quad \text{donde } |z| < \pi. \tag{1}$$

Estos polinomios se pueden expresar de forma explícita (ver [5]) por.

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Los polinomios de Genocchi son de fundamental importancia en el cálculo de las diferencias finitas y tienen variadas aplicaciones en otros campos como la Estadística, Teoría Combinatoria, Teoría de Números, Geometría Diferencial, Topología Algebraica y Análisis Numérico. Por ello, han sido ampliamente estudiados como se registra en [1, 2, 3, 4, 6]. Cuando $x = 0$ aparecen los números de Genocchi

$$\frac{2z}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{3}$$

De aquí sigue $G_o = 0$, $G_1 = 1$ y $G_{2n+1} = 0$, $n \geq 0$.

Muchas extensiones para estos polinomios y otros con estrutura similar, han sido estudiadas [4, 6], en particular en [3] se considera la familia de polinomios de Genocchi generalizados de orden α, $G_n^{(\alpha)}(x)$ donde $\alpha \in \mathbb{N}$, definidos por la siguiente función generatriz

$$\left(\frac{2z}{e^z + 1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n^{(\alpha)}(x) z^n}{n!}, \quad \text{donde } |z| < \pi. \tag{4}$$

De donde, $G_n^{(\alpha)}(x) = 0$ para $n < \alpha$, y $G_n^{(0)}(x) = x^n$. Si $\alpha = 1$ tenemos $G_n^{(1)}(x) = G_n(x)$. Los números de Genocchi de orden α son $G_n^{(\alpha)} = G_n^{(\alpha)}(0)$.

En el presente trabajo se realiza un estudio de los polinomios de Bernoulli $B_n^{(-\alpha)}(x)$, Euler $E_n^{(-\alpha)}(x)$ y Genocchi $G_n^{(-\alpha)}(x)$ de orden negativo tomando como base [3, 5, 6]. En la sección 2 damos algunas observaciones y resultados conocidos de los polinomios generalizados de Bernoulli, Euler y Genocchi que serán utilizados durante el trabajo. Finalmente en la sección 3 estudiamos la demostración de algunas propiedades de los polinomios generalizados de Genocchi de orden negativo $G_n^{(-\alpha)}(x)$.

2. Preliminares

En todo este trabajo, denotamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{C}$ el conjunto de los naturales, enteros no negativos, reales, reales positivos y el conjunto de los números complejos.

OBSERVACIÓN 2.1. *Para $j, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0$, las siguientes propiedades para la suma se cumplen.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right), \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{n} A_{n-j} B_j = \sum_{j=0}^{n} A_j B_{n-j}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} a_{jk}. \tag{7}$$

Los números de Bernoulli B_n y los números de Euler E_n están definidos como los coeficientes de las siguientes funciones generatrices.

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \tag{8}$$

$$sech(z) = \frac{2e^z}{e^{2z}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n z^n}{n!}, \quad |z| < 1/2\pi. \tag{9}$$

Los números de Genocchi G_{2n} están relacionados con los números de Bernoulli B_{2n} y con los números de Euler $E_{2n-1}(0)$ respectivamente por.

$$G_{2n} = 2(1-2^{2n})B_{2n}, \quad G_{2n} = 2nE_{2n-1}(0). \tag{10}$$

Los números de Bernoulli B_n, Euler E_n y los números de Genocchi G_n con $n \leq 10$ son.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385	0	-50521
G_n	0	1	-1	0	1	0	-3	0	17	0	-155

Los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$, de Euler $E_n(x)$ y de Genocchi $G_n(x)$ con $n \leq 5$ son.

n	0	1	2	3	4	5
$B_n(x)$	1	$x-\frac{1}{2}$	$x^2-x+\frac{1}{6}$	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}$	$x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$	$x^5-\frac{5}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{x}{6}$
$E_n(x)$	1	$x-\frac{1}{2}$	x^2-x	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}$	$x^4-2x^3+\frac{2}{3}x$	$x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{2}$
$G_n(x)$	0	1	$2x-1$	$3x^2-3x$	$4x^3-6x^2+1$	$5x^4-10x^3+5x$

Para un parámetro $\alpha \in \mathbb{N}$ [6], los polinomios de Bernoulli generalizados $B_n^{(\alpha)}(x)$ y los polinomios de Euler generalizados $E_n^{(\alpha)}(x)$ de orden α son definidos por las siguientes funciones generatrices.

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(\alpha)}(x)z^n}{n!} \quad |z| < 2\pi, \tag{11}$$

$$\left(\frac{2}{e^z+1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n^{(\alpha)}(x)z^n}{n!} \quad |z| < \pi. \tag{12}$$

OBSERVACIÓN 2.2. (i) *Para* $\alpha = 1$ *los polinomios clásicos de Bernoulli* $B_n(x)$ *y los polinomios clásicos de Euler* $E_n(x)$ *son dados por*

$$B_n^{(1)}(x) = B_n(x) \;\; y \;\; E_n^{(1)}(x) = E_n(x), \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

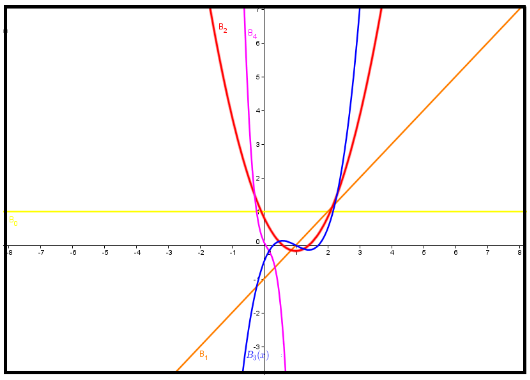
(ii) *Dado los parámetros* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$*, los polinomios generalizados de Bernoulli cumplen la siguiente relación* [2].

$$B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x) B_{n-k}^{(\beta)}(y), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

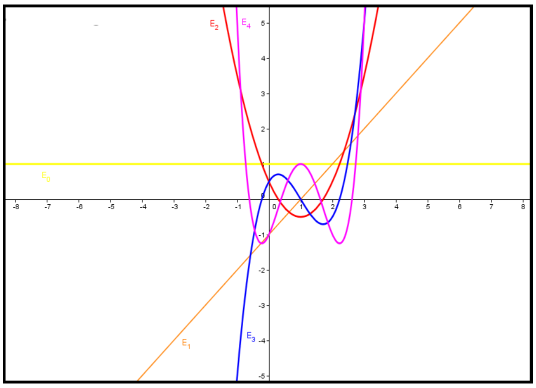
(iii) *Dado* $\alpha \in \mathbb{N}$ *los polinomios generalizados de Euler están relacionados con los polinomios de Bernoulli por (ver* [3]*).*

$$G_n^{\alpha}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1} \binom{n}{k} \left(E_{k+1}^{(\alpha-1)}(y) - G_{k+1}^{(\alpha)}(y) \right) B_{n-k}(y), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Para $\alpha = 2$ la gráfica de los polinomios de Bernoulli generalizados $B_n^{(2)}(x)$ y los de Euler generalizados $E_n^{(2)}(x)$ con $n \leq 4$ se ilustran a continuación



Polinomios Generalizados de Bernoulli



Polinomios Generalizados de Euler

3. Polinomios generalizados de Bernoulli, Euler y Genocchi de orden negativo

Dado un parámetro $\alpha \in \mathbb{N}$ [3], los polinomios de Bernoulli generalizados de orden negativo $B_n^{(-\alpha)}(x)$ y los polinomios de Euler generalizados de orden negativo $E_n^{(-\alpha)}(x)$ están definidos por la siguientes funciones generatrices

$$\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(-\alpha)}(x) z^n}{n!} \quad |z| < 2\pi, \tag{15}$$

$$\left(\frac{e^z+1}{2}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n^{(-\alpha)}(x) z^n}{n!} \quad |z| < \pi. \tag{16}$$

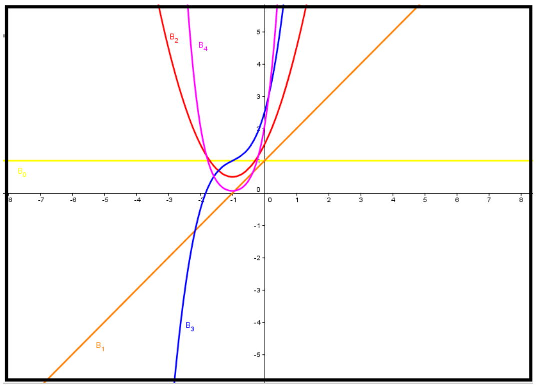
Los polinomios de Bernoulli $B_n^{(-\alpha)}(x)$, de Euler $E_n^{(-\alpha}(x)$ con $n \leq 4$ son

n	0	1	2	3	4
$B_n^{(-\alpha)}(x)$	1	$x+\frac{\alpha}{2}$	$x^2+\alpha x+\frac{\alpha(3\alpha+1)}{12}$	$x^3-\frac{3}{2}\alpha x^2+\frac{\alpha(3\alpha+1)}{4}x+\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{8}$	$x^4+2\alpha x^3+\frac{\alpha(3\alpha+1)}{2}x^2+\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{2}x+C_0$
$E_n^{(-\alpha)}(x)$	1	$x+\frac{1}{2}\alpha$	$x^2+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{4}$	$x^3+\frac{3}{2}\alpha x^2+\frac{3\alpha(\alpha+1)}{4}x+\frac{\alpha^2(\alpha+3)}{8}$	$x^4+2\alpha x^3+\frac{3\alpha(\alpha+1)}{2}x^2+\frac{\alpha^2(\alpha+3)}{2}x+C_1$

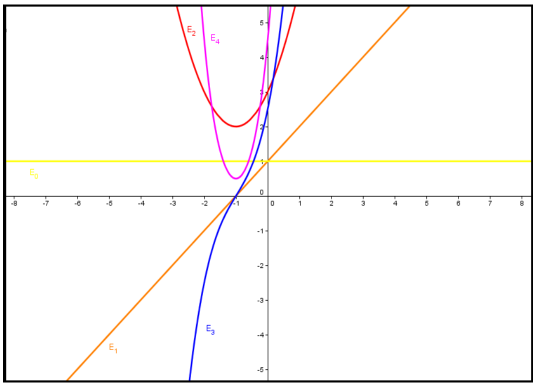
Donde,

$$C_0 = \frac{\alpha(15\alpha^3+30\alpha^2+5\alpha-2)}{240}, \qquad C_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha^2+5\alpha-2)}{16}.$$

Para $\alpha = 2$ la gráfica de los polinomios de Bernoulli generalizados de orden negativo $B_n^{(-2)}(x)$ y los de Euler generalizados de orden negativo $E_n^{(-2)}(x)$ con $n \leq 4$ se ilustran a continuación.



Bernoulli generalizados de orden negativo



Euler generalizados de orden negativo

DEFINICIÓN **3.1.** *Para $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0$, los polinomios de Genocchi de orden negativo $-\alpha$ de $G_n^{(-\alpha)}(x)$ son definidos mediante la siguiente función generatriz.*

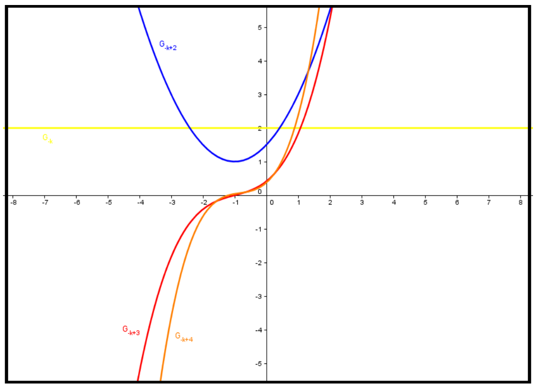
$$\left(\frac{e^z+1}{2z}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=-\alpha}^{\infty} \frac{G_n^{(-\alpha)}(x) z^n}{|n|!} \qquad |z| < 2\pi, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

de donde $G_n^{(-\alpha)}(x)$ no está definido cuando $n < -\alpha$.

De algunos cálculos en (17) obtenemos

$$\begin{aligned}
G_{-n}^{(-\alpha)}(x) &= |-\alpha|!, \\
G_{-n+1}^{(-\alpha)}(x) &= |-\alpha+1|!\left(x^2+\frac{1}{2}\alpha\right), \\
G_{-n+2}^{(-\alpha)}(x) &= |-\alpha+2|!\left(x^2+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha+1}{2}\right), \\
G_{-n+3}^{(-\alpha)}(x) &= |-\alpha+3|!\left(x^3+\frac{3\alpha}{2}x^2+\frac{3\alpha(\alpha+1)}{4}x+\frac{\alpha^2(\alpha+3}{8}\right).
\end{aligned}$$

Para $\alpha = 2$ la gráfica de los polinomios de Genocchi generalizados de orden negativo $G_n^{(-2)}(x)$ con $n \leq 4$ se ilustran a continuación



Genocchi generalizados de orden negativo $G_n^{(-\alpha)}(x)$

OBSERVACIÓN 3.1. (i) *Los números de Genocchi* $G_n^{(-1)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *forman la sucesión*

$$\frac{1}{2}\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}.$$

(ii) *Notamos que*

$$\begin{aligned} A_n^{(-1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{G_{n-1}^{(-1)}}{G_n^{(-1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1. \end{aligned}$$

(iii) *Los polinomios* $G_n^{(-\alpha)}(x)$, *están relacionados con los polinomios* $E_n^{(-\alpha)}(x)$ *por*

$$G_n^{(-\alpha)}(x) = \frac{|n|!}{(n+\alpha)!} E_n^{(-\alpha)}(x). \tag{18}$$

4. Algunas Propiedades de los polinomios $G_n^{(-\alpha)}(x)$

Los polinomios $G_n^{(-\alpha)}(x)$ satisfacen la siguiente fórmula de sumación.

TEOREMA 1. *Para* $\alpha \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *la siguiente relación para los polinomios generalizados de Genocchi de orden negativo* $G_n^{(-\alpha)}(x)$ *se cumple.*

$$G_n^{(-\alpha)}(x+y) = \sum_{j=-\alpha}^{n} \left(\frac{|n|!}{(n-j)!|j|!}\right) G_j^{(-\alpha)}(x) y^{n-j}. \tag{19}$$

Demostración. De (17) y un uso adecuado de (5) y (7) tenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\alpha}^{\infty} G_n^{(-\alpha)}(x+y)\frac{t^n}{|n|!} &= \left(\frac{(1+e^t)}{2t}\right)^{(\alpha)} e^{(x+y)t} \\ &= \left(\frac{(1+e^t)}{2t}\right)^{(\alpha)} e^{tx}e^{ty} \\ &= \sum_{n=-\alpha}^{\infty} G_n^{(-\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=-\alpha}^{\infty} \sum_{j=-\alpha}^{n} \frac{|n|!}{(n-j)!|j|!} G_j^{(-\alpha)}(x) y^{n-j} \frac{t^n}{|n|!}. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de $\frac{t^n}{|n|!}$ sigue (19). □

TEOREMA 2. *Para* $\alpha \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *la siguiente relación para los polinomios generalizados de Genocchi de orden negativo* $G_n^{(-\alpha)}(x)$ *se cumple.*

$$G_n^{(-\alpha)}(-\alpha - x) = (-1)^{n+\alpha} G_n^{(-\alpha)}(x). \tag{20}$$

Demostración. De (17) tenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\alpha}^{\infty} G_n^{(-\alpha)}(-\alpha - x)\frac{t^n}{|n|!} &= \left(\frac{(1+e^t)}{2t}\right)^{(\alpha)} e^{(-\alpha-x)t} \\
&= \left(\frac{(1+e^t)}{2t}\right)^{(\alpha)} e^{-\alpha t}e^{-tx} \\
&= \left(\frac{(1+e^t)}{2e^t t}\right)^{(\alpha)} e^{-\alpha t}e^{-tx} \\
&= (-1)^{\alpha}\left(\frac{(1+e^{-}t)}{2(-t)}\right)^{(\alpha)} e^{-tx} \\
&= (-1)^{\alpha}\sum_{n=-\alpha}^{\infty}(-1)^n G_n^{(-\alpha)}(x)\frac{t^n}{|n|!} \\
&= (-1)^{n+\alpha}\sum_{n=-\alpha}^{\infty} G_n^{(-\alpha)}(x)\frac{t^n}{|n|!}.
\end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de $\frac{t^n}{|n|!}$ sigue (20). □

OBSERVACIÓN 4.1. (i) *Dado* $\alpha = 1$, $n \in \mathbb{N}$, *los polinomios de Genocchi generalizados de orden negativo* $G_n^{(-1)}(x)$ *cumplen la siguiente relación.*

$$(n+1)G_n^{(-1)}(x) = n(x+1)G_{n-1}^{(-1)}(x) - \frac{1}{2}G_n^{(0)}(x). \tag{21}$$

(ii) *Para* $\alpha = 1$, $n \in \mathbb{N}$, *los polinomios de Genocchi generalizados de orden negativo* $G_n^{(-1)}(x)$ *están relacionados con los polinomios de Bernoulli generalizados de orden negativo* $B_n^{(-1)}(x)$ *por.*

$$G_n^{(-1)}(1+x) - G_n^{(-1)}(x) = 2^n B_n^{(-1)}(\frac{x}{2}). \tag{22}$$

Referencias

[1] Abramowitz, M, Stegun, I: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. McGraw-Hill, USA. (1960).

[2] Chen, S, Cai, Y, Luo, Q: *"An extension of generalized Apostol-Euler polynomials"*. **2013:61**, Chen et al. Advances in Difference Equations (2013).

[3] Horadam, A. F.: *"Negative order Genocchi polynomials"*. Universsity of new England, Armidale, Australia (2003).

[4] Kurt, B: *"A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the 2D-Bernoulli polynomials $B_n^2(x,y)$"*. Appl. Math. 233, 3005-3017 (2010).

[5] Sándor J., Crstici B.: *"Handbook of Number Theory II"*, Kluwer Boston U.S.A. (2004).

[6] Srivastava, HM, Todorov, PG: *"An Explicit Formula for the Generalized Bernoulli Polynomials"*, J. Mat. Anl. Appl. 130, 509-513 (1988).

Para citar este articulo: William RAMÍREZ et al, 2015, *"Una nota sobre los polinomios de Bernoulli, Euler y Genocchi de orden negativo"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.