

# Eliminación de las Grandes Oscilaciones de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales

## Major elimination Oscillations of a System of Differential Equations

Jorge RODRÍGUEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Sistemas Dinamicos Y EDO, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*  
*e-mail:jorge.jrodri@gmail.com*

Angélica ARROYO<sup>2</sup>

<sup>2</sup>*Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla- Colombia*  
*e-mail:angelicarroyo1020@gmail.com*

Lesly SALAS<sup>3</sup>

<sup>3</sup>*Universidad del Atlántico, Barranquilla- Colombia*  
*e-mail:correo@mail.com*

*Recibido:25/05/2015 - Aceptado:28/05/2015*

### Resumen

Considerando el sistema No lineal.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x)\end{aligned}\tag{1}$$

que tiene un comportamiento oscilatorio, se demuestra en el caso que  $f(-x) = -f(x)$ , que al reemplazar la función  $f(x)$  por  $f(x + B \sin \omega t)$ , y para valores de  $B$  y  $\omega$  suficientemente grande el sistema no tiene movimiento oscilatorio de gran amplitud. De hecho todas las soluciones tienden a una vecindad del origen tan pequeña como se quiera.

Para realizar esta demostración se procede de la siguiente manera:

Inicialmente se expresa la función perturbada en términos de  $x$  y  $B \sin(\omega t)$ , para proceder a calcular la función promedio. Luego se prueba que para  $h(\tau, x) = f(x + B \sin \tau) - f_0(x, B)$ , existe una función continua  $H(\tau, x, \frac{1}{\omega})$  tal que  $|H(\tau, x, \frac{1}{\omega})| \leq \omega \eta(\omega)$  donde  $\eta(\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  y realizando la sustitución  $z = s + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega})$  se demuestra que el sistema perturbado es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega}) \\ \dot{z} &= -az - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y\end{aligned}$$

De esta manera se prueba que para  $\omega$  suficientemente grande, el sistema promediado es una buena aproximación del sistema perturbado. Esto es que toda solución del sistema perturbado está suficientemente cercana a una solución del sistema promediado.

Igualmente se prueba que existe  $B_0$  tal que  $B > B_0$ , la solución trivial del sistema promediado es asintóticamente estable para valores de  $\omega$  suficientemente grandes.

Por último se prueba que para  $B$  y  $\omega$  suficientemente grande el sistema perturbado no tiene movimiento oscilatorio de gran amplitud, es decir, la perturbación ha aniquilado las oscilaciones de gran amplitud.

**Palabras claves:** Oscilaciones, soluciones periódicas, Sistema Perturbado, Función Promedio, Eliminación de Oscilaciones, soluciones oscilatorias.

### Abstract

Considering the nonlinear system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \text{and} \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x) \end{aligned} \tag{2}$$

which it has an oscillatory behavior is demonstrated in the case that  $f(-x) = -f(x)$ , that by replacing the  $f(x)$  function  $f(x + B \sin \omega t)$ , and will -lores of  $B$  and  $\omega$  large enough the system is oscillatory motion large amplitude. In fact all solutions tend to Origin neighborhood so small as you like.

To make this demonstration we proceed as follows:

Initially disturbed function in terms of  $x$  is expressed and  $B \sin(\omega t)$ , to proceed to calculate the average function. Then test for  $h(\tau, x) = f(x + B \sin \tau) - f_0(x, B)$ , There is a continuous function  $H(\tau, x, \frac{1}{\omega})$  such that  $|H(\tau, x, \frac{1}{\omega})| \leq \omega \eta(\omega)$  where  $\eta(\omega) \rightarrow 0$  when  $\omega \rightarrow \infty$  and performing substitution  $z = s + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega})$  shows that the perturbed system is equivalent to the following system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \text{and} \\ \dot{y} &= z + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega}) \\ \dot{z} &= -az - by - F_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} \text{and} \end{aligned}$$

Thus it is proved that for  $\omega$  large enough, the averaging system is a good approximation of the system disturbed. This is that any solution of the perturbed system is sufficiently close to a solution of averaging system.

There is also evidence that  $B_0$  such that  $B > B_0$ , the solution trivial averaging system is asymptotically stable values of  $\omega$  sufficiently large.

Finally it is proved that for  $B$  and  $\omega$  enough large system has disturbed oscillatory motion large amplitude, that is, the disturbance has destroyed the large amplitude oscillations.

**Keywords:** Oscillations, periodic solutions, Disturbed System Average Function Elimination of oscillations, Oscillatory solutions.

## 1. Introducción

En este artículo investigamos cómo la introducción de una función sinusoidal de suficiente amplitud y frecuencia en el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y \\
 \dot{y} &= z \\
 \dot{z} &= -az - by - f(x)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

, elimina las oscilaciones grandes, y deja soluciones periódicas de alta frecuencia y amplitud tan pequeña como se quiera. De hecho conseguiremos que todas las soluciones del sistema perturbado tiendan a un entorno del origen tan pequeño como se quiera, a base de aumentar la amplitud y la frecuencia de la perturbación. Los resultados de Boyer[4] muestran, que la introducción de una excitación periódica en el sistema, hacía que se mostraran unas soluciones periódicas atractoras de gran amplitud, que se preservaban al ir aumentando la amplitud y frecuencia de esta excitación, hasta que al llegar a valores suficientemente altos de estas, las soluciones periódicas desaparecían y todas las soluciones tendían al origen. Una explicación posible de este fenómeno es que el sistema promediado, que definimos más adelante, posee una órbita cerrada, atractora, que es el límite de las órbitas que emanan del punto fijo en el origen, formando la superficie asintótica inestable del punto de reposo  $\mathbf{O}$ . Esta superficie puede continuarse de una manera lisa más allá de esta órbita periódica, que sería única y el atractor global de todas las órbitas que no tienden al origen  $\mathbf{O}$ . Al aumentar la amplitud y la frecuencia de la perturbación, el sistema promediado experimenta una bifurcación de Hopf en el origen, generándose una órbita periódica inestable que va aumentando de amplitud hasta juntarse con la órbita estable, aniquilándose ambas y dejando libre la superficie asintótica para salir de  $B$ . La idea se basa en que para altas frecuencias de la excitación el sistema perturbado dista tan poco como se quiera del sistema promediado. Desafortunadamente no se ha podido determinar con suficiente precisión las características del retrato del sistema promediado, comenzando porque ni para el sistema sin perturbar no sabemos las características de unicidad y estabilidad de la órbita periódica. Para el sistema promediado somos capaces, sin embargo, de demostrar la estabilidad asintótica global de  $\mathbf{O}$  para amplitudes y frecuencias suficientemente grandes de la perturbación. Esto nos permite asegurar, para estos casos, que todas las órbitas del sistema perturbado tienden a una vecindad de  $\mathbf{O}$  tan pequeña como se quiera. El método utilizado para mostrar la convergencia del sistema perturbado al promediado está inspirado en el tratamiento que hacen en *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* [3]. Observaremos que al incrementar  $B$  lo que se logra es disminuir la derivada de la función promediada  $f_0$ , con lo que para una  $B$  suficientemente grande conseguimos la estabilidad asintótica global para el sistema promediado.

Lo que se prueba al aumentar  $\epsilon$  es el acercamiento entre los campos vectoriales definidos en  $\mathbf{R}^3$  por los sistemas perturbado y promediado, lo que para  $\epsilon$  suficientemente pequeña implicará que las soluciones del sistema promediado tenderán a un entorno tan pequeño como se quiera de los atractores del sistema promediado. En particular si el origen es un atractor global del sistema promediado, las soluciones del sistema perturbado tenderán a un entorno tan pequeño como se quiera del  $\mathbf{O}$ .

## 2. Fundamentos teóricos

Se conocen numerosos trabajos acerca de la existencia de soluciones periódicas para la ecuación de tercer grado no autónoma, por ejemplo J. O. Ezeilo [11], [12], [15], [16], [17], Rolf Reissig [36], [37], [38], [39] entre otros; mientras en el caso autónomo encontramos poca investigación sobre este tema: Rauch, L. L. [34], J. O. Ezeilo [9].

En su Tesis Doctoral C. Perelló [30] demuestra la existencia de una solución periódica para (??) cuando  $a^2 > 4b$ ,

construyendo explícitamente por métodos geométricos elementales un toro positivamente invariante con las órbitas girando alrededor del agujero.

El artículo de Ezeilo [9], On the Existence of Periodic Solutions of a Certain Third Order Differential Equation. Camb. Philos. 56, 1959, tiene relación con la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + h(x) = p(t) \tag{4}$$

en la cual  $a$  y  $b$  son constantes,  $p(t)$  es una función periódica continua en  $t$  con periodo  $\omega$ . La función  $h(x)$  se supone continua para todo  $x$ . Las hipótesis explícitas en (4) se establecen, en dos casos distintos:

$$|h(x)| \rightarrow \infty \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty \tag{5}$$

$$|h(x)| \leq M < \infty, \text{ para todo } x, \tag{6}$$

bajo las cuales toda solución de (4) satisface

$$|x(t)| \leq D, \quad |\dot{x}(t)| \leq D, \quad |\ddot{x}(t)| \leq D \quad (t \geq t_0), \tag{7}$$

donde  $t_0$  depende de una  $x$  escogida, y  $D$  es una constante dependiendo solamente de  $a, b, h$  y  $p$ . Estas hipótesis son en el caso (5),

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad a > 0, \quad b > 0, \\ \text{(II)} \quad h(x) \operatorname{sgn}(x) > 0, \quad |x| \geq 1, \\ \text{(III)} \quad h'(x) \text{ existe y es continua para todo } x, \text{ y} \\ \quad \quad \quad h'(x) \leq \begin{cases} c, & ab - c \equiv \delta > 0 \text{ para } |x| \geq 1 \\ C, & ab < C < \infty \text{ para } |x| \leq 1, \end{cases} \\ \text{(IV)} \quad |p(t)| \leq A_1, \quad \left| \int_0^t p(\tau) d\tau \right| \leq A_1, \text{ para todo } t; \end{array} \right\} (H_1)$$

O en el caso (6),

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad a > 0, \quad b > 0, \\ \text{(II)} \quad h(x) \operatorname{sgn}(x) \geq m > 0, \quad |x| \geq 1, \\ \text{(III)} \quad |p(t)| \leq A_1, \quad \left| \int_0^t p(\tau) d\tau \right| \leq A_1, \text{ para todo } t. \end{array} \right\} (H_2)$$

A continuación nos referiremos a (5) y  $(H_1)$  colectivamente como las hipótesis  $(BH_1)$  y a (6) y  $(H_2)$  como las hipótesis  $(BH_2)$ . Ezeilo demuestra la existencia de soluciones periódicas bajo las hipótesis  $(BH_1)$ ; mientras

que en el caso  $(BH_2)$ , no le fue posible construir una superficie en  $E_3$  homeomorfa a una 2-esfera unidad, tales que todas las soluciones (4) la cruzan hacia el interior.

Pero el mismo Ezeilo en el artículo [14] A Property of the Phase Space Trajectories of a Third Order Nonlinear Differential Equations, J. London Math. Soc. 37 (1962), 33-41, prueba el siguiente Teorema:

**Teorema.** Suponga que  $a > 0, b > 0$  y que

- (I)  $h(0) = 0, \frac{h(x)}{x} \geq c > 0 \quad (x \neq 0);$   
 (II)  $h'(x)$  existe y es continua y  $|h'(x)| \leq C$  para todo  $x$ , donde

$$ab - \frac{C^2}{c} > 0,$$

- (III)  $|p(t)| \leq A_0 < \infty$  para todo  $t$ .

Entonces existe una superficie  $\Sigma$  en el espacio  $E_3$ , tal que todas las trayectorias la cruzan hacia el interior.

Aquí las hipótesis sobre  $a, b$  y  $h$  implican la estabilidad asintótica de  $0$ .

Para nuestro trabajo de investigación nos faltaría el caso cuando  $ab < c$ , por ello no contamos con un punto de apoyo para lograr nuestro objetivo.

En nuestro caso demostramos la anulación de las soluciones oscilatorias en el sistema perturbado para  $\omega$  y  $B$  suficientemente grande, para ello primero se realizó una parametrización de la ecuación diferencial y de esta forma se obtuvo una nueva ecuación diferencial que satisface las condiciones de Routh-Hurwitz de estabilidad y de esta manera se logró construir una Superficie Atractora. Además se logró probar previamente que el sistema diferencial perturbado es una buena aproximación del sistema promediado para  $\omega$  suficientemente grande. También demostramos la anulación de las soluciones oscilatorias en el sistema perturbado para  $\omega$  y  $B$  suficientemente grande.

### 3. Perturbación de la Ecuación

En esta sección se investigó el efecto que causa al introducir una perturbación sinusoidal de gran amplitud y frecuencia, es decir se estudió el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial no lineal de tercer grado:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x + B \sin \omega t) = 0 \tag{8}$$

o el Sistema Perturbado equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f(x + B \sin \omega t) \end{aligned} \tag{9}$$

para valores de  $B$  y  $\omega$  suficientemente grandes; donde  $f$  está definida como en la introducción, es decir  $f$  Lipschitz, no decreciente  $f(0) = 0$ ,  $f$  con derivada continua en 0 y  $f'(0) = c > ab$ . Existe  $C$  tal que para toda  $x$   $|f(x)| < C$  y  $\frac{|f(x)|}{|x|} < C$  para  $0 < |x| < 1$  y  $f(-x) = -f(x)$

#### 3.1. Función Perturbada

La función perturbada  $f(x + B \sin \omega t)$  se puede visualizar en general por medio de la Figura 1

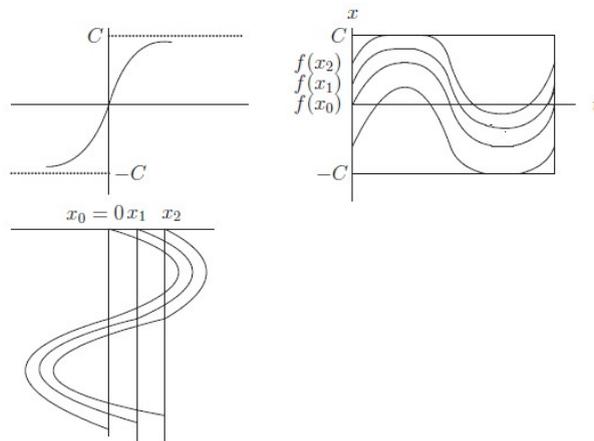


Figura 1: Función Perturbada  $f(x + B \sin \omega t)$  para  $|x| \leq (B + 1)$

En el caso particular en que

$$f(x) = \begin{cases} c \operatorname{sign}(x) & \text{si } |x| > 1 \\ cx & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} \tag{10}$$

podemos ser más explícitos, en lo que sigue supondremos  $B > 1$

1. Si  $x \geq (B + 1)$ , entonces  $x + B \sin \omega t \geq 1$  y así se tiene que  $f(x + B \sin \omega t) = c$

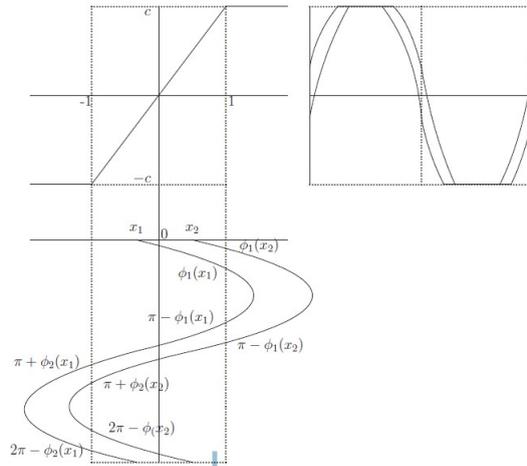


Figura 2: Función Perturbada  $f(x + B \sin \omega t)$  para  $|x| \leq (B + 1)$

2. Si  $x \leq -(B + 1)$ , entonces se tiene  $f(x + B \sin \omega t) = -c$

3. Si  $-(B + 1) \leq x \leq (B + 1)$

$$\begin{aligned}
 f(x + B \sin \omega t) &= c(x + B \sin \omega t) & 0 \leq \omega t \leq \phi_1 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= c & \phi_1 \leq \omega t \leq \pi - \phi_1 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= c(x + B \sin \omega t) & \pi - \phi_1 \leq \omega t \leq \pi + \phi_2 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= -c & \pi + \phi_2 \leq \omega t \leq 2\pi - \phi_2 \\
 f(x + B \sin \omega t) &= c(x + B \sin \omega t) & 2\pi - \phi_2 \leq \omega t \leq 2\pi
 \end{aligned}$$

Donde  $\phi_1$  y  $-\phi_2$  son los ángulos más próximos a 0 en que  $x + B \sin(\omega t)$  vale  $c$  y  $-c$  respectivamente.

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) & |1-x| < B \\ \frac{\pi}{2} & 1-x \geq B \\ -\frac{\pi}{2} & 1-x \leq -B \end{cases} \tag{11}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & |1+x| < B \\ \frac{\pi}{2} & 1+x \geq B \\ -\frac{\pi}{2} & 1+x \leq -B \end{cases} \tag{12}$$

### 3.2. Función Promedio

$$f_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + B \sin \omega t) d(\omega t) \tag{13}$$

Es claro que  $f_0(x, B)$ , para  $B$  fijado, es creciente y que  $|f_0(x, B)| < C$ .

**Proposición 1.** Para toda función  $f$  Lipschitz, no decreciente, acotada, con derivada continua en 0 y  $f(-x) = -f(x)$ , se tiene que:

- a)  $f_0(x, B)$  es derivable para todos los valores de  $x$ .
- b)  $f_0(0, B) = 0$
- c)  $f_0(x, B)$  es no decreciente
- d)  $|f_0(x, B)| < C$ .
- e)  $f'_0(x, B) \rightarrow 0$  cuando  $B \rightarrow \infty$ .
- f)  $f''_0(0, B) = 0$  y es positiva en un intervalo  $(0, x_1)$  si  $B$  es suficientemente grande. Debido a que  $f'$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a infinito,  $f_0(x, B)$  tiene algún punto de inflexión para alguna  $x > 0$ .

*Demostración.* a) Inmediata de la definición.

b) Se sigue inmediatamente de que  $f$  es una función impar.

c) Si  $x \leq y$  entonces  $f(x + B \sin \tau) \leq f(y + B \sin \tau)$ , luego  $f_0(x, B) \leq f_0(y, B)$  así que  $f_0(x, B)$  es no decreciente.

$$d) |f_0(x, B)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x + B \sin \tau) d\tau \right| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C d\tau = C.$$

e) Siendo  $f'_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x + B \sin(\omega\tau)) d\tau$ , y sabiendo que  $f$  es no decreciente y acotada, resulta que  $\int_{-M}^{\infty} f' \rightarrow 0$  cuando  $M \rightarrow \infty$ . Por lo tanto la contribución a la integral de los valores de  $|x + B \sin(\omega\tau)| > M$  también tienden a 0 cuando  $B \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, la medida del conjunto de las  $\tau$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$  para las cuales  $|x + B \sin(\omega\tau)| < M$  tiende a 0. Siendo  $f'$  acotada en  $(-M, M)$ , esto implica que  $f'_0(x, B)$  tiende a 0 cuando  $B \rightarrow \infty$ .

f) Siendo  $f'$  una función par, no negativa, y que tiende a cero cuando  $x$  tiende a infinito ( $f'$  existe casi donde quiera si  $f$  es de Lipschitz), resulta que tomando  $B$  suficientemente grande podemos lograr que la contribución a la integral de  $f'(x + B \sin(\omega t))$  al incrementar  $x$  en un intervalo pequeño  $(0, x_1)$ , sea positiva. Esto se debe a que  $f'$  es par, y que la contribución negativa de la onda positiva de la senoide es menor que la contribución positiva de la onda negativa para los mismos valores de  $f'$  (correspondientes a valores de  $x$  y  $-x$ ), y esta ganancia no es compensada por la disminución del valor de la integral en los extremos de la senoide si  $B$  es suficientemente grande, ya que al tender  $f'$  a cero, esta diferencia la podemos hacer arbitrariamente pequeña incrementando  $B$ .

□

Para el caso particular (10), realizando las sustituciones propias de las ecuaciones 11 en la ecuación 13 e integrando se tiene

$$f_0(x, B) = \begin{cases} c \operatorname{sign}(x) & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \Psi(x) & \text{si } |x| \leq (B + 1) \end{cases} \tag{14}$$

Donde  $\Psi(x) = \frac{1}{\pi}c[x(\phi_1(x) + \phi_2(x)) + B(\cos \phi_2(x) - \cos \phi_1(x)) + (\phi_2(x) - \phi_1(x))]$

De la ecuación 14 por cálculos elementales se obtiene

$$f'_0(x, B) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \Psi'(x) & \text{si } |x| \leq (B + 1) \end{cases} \tag{15}$$

De las ecuaciones 11 y 12 se tiene que:

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } -B - 1 < x < -B + 1 \\ \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } -B + 1 < x < B - 1 \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) & \text{si } B - 1 < x < B + 1 \end{cases} \tag{16}$$

De la ecuación 16 se tiene:

$$\phi'_1(x) + \phi'_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1+x)^2}} & \text{si } -B - 1 < x < -B + 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{B^2 - (1-x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1+x)^2}} & \text{si } -B + 1 < x < B - 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{B^2 - (1-x)^2}} & \text{si } B - 1 < x < B + 1 \end{cases} \tag{17}$$

Por lo tanto de (15), (16) y (17) tenemos que:

$$f'_0(x, B) = \frac{c}{\pi} \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } -(B + 1) \leq x \leq (-B + 1) \\ \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) + \arcsin\left(\frac{1+x}{B}\right) & \text{si } (-B + 1) < x < (B - 1) \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1-x}{B}\right) & \text{si } B - 1 \leq x \leq (B + 1) \end{cases} \tag{18}$$

Por lo tanto

$$f'_0(0, B) = \frac{2c}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{B}\right) \tag{19}$$

Luego la segunda derivada de la función Promedio viene dada por:

$$f_0''(x, B) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq (B + 1) \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1 + x)^2}} & \text{si } -(B + 1) \leq x \leq (-B + 1) \\ \frac{-1}{\sqrt{B^2 - (1 - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{B^2 - (1 + x)^2}} & \text{si } (-B + 1) < x < (B - 1) \\ \frac{-1}{\sqrt{B^2 - (1 - x)^2}} & \text{si } B - 1 \leq x \leq (B + 1) \end{cases} \quad (20)$$

La función promedio  $f_0(x, B)$  es dada por (ver Figura 3)

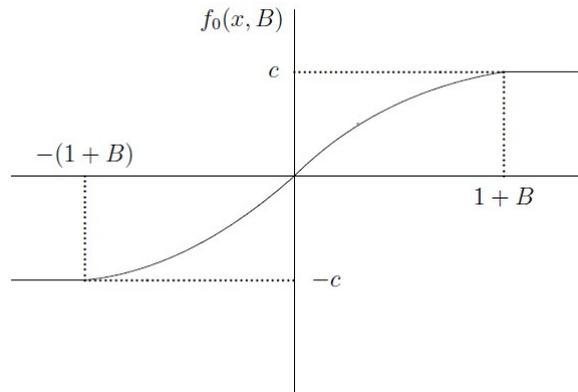


Figura 3: Función Promedio  $f_0(x, B)$

Así el Sistema Promediado queda

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -az - by - f_0(x, B) \end{aligned} \quad (21)$$

En la siguiente sección se demuestra que las soluciones del Sistema Perturbado están suficientemente cercanas a las soluciones del Sistema Promedio para  $B$  y  $\omega$  suficientemente grandes.

### 4. Aproximación

Esta aproximación nos va a permitir decir cosas sobre el comportamiento del sistema perturbado a partir de las propiedades del sistema promediado. Efectivamente, si el sistema promediado tiene un atractor  $A$  que admite una función de Lyapunov, entonces para  $\omega$  suficientemente grande el sistema promediado tendrá por atractor una vecindad tan pequeña como se quiera de  $A$ . Tal sería el caso si el sistema promediado tiene una órbita periódica asintóticamente estable, entonces las soluciones del sistema perturbado van a entrar todas en una vecindad tan pequeña como queramos de  $O$ .

Sea  $h(t, x) = -f(x + B \sin \omega t) + f_0(x, B)$ , es una función periódica de periodo  $2\frac{\pi}{\omega}$ , acotada y promedio cero.

Sea

$$H(t, x, \omega, B) = \int_{-\infty}^{\omega t} \exp \left[ -\frac{1}{\omega}(\omega t - \tau) \right] h(\tau, x) d\tau \tag{22}$$

**Lema 1.** Existe una función continua  $\eta(\omega)$  tal que  $\eta(\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  entonces

$$|H(t, x, \omega, B)| \leq \omega \eta(\omega) \tag{23}$$

Finalmente,

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} - h(t, x) \right| \leq \eta(\omega) \tag{24}$$

**Demostración.** Como

$$h_0(x, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\tau, x) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x + B \sin(\omega\tau)) - f_0(x, B)) d\tau = f_0(x, B) - f_0(x, B) = 0$$

entonces existe una función decreciente  $\varepsilon(T)$  donde  $\varepsilon(T) \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow \infty$  tal que

$$\left| T^{-1} \int_t^{t+T} h(\tau, x) d\tau \right| \leq \varepsilon(T)$$

$$\begin{aligned} H(t, x, \omega, B) &= \int_{-\infty}^{\omega t} \exp \left[ -\frac{1}{\omega}(\omega t - \tau) \right] h(\tau, x) d\tau \\ &= - \int_{\infty}^0 \exp \left[ -\frac{1}{\omega}\tau \right] h(\omega t - \tau, x) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} \exp \left[ -\frac{\tau}{\omega} \right] h(\omega t - \tau, x) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nT}{\omega}} \int_{nT}^{(n+1)T} \exp \left[ -\frac{1}{\omega}(\tau - nT) \right] h(\omega t - \tau, x) d\tau \end{aligned}$$

Luego como  $h$  es una función acotada, existe un  $M > 0$  tal que  $|h| \leq M$

$$\begin{aligned} |H(t, x, \omega, B)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{nT}{\omega} \right] \left| \int_{nT}^{(n+1)T} h(\omega t - \tau, x) d\tau \right| + \\ &\quad + M \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{nT}{\omega} \right] \int_{nT}^{(n+1)T} \left( 1 - \exp(-\frac{1}{\omega}(\tau - nT)) \right) d\tau \\ |H(t, x, \omega, B)| &\leq \frac{T\varepsilon(T)}{1 - \exp(-\frac{T}{\omega})} + MT \end{aligned}$$

Escojamos  $T$  en función de  $\omega$  tal que  $\varepsilon(T) = 1 - \exp(-\frac{T}{\omega})$ . Dado que  $\varepsilon(T) \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Es claro que la solución  $T_\omega$  de la ecuación  $\varepsilon(T) = 1 - \exp(-\frac{T}{\omega})$  satisface

$$\frac{T_\omega}{\omega} \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty$$

Sea  $(M + 1)\frac{T_\omega}{\omega} = \eta(\omega)$

Por lo tanto

$$\left| H(t, x, \omega, B) \right| \leq \omega \eta(\omega)$$

Derivando la función  $H(t, x, \omega, B)$  con respecto a  $t$  se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -H + \omega h(\omega t, x)$$

Así que

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} - h(\omega t, x) = -\frac{1}{\omega} H$$

Además la relación 24 se sigue de la identidad

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} H(t, x, \omega, B) - h(t, x) \right| = \frac{1}{\omega} \left| H(t, x, \omega, B) \right|$$

y 23. □

**Corolario 1.** Existe una función continua  $\eta(\omega)$  tal que  $\eta(\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  entonces

$$\left| \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} \right| \leq \omega \eta(\omega) \tag{25}$$

Finalmente,

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)}{\partial t} - \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right| \leq \eta(\omega) \tag{26}$$

*Demostración.* De la definición de  $H(x, t, \omega, B)$  se tiene que:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\omega t} \exp \left[ -\frac{1}{\omega} (\omega t - \tau) \right] \frac{\partial}{\partial x} h(\tau, x) d\tau$$

Siguiendo los mismos pasos del Lema 1, se tiene el Corolario. □

### 4.1. Equivalencia del Sistema Perturbado

**Teorema 1.** El Sistema Perturbado es equivalente al Sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z + \frac{1}{\omega} H(t, x, \omega, B) \\ \dot{z} &= -az - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega, B) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y \end{aligned} \tag{27}$$

**Demostración.** Sea  $z = s + \frac{1}{\omega}H(t, x, \omega, B)$ , entonces

$$\dot{z} = \dot{s} + \frac{1}{\omega} \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} \right)$$

De aquí se tiene

$$-az - by - f(x + B \sin(\omega t)) = \dot{s} - \frac{1}{\omega} \left( H(t, x, \omega, B) + \frac{\partial H}{\partial x} y \right) + h(\omega t, x, B)$$

Luego reemplazando  $z$  en función de  $s$  se tiene:

$$\dot{s} = -as - by - f_0(x, B) - \left[ \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega, B) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y \right]$$

Así que

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = s + \frac{1}{\omega} H(t, x, \omega, B)$$

$$\dot{s} = -as - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega, B) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y$$

Por lo tanto, el Sistema Perturbado es equivalente al Sistema 27. □

**Teorema 2.** El Sistema Perturbado tiende al promediado cuando  $\omega \rightarrow \infty$

**Demostración.** Por el Corolario 1 existe una función continua  $\eta(\omega)$  tal que  $\eta(\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  entonces

$$\left| \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} y \right| \leq \omega \eta(\omega)$$

Como las soluciones del sistema son acotadas, se tiene que existe un  $D > 0$  tal que  $|y(\omega, t)| < D$ , por lo tanto

$$\left| \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} y \right| \leq D \omega \eta(\omega)$$

Así que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\partial H(t, x, \omega, B)}{\partial x} y = 0.$$

Por lo tanto  $(x(t, \omega), y(t, \omega), z(t, \omega))$  solución del Sistema 27, entonces

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (x(t, \omega), y(t, \omega), z(t, \omega)) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde  $(x(t), y(t), z(t))$  es solución del Sistema Promediado

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$\dot{y}(t) = z(t)$$

$$\dot{z}(t) = -az - by - f_0(x, B)$$

□

## 5. Existencia y Anulación de Oscilaciones

Durante el desarrollo de este trabajo se notó que el sistema 3, con  $a^2 > 4b$ , admite soluciones oscilatorias de amplitud finita si  $f'(0) > ab$ , Por otro lado si  $f'(x) < ab$  para cualquier  $x$ , el origen es un atractor global. Cuando consideramos el sistema promediado, si  $f(0) > ab$ , tendremos de la Proposición 5.1 que  $f'_0(0, B)$  tenderá a 0 de manera continua cuando  $B$  tiende a  $\infty$ . En particular llegará un momento en que  $f'_0(0, B) = ab$ . Tendremos que al crecer  $B$  se producirá una bifurcación de Hopf, es decir, el origen se volverá estable y de él emanará una órbita periódica inestable. Para  $B$  aún mayor tendremos que  $f_0(x, B) < ab$  para toda  $x$ , por lo tanto el origen es globalmente asintóticamente estable.

**Lema 2.** Sea  $\dot{x} = X(x)$  un sistema de ecuaciones diferenciales en  $\mathbf{R}^n$ , con  $X$  diferenciable. Si el origen  $\mathbf{O}$  es un atractor global, entonces existe una función de Lyapunov  $V$  definida en  $\mathbf{R}^n$  tal que  $V(0) = 0$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  y  $\dot{V} = (X, \text{grad}V) < 0$  excepto para  $x = 0$ .

Una demostración se encuentra en Jack Hale [21].

**Teorema 3.** Dado  $\epsilon > 0$ , existen  $B_0$  y  $\omega_0$  tales que si  $B > B_0$  y  $\omega > \omega_0$ , todas las soluciones del sistema perturbado 5.2 entran en un entorno de radio  $\epsilon$  de  $\mathbf{O}$  y permanecen en él al crecer el tiempo  $t$ .

Este teorema implica que en estas condiciones el sistema perturbado ya no tiene oscilaciones de gran amplitud. Aunque la perturbación induce movimiento oscilatorio de frecuencia  $\omega$ , estas oscilaciones están contenidas en un entorno de radio  $\delta$  de origen  $\mathbf{O}$  si  $B$  y  $\omega$  se toman suficientemente grandes.

Para la demostración del teorema, requeriremos el uso de un teorema inverso de Lyapunov que damos en la forma de Lema 2.

*Demostración.* Consideremos el campo vectorial  $Y(x, t, \omega)$  en  $\mathbf{R}^3$  definido por el sistema perturbado. Del Teorema 2, tenemos que  $Y(x, t, \omega)$  tiende a  $X(x)$  uniformemente en  $(x, t)$  en todo acotado.

Tenemos que

$$\dot{V}_Y = (Y, \text{grad}V) = (X, \text{grad}V) + (Y - X, \text{grad}V)$$

Esto será negativo para  $x > \delta$  y para todo  $t$ , si  $|x - y| < \epsilon(\delta)$ , de manera que

$$\epsilon(\delta) \max_{\delta < |x| < M} |\text{grad}V| < \min_{\delta < |x| < M} |\dot{V}_X$$

Aquí  $M$  representa el radio de la esfera que nos garantiza que todas las soluciones de  $X$  y de  $Y$  entran en ella.  $\square$

## 6. Conclusión

En este artículo se considera un sistema de ecuaciones diferenciales No lineal que tiene un comportamiento oscilatorio, se demuestra en el caso que  $f(-x) = -f(x)$ , que al reemplazar la función  $f(x)$  por  $f(x + B \sin \omega t)$ , y para valores de  $B$  y  $\omega$  suficientemente grande el sistema no tiene movimiento oscilatorio de gran amplitud y que todas las soluciones tienden a una vecindad del origen tan pequeña como se quiera.

Para ello, inicialmente se expresó la función perturbada en términos de  $x$  y  $B \sin(\omega t)$ , y se calculó la función promedio. Luego se probó que para  $h(\tau, x) = f(x + B \sin \tau) - f_0(x, B)$ , existe una función continua  $H(\tau, x, \frac{1}{\omega})$  tal que  $|H(\tau, x, \frac{1}{\omega})| \leq \omega \eta(\omega)$  donde  $\eta(\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  y realizando la sustitución  $z = s + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega})$  se demuestra que el sistema perturbado es equivalente al siguiente sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = z + \frac{1}{\omega} H(t, x, \frac{1}{\omega})$$

$$\dot{z} = -az - by - f_0(x, B) - \frac{a-1}{\omega} H(t, x, \omega) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial H}{\partial x} y$$

De esta manera se prueba que para  $\omega$  suficientemente grande, el sistema promediado es una buena aproximación del sistema perturbado.

Igualmente se prueba que existe  $B_0$  tal que  $B > B_0$ , la solución trivial del sistema promediado es asintóticamente estable para valores de  $\omega$  suficientemente grandes y que para  $B$  y  $\omega$  suficientemente grande el sistema perturbado no tiene movimiento oscilatorio de gran amplitud.

## Referencias

- [1] Andronov A. A., Vitt A. A. and Chaikin S. E., Theory of Oscillators, Fizmatgiz., Moscow (1959). Translation: Pergamon Press, Oxford - New York, 1966.
- [2] Barbashin, E. A., Conditions for Existence of Recurrent Trajectories in Dynamical Systems with a Cylindrical Phase Space. Differential Equations. 3, 10, 843 - 846.
- [3] Bogoliubov, N. N. and Mitropolsky Y. A., Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi-6. 1961. Gordon and Breach Science Publishers, Inc. New York.
- [4] Boyer, R. C., Sinusoidal Signal Stabilization, Master's Thesis, Purdue University, January, 1960.

- [5] Oldenburger, R., and R. C. Boyer, Effects of Extra Sinusoidal Inputs to Nonlinear Systems, Paper 61-Wa-66 presented at Winter Annual Meeting of American Society of Mechanical Engineers, New York, Nov. 26-Dec. 1, 1961.
- [6] Cartwright, M. L., On the Stability of Solutions of Certain Differential Equations of the Fourth Order. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 9(1956), pp. 185-194.
- [7] Coddington, E.A., and Levinson, N., Perturbations of Linear Systems with Constant Coefficients Possessing Periodic Solutions, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 2, pp. 19-37, Annals of Mathematics Studies, N° 20, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.
- [8] Coddington, E.A., and Levinson N., Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
- [9] Ezeilo, J. O., On the Existence of Periodic Solutions of a Certain Third Order Differential Equation. Camb. Philos. 56, 1959.
- [10] Ezeilo, J. O., On the Boundedness of Solution of a Certain Differential Equation of the Third Order, Proc. London Math. Soc. (3), 9, 1959.
- [11] Ezeilo, J. O., On the Stability of Certain Differential Equations of the Third Order. Quart. J. Math. Oxford (2)11, 64-69 (1960).
- [12] Ezeilo, J. O., A Note on a Boundedness Theorem for some Third Order Differential Equations. J. London Math. Soc. 36, 439-444 (1961).
- [13] Ezeilo, J. O., A Boundedness Theorem for some Nonlinear Differential Equations of the Third Order. J. London Math. Soc. 37, 469-474 (1962).
- [14] Ezeilo, J. O., A Property of the Phase Space Trajectories of a Third Order Nonlinear Differential Equations. J. London Math. Soc. 37 (1962), 33-41.
- [15] Ezeilo, J. O., A Stability Result for Solutions of a Certain Fourth Order Differential Equation. J. London Math. Soc. 37(1962), 28-32.
- [16] Ezeilo, J. O., Periodic Solutions of a Certain Third Order Differential Equation. Ann. Mat. Pura Appl. 34-41 (1973).
- [17] Ezeilo, J. O., A Further Result on the Existence of Periodic Solutions of the Equations  $\ddot{x} + \Psi(\dot{x})\dot{x} + \Phi(x)\dot{x} + \Theta(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = p(t)$  con  $\Theta$  acotada. Ann. Mat. Pura Appl. 51-57, (1978).
- [18] Friedrichs, K., On Nonlinear Vibrations of Third Order. Studies in Nonlinear Vibration Theory, New York University Lecture Notes 1946, 65-103.
- [19] Guckenheimer J. and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer Verlag, New-York, 1983.
- [20] Haas V., A Stability Result for a Third Order Nonlinear Differential Equation. Journal London Math. Soc., 40(1965), 31-33.
- [21] Hale, J. K., Ordinary Differential Equations. Wiley Intersciencie, New York, 1969.
- [22] Hale, J. K., On the Stability of Periodic Solutions of Weakly Nonlinear Periodic and Autonomous Differential Systems. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 5, pp. 91-114, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

- [23] Hale, J. K., Oscillations in Nonlinear Systems, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1963.
- [24] Krylov, N., and N. Bogoliubov, Introduction to Nonlinear Mechanics, Annals of Mathematics Studies, N° 11, Princeton University, Princeton, N.J., 1947.
- [25] La Salle, J., and Lefschetz, S., Stability by Lyapunov Direct Method. Academic Press, New York, 1961.
- [26] Lefschetz, S., Introduction to Topology, Princeton University Press, Princeton, 1949, pp. 117 -119.
- [27] Levinson, N., On the Existence of Periodic Solutions of Second Order Differential Equations with a Forcing Term. J. Math. Phys. (1943), 41-48.
- [28] McCarthy, J., A Method for the Calculation of Limit Cycles by Successive Approximation, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Annals of Mathematics Studies N° 29, Vol. 2, Princeton University, Princeton 1952, pp. 75-81.
- [29] Nemytskii, V. V., Lyapunov method of rotating functions for investigating oscillations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 97 (1954) 33-36.
- [30] Perelló, C., Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations with and without time Lag, Ph. D. Thesis. Brown University, 1965.
- [31] Perko L., Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd. ed.. Springer Verlag, New-York, 1996.
- [32] Pliss, V. A., Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations. Academic Press, New York and London, 1966.
- [33] Qing, L., On the Construction of Globally Asymptotically Stable Lyapunovs Functions of a Type of Nonlinear Third-Order Systems. Ann. of Diff. Eqs. pp. 39-51, 1991.
- [34] Rauch, L. L., Oscillation of a Third Order Nonlinear Autonomous System, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 1, Princeton University Press, Princeton, 1950, pp. 39-88.
- [35] Reuter, G.E.H. Note on the Existence of Periodic Solutions of Certain Differential Equations.
- [36] Reissig, R., On the Existence of Periodic Solutions of a Certain Non-Autonomous Differential Equation. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 85 (1969), 235-240.
- [37] Reissig, R., Periodic Solutions of a Nonlinear n-th Order Vector Differential Equation. Ann. Mat. Pura Appl. July 1970, pp. 111-123.
- [38] Reissig, R., Periodic Solutions of a Third Order Nonlinear Differential Equation. Ann. Mat. Pura Appl. September 1971, pp. 194 - 198.
- [39] Reissig, R., Perturbation of Certain Critical n-th Order Differential Equation. Bolletino U. M. I. (4)11, Suppl. fasc. 3(1975), 131 - 141.
- [40] Wolfgang Wasow, The Construction of Periodic Solutions of Singular Perturbation Problems, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 1, Princeton University, Princeton, 1950, pp. 313-350.

Para citar este artículo: Jorge RODRÍGUEZ et al, 2015, "Eliminación de las Grandes Oscilaciones de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales".

Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:

<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.