UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

MATUA

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol 2. No 1 (2015)

Revista del programa del matemáticas (2015) Pag. 28-33

Sobre aspectos importantes de los conjuntos abiertos generalizados con respecto a un ideal

On important aspects of open sets widespread with respect to an ideal

Carlos CARPINTERO[1]

[1]*Universidad De Oriente. Núcleo de Sucre. Cumaná. Venezuela*
e-mail: carpintero.carlos@gmail.com

Ennis ROSA[2]

[2]*Universidad De Oriente. Núcleo de Sucre. Cumaná. Venezuela.*
Universidad del Atlántico. Facultad de Ciencias Básicas. Barranquilla
e-mail: ennisrafael@gmail.com

Recibido:7/06/2015 - Aceptado:27/06/2015

Resumen

En este trabajo se profundiza un poco más, así como también se dan ilustraciones y comentarios en relación a algunos aspectos relevantes de las investigaciones realizadas recientemente en [2],[9],[8] y [10]; en donde se trata de buscar bajo que condiciones se le puede dar repuesta al siguiente problema : dado un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$, A satisface una condición W si y sólo si $cl(A)$ también la satisface. Es bien conocido que la propiedad de compacidad, conexidad entre otras no son aplicables en éste contexto. Es por ello que necesitamos idear un contexto donde se puedan dar ciertas condiciones para poder darle repuesta positiva en ciertos casos. En éste artículo, se presenta este contexto usando la noción de conjunto débilmente semi abierto con respecto a un ideal, se da repuesta al problema planteado, como también sus relaciones con otros tipos de conjuntos conocidos en la literatura.

Palabras claves:conjunto débilmente semi abierto con respecto a un ideal, I-α-abierto, I-β-abierto, conjunto semi abierto con respecto a un ideal.

Abstract

This paper illustrate and comments a bit more in relation to some relevant aspects of recent research in cite FRM, cite RD, cite RH and cite CMPR; where it comes to looking under what conditions can give affirmative answer to the following problem: given a topological space $(X,\ tau)$ and $A\ subset X$, A satisfies a condition W if and only if $cl(A)$ also satisfies it. It is well known that the property of compactness, connectedness among others are not applicable in this context. This is the reason that we need to devise a context where we can provide necessary conditions to give answer in certain cases. In this article, using the notion of weakly semi open set with respect to an ideal, we give answer to the problem, as well as their relations with others well known sets in the literature.

Keywords: weakly semi open set with respect to an ideal, I - $alpha$ -open, I - $beta$ -open, semi open set with respect to an ideal.

1. Introducción

La noción de conjunto semi abierto fué introducida por Levine en [4]. Recientemente Friday Ifeanyi Michael en [2] estudió los conjuntos semi abiertos con respecto a un ideal y se prueba que la noción de conjunto semi abierto es equivalente a la noción de conjunto semi abierto con respecto a un ideal. Rodyna A. Hosny et al. [9] introducen y estudian las nociones de conjuntos pre (respectivamente β)-abiertos en términos de un ideal I y estudió los conjuntos α-abiertos con respecto a un ideal [8]. Todos estos conceptos generalizan las nociones usuales de conjuntos α (respectivamente pre, semi, β)-abierto. S. Jafari et al. [3], introducen y estudian el concepto de conjunto g-cerrado con respecto a un ideal como una extension de los conjuntos g-cerrados. Al igual como se obtiene la noción de topología generalizada a partir de la noción de topología, vamos a proceder a generalizar la definición de conjunto semi abierto con respecto a un ideal para estudiar sus propiedades y dar algunas caracterizaciones. Recordemos que un ideal I sobre un espacio topológico (X, τ) es una colección no vacía de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

i) Si $A \in I$ y $B \subset A$ entonces $B \in I$.

ii) Si $A, B \in I$ entonces $A \cup B \in I$.

2. Algunos nociones de conjuntos abierto con respecto a un ideal

Sea X un espacio topológico. Recordemos que $A \subset X$ es un conjunto:

i) Pre-abierto si $A \subseteq int(cl(A))$ [6];

ii) Semi abierto si $A \subseteq cl(int(A))$ [4];

iii) α-abierto si $A \subseteq int(cl(int(A)))$ [7];

iv) β-abierto si $A \subseteq cl(int(cl(A)))$ [1].

Definición 1. *Un subconjunto A de X se dice que es:*

i) α-abierto con respecto a un ideal I [9], denotado por I-α-abierto, si existe $U \in \tau$ talque $U \backslash A \in I$ y $A \backslash int(cl(U)) \in I$.

ii) Pre-abierto con respecto a un ideal I [8], denotado por I-pre-abierto, si existe $U \in \tau$ talque $A \backslash U \in I$ y $U \backslash cl(A) \in I$.

iii) Semi-abierto con respecto a un ideal I [2], denotado por I-semi-abierto, si existe un conjunto abierto U tal que $U \setminus A \in I$ y $A \setminus Cl(U) \in I$.

iv) β-abierto con respecto a un ideal I [9], denotado por I-β-abierto, si existe un conjunto abierto U tal que $U \setminus cl(A) \in I$ y $A \setminus Cl(U) \in I$.

Observación 2.1. *Dado un ideal I y A un subconjunto de X*

i) Si A es α-abierto, entonces A es I-α-abierto.

ii) Si A es semi-abierto, entonces A es I-semi-abierto.

iii) Si A es Pre-abierto, entonces A es I-Pre-abierto.

iv) Si A es β-abierto, entonces A es I-β-abierto.

v) Si $A \in I$, entonces A es I-α-abierto.

vi) Si $A \in I$, entonces A es I-semi-abierto.

vii) Si $A \in I$, entonces A es I-Pre-abierto.

viii) Si $A \in I$, entonces A es I-β-abierto.

Es fácil ver que para cualquier ideal I, se tienen las siguientes implicaciones:
I-α-abierto $\Rightarrow$ I-semi-abierto $\Rightarrow$ I-β-abierto $\Leftarrow$ I-pre-abierto.
Además, las implicaciones no son reversibles y tampoco existe relación alguna entre los conjuntos I-α-abierto e I-pre-abierto.

Ejemplo 2.2. *Sea $X = \{a, b, c\}$ con topología $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$. Entonces:*

i) $\{b\}$ es un conjunto I-Pre (respectivamente I-semi)-abierto pero no es pre (respectivamente semi)-abierto.

ii) $\{a\}$ es un conjunto I-α-Pre (respectivamente I-β)-abierto pero no es α (respectivamente β)-abierto.

Ahora, si cambiamos el ideal por $I = \{\emptyset, \{c\}\}$, obtenemos que $\{b\}$ es I-α-abierto, pero no es I-pre-abierto. Nótese además que $cl(\{b, c\})$ es I-α-abierto, pero $\{b, c\}$ no lo es.

Observación 2.3. *Es fácil ver usando la definición de ideal topológico, lo siguiente:*

i) Si A es un conjunto I-semi abierto, entonces $cl(A)$ es I-semi abierto.

ii) Si A es un conjunto I-pre abierto, entonces $cl(A)$ es I-pre abierto.

iii) Si A es un conjunto I-β-abierto, entonces $cl(A)$ es I-β-abierto.

Las recíprocas de las implicaciones anteriores, en general no son ciertas.

Ejemplo 2.4. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{d\}\}$. Entonces:*

i) $\{a\}$ es un conjunto I-pre-abierto, pero no es I-α-abierto.

ii) $\{a, c\}$ es un conjunto I-β-abierto, pero no es I-pre-abierto.

La intersección de conjuntos I-β-abierto no es necesariamente I-β-abierto como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.5. *Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\},$ $\{a, c\}\}$ e $I = \{\emptyset\}$, consideremos $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$ es fácil ver que A y B son conjunto I-β-abierto, pero $A \cap B = \{b\}$ no lo es.*

Ejemplo 2.6. *Sea $X = \{a, b, c\}$ con topología $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. Entonces $\{b\}$ es I-pre-abierto, pero $cl(\{b\})$ no es I-Pre abierto pero es I-semi abierto.*

Ejemplo 2.7. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología $\tau = \{X, \emptyset,$ $\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ e $I = \{\emptyset\}$. Sea $A = \{b, c\}$, entonces $Cl(A) = X$ es I-semi abierto, pero A no es I-semi abierto. De igual forma como $cl(A)$ es I-β-abierto, A también lo es.*

Ejemplo 2.8. *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ y $A = \{b\}$. A es un conjunto I-α-abierto, pero $cl(A)$ no lo es.*

Ejemplo 2.9. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ e $I = \{\emptyset, \{c\}\}$. $A = \{c\}$ es I-β-abierto, pero $cl(A)$ no lo es.*

Observación 2.10. *En [2, Proposición 6], se enuncia que si I es un ideal sobre (X, τ) tal que la colección de conjuntos abierto satisface la propiedad de intersección finita y cada subconjunto abierto no vacío de X es denso entonces $Cl(A)$ es I-semi abierto si sólo si A es I-semi abierto. Este resultado no es cierto en general, como se ve en el Ejemplo 2.7 anterior, donde la topología τ satisface la propiedad de intersección finita y todo subconjunto abierto no vacio de X es denso, observe que si tomamos $A = \{b, c\}$, obtenemos que $Cl(A) = X$ es I-semi abierto pero A no es I-semi abierto.*

Surge la necesidad entonces de una noción débil de conjuntos semi abiertos con respecto a un ideal para darle repuesta positiva a la pregunta original, como también encontrar las relaciones si existen con los conjuntos definidos anteriormente.

Definición 2. *[10] Un subconjunto A de X se dice que es débilmente semi abierto con respecto a un ideal I (denotado por débilmente I-semi abierto) si $A = \emptyset$ ó si $A \neq \emptyset$ existe un conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tal que $U \setminus A \in I$.*

Observe que los subconjuntos no vacíos en el ideal, no necesariamente son conjuntos débilmente I-semi abiertos y todo dependera si el ideal I y la topología del conjunto, tienen elementos comunes distintos del vacío.

Observación 2.11. *Para cualquier ideal I, se tienen:*

i) si A es un conjunto abierto cualquiera, entonces A es un conjunto débilmente I-semi abierto

ii) si A es un conjunto semi abierto, entonces A es un conjunto débilmente I-semi abierto

iii) si A es un conjunto I-semi abierto, entonces no necesariamente A es un conjunto débilmente I-semi abierto

Ejemplo 2.12. Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ e $I = \{\emptyset\}$. El conjunto $A = \{a, b\}$ es débilmente I-semi abierto, pero no es un conjunto semi abierto, ni tampoco I-semi abierto

El siguiente teorema da una caracterización de los conjuntos no vacios A que son débilmente I-semi abierto.

Teorema 2.13. *Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto de X e I un ideal. A es débilmente I-semi abierto si sólo si existe un conjunto abierto U y $C \in I$ tal que $(U \setminus C) \subset A$*

Demostración. Supongamos que $A \neq \emptyset$ es débilmente I semi abierto, entonces existe un conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tal que $U \setminus A \in I$. Sea $C = U \setminus A = U \cap (X \setminus A)$. Entonces $U \setminus C \subset A$. Recíprocamente supongamos que existe un conjunto abierto U y $C \in I$ tal que $(U \setminus C) \subset A$, luego $(U \setminus A) \subset C$ sigue entonces que $U \setminus A \in I$

Teorema 2.14. *La unión arbitraria de cualquier familia de conjuntos débilmente I-semi abierto es débilmente I-semi abierto.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una colección de conjuntos débilmente I- semi abierto, entonces para cada A_α con $\alpha \in J$, existe U_α, $\alpha \in J$ tal que $U_\alpha \setminus A_\alpha \in I$, ahora tomemos α' fijo en J luego tenemos que $U_{\alpha'} \setminus \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \subset U_{\alpha'} \setminus A_{\alpha'} \in I$ En consecuencia, $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ es débilmente I-semi abierto. La intersección de conjuntos débilmente I-semi abierto no es necesariamente débilmente I-semi abierto como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.15. *Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ e $I = \{\emptyset\}$, consideremos $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$ es fácil ver que A y B son conjunto débilmente I-semi abierto pero $A \cap B = \{b\}$ no lo es.*

Corolario 2.16. *Si A es débilmente I-semi abierto, entonces cualquier subconjunto B que contiene a A es débilmente I-semi abierto, en particular $Cl(A)$ es débilmente I-semi abierto.*

El recíproco del corolario anterior no es necesariamente cierto como se exhibe en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.17. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ e I cualquier ideal tal que $\{b\} \notin I$, consideremos $A = \{a\}$, $cl(A) = \{a, b\}$. Es fácil ver que $cl(A)$ es un conjunto débilmente I-semi abierto pero A no lo es.*

Interesa ahora determinar bajo que condiciones se cumple que si $Cl(A)$ es débilmente I-semi abierto entonces A es débilmente I-semi abierto, para $A \subseteq X$. A este punto, podemos afirmar lo siguiente:

i) Si $Cl(A) = X$, entonces A no es necesariamente es débilmente I-semi abierto.

ii) Si existe $A \subset X$, tal que $Cl(A)$ es un conjunto clopen, entonces A no es necesariamente débilmente I-semi abierto. Observe que si tomamos $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Para $A = \{a\}$, $Cl(A) = \{a, b\}$ es débilmente I-semi abierto pero A no lo es.

iii) Si en [2], tomamos $A \subset \tau$, tal que $Cl(A)$ es un conjunto clopen, entonces A y $cl(A)$ son débilmente I-semi abierto.

Teorema 2.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico e I un ideal tal que la colección de conjuntos abiertos satisface la propiedad de intersección finita, entonces si A y B son débilmente I-semi abierto entonces lo es $A \cap B$.*

Demostración. Dado que A y B son conjuntos débilmente I-semi abiertos, entonces existen conjuntos U, V abiertos tal que $U \setminus A \in I$, $V \setminus B \in I$, por lo tanto $(U \cap V) \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cap V \cup U \cap (V \setminus B) \in I$

Teorema 2.19. *(X, τ) un espacio topológico, $I \neq \emptyset$, τ satisface la propiedad de la intersección finita y $A \subset X$ tal que $Cl(A) \neq X$, entonces $Cl(A)$ es débilmente I-semi abierto si sólo si A es débilmente I-semi abierto.*

Demostración. If A es débilmente I-semi abierto, entonces $Cl(A)$ es débilmente I-semi abierto, usando el Corolario 2.16. Recíprocamente, supongamos que $Cl(A)$ es débilmente I-semi abierto, entonces $Cl(A) = \emptyset$ o si $Cl(A) \neq \emptyset$, existe un conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tal que $U \setminus Cl(A) \in I$. Si $Cl(A) = \emptyset$, entonces $A \in I$. Basta sólo que consideraremos el caso $Cl(A) \neq \emptyset$. Observemos que en este caso el conjunto abierto $V = U \setminus Cl(A)$, $V \neq \emptyset$, $V \in I$ y $V \setminus A = (U \setminus Cl(A)) \setminus A = U \setminus Cl(A) \in I$.

Observación 2.20. *Observe que si en el Teorema 2.19:*

i) *$I \neq \emptyset$ y $Cl(A) \neq X$ son omitidas, la conclusión del teorema anterior no necesariamente es cierta, como se ilustra en el Ejemplo 2.7.*

ii) *Si fuese $Cl(A) = X$, la conclusión del resultado tampoco es válida. Note que en el Ejemplo 2.7, para $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ y $A = \{a, d\}$, obtenemos que $Cl(A)$ es débilmente I-semi abierto pero A no es débilmente I-semi abierto.*

Teorema 2.21. *Sea (X, τ), I un ideal y A un subconjunto denso de X. A es I-β-abierto si y sólo si $cl(A)$ lo es.*

Es fácil observar que la noción de conjuntos debilmente semi abiertos con respecto a un ideal es independiente de todas las nociones de conjuntos definidos anteriormente, como se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.22. *Sean $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ y $A = \{c\}$. Entonces $cl(A)$ es débilmente I-semi abierto, pero $cl(A)$ no es I-β-abierto.*

Ejemplo 2.23. *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ e $I = \{\emptyset\}$. $A = \{a\}$ es I-β abierto, pero A no es débilmente semi abierto con respecto a I.*

Referencias

[1] Abd. El-Monsef, M.E., El-Deeb, S.N., and Mahmould, R. A., *β-open sets and β-continuous mappings*, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ.*, **12 (1983)**,77-90.

[2] Friday Ifeanyi Michael K., *On some open sets with respect to an ideal*, *European Journal of Pure and Applied Mathemetics*, **6(1) (2013)**, 53-58.

[3] S. Jafari and N. Rajesh, *Generalized closed sets with respect to and ideal*, *European Journal of Pure and Applied Mathemetics*, **4(2) (2011)**, 147-151.

[4] N. Levine, semi open sets and semi continuity in topological spaces, *American Mathematical Monthly* **70 (1963)**, 36-41.

[5] H. Maki, R. Chandrasekhara Rao and A. Nagoor Gani, *On generalizing semi-open sets and preopen sets*,*Pure Appl. Math. Math. Sci.*, **49 (1999)**, 17-29.

[6] Mashhour, A. S., Abd. El-Monsef, M.E.and El-Deeb, S.N., *On precontinuous and weak precontinuous mappings*, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, **53 (1982)**,47-53.

[7] Njastad, O., *On some classes of nearly open sets*, *Pacific J. Math*, **15 (1965)**,961-970.

[8] Rodyna A. Hosny, *Preopen sets respect ideal*, *European Journal of Scientific Research*, **104(1), (2013)**,99-101.

[9] Rodyna A. Hosny and Deena Al-Kadi, *Types of Generalized Open Sets with Ideal*, *InternationalJournal of Computer ApplicationsEuropean Journal* **80(4) (2013)**.

[10] Ennis Rosas, Carlos Carpintero, Alvaro Muñoz and Jackeline Pacheco, *Some Remarks on Semi Open Sets with Respect to an Ideal*, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **7(4),(2014)**437-441.

Para citar este articulo: Carlos CARPINTEROS y Ennis ROSA, 2015, *"Sobre aspectos importantes de los conjuntos abiertos generalizados con respecto a un ideal"*.
Disponible en Revistas y publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.