Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas (2014) 95–101

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. 1 , № 2, (2014)

Método del Cero para resolver Inecuaciones

Zero Method to solve Inequalities

Jorge Rodríguez Contreras[1], Angélica Arroyo Cabrera[1]

jorge.jrodri@gmail.com, aarroyo@mail.uniatlantico.edu.co

Samuel Vega Zuñiga[1]

samuel_codachy@hotmail.com

Boris Reyes Cassiani [1]

b-reye@hotmail.com
[1] *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico*

Recibido: 02/12/2014 - Aceptado: 03/12/2014

Resumen

En este trabajo se expone un método alternativo para resolver Inecuaciones que consiste en considerar la recta real para ubicar las raíces del polinomio de la inecuacion y proceder de la siguiente manera:

Si el polinomio tiene raíces reales distintas, se procede a factorizar, ubicar las raíces del polinomio en la recta real y Los intervalos en los que se va a analizar el signo del polinomio son los que se forman entre cada una de las raíces del mismo, siendo el primero el que está a la derecha de la raíz mayor y el ultimo el que esta a la izquierda de la raiz menor. Así, en el primer intervalo colocamos el signo $+$ ya que cualquier elemento perteneciente a ese intervalo es mayor que todas las raíces del polinomio, luego en los intervalos siguientes se coloca el signo $-$ y así sucesivamente se van alternando los signos $+$ y $-$ en los intervalos restantes.Luego el conjunto solución sera la union de los intervalos con el signo de acuerdo a la inecuación.

En los otros casos, llevamos la inecuación a una Inecuación con polinomio de raíces reales distintas y procedemos de igual manera. El hecho de ubicar las raíces del polinomio en una sola recta, hace fácil su comprensión y se convierte en un método de rápida aplicación.

Palabras claves: Inecuación, Método del Cero, polinomio, raíces de un polinomio.

Abstract

In this paper an alternative method to solve Inequalities that is to consider the real line to locate the roots of the polynomial inequality and proceed as follows exposed:

If the polynomial has distinct real roots, factoring proceed, place the roots of the polynomial on the real line and the intervals in which the sign is to analyze the polynomial are formed between each of the roots of it, the first being the one to the right of the main root and the last the one to the left of the lower root. Thus, in the first interval put the $+$ sign as any element belonging to this interval is greater than all the roots of the polynomial, then in the following ranges the sign is placed $-$ and so on alternating signs $+$ and $-$ restantes.Luego intervals in the solution set will be the union of the intervals according to the sign of the inequality.

In other cases, the inequality took a polynomial inequality with distinct real roots and proceed the same way. The fact of placing the roots of the polynomial in one line, makes it easy to understand and becomes a rapid application method.

Keywords: Inequality, Zero method, polynomial roots of a polynomial.

1. Introducción

En la mayoría de los textos de cálculo, se suele trabajar la resolución de inecuaciones a partir del método de las cruces, también conocido como el método del cementerio; el procedimiento para resolver inecuaciones utilizando este método se basa en factorizar el polinomio y considerar rectas verticales u horizontales para cada uno de los factores. Este ha sido el método que de forma tradicional ha sido empleado, pero presenta el inconveniente de que para polinomios de grado mayor que 4 resulta tedioso su aplicación por el número de rectas a considerar. Por esa razon se presenta aquí un método alternativo que permita reducir el número de pasos a considerar al momento de resolver una inecuación de cualquier grado y que sea de fácil aplicación para los estudiantes, el cual llamaremos ***Método del Cero***. Para aplicar este método se hacen las siguientes consideraciones:

1. Para un polinomio con raíces reales distintas se siguen los pasos a continuación:

   - Se factoriza el polinomio $f_n = a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n)$.
   - Se ubican las raíces $r_1, r_2, ..., r_n$ en la recta real.
   - Los intervalos en los que vamos a analizar el signo del polinomio son los que se forman entre cada una de las raíces del mismo, siendo el primero el que está a la derecha de la raíz mayor y el ultimo el que esta a la izquierda de la raiz menor.
     Así, en el primer intervalo colocamos el signo $+$ ya que cualquier elemento perteneciente a ese intervalo es mayor que todas las raíces del polinomio, luego en el siguiente intervalo colocamos el signo $-$ ya que cualquier elemento perteneciente a ese intervalo es mayor que todas las raíces excepto la mayor, luego en el siguiente, el signo $+$ y así sucesivamente hasta asignarle un signo al ultimo intervalo de la izquierda, que seria mas $(+)$ en el caso de que el número de raíces sea par y menos $(-)$ en el caso de que el número de raíces sea impar. Luego el conjunto solución sera la union de los intervalos con el signo de acuerdo a la inecuación.

2. En los otros casos, llevamos la inecuación a una Inecuación con polinomio de raíces reales distintas y procedemos de igual manera.

2. Marco Teórico

En este trabajo se presenta un método nuevo para resolver inecuaciones que se ha llamado ***Método del Cero***, el cual fue producto de la imaginación de los autores de este artículo y de la experiencia vivida en el desarrollo de los cursos de Cálculo I. A continuación se presentan algunos conceptos básicos que fueron de apoyo para la realización de este trabajo: Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas en los miembros de la desigualdad. Si la desigualdad es del tipo $<$ o $>$ se denomina inecuación en sentido estricto y si es del tipo $\leq$ o $\geq$ se denomina inecuación en sentido amplio.

Método para resolver una inecuación- Método de las cruces o del Cementerio

Procedimiento para emplear el método:

1. Se factoriza el polinomio.

2. Se Traza una rectal real, ubicando las raíces de la inecuación.

3. Se escriben verticalmente cada factor del polinomio, y horizontalmente cada intervalo en los que queda dividida la recta real al ubicar las raíces.

4. Se evalúa cada factor por cada intervalo para así determinar su signo. Para la evaluación se pueden tomar cualesquiera de los valores que pertenezcan al intervalo, con excepción de los valores de los extremos (las raíces que anulan tanto a uno como otro factor).

5. Haciendo uso de la Regla de los signos, se multiplican verticalmente los signos obtenidos para obtener el resultado.

6. Finalmente, se observa el sentido de la igualdad de la inecuación. Si el sentido de la inecuación es $>$, la solución estará constituida por la unión de los intervalos, los cuales indiquen el signo $+$. En caso contrario, si el sentido de la inecuación es $<$, la solución estará constituída por la unión de los intervalos, los cuales indiquen el signo $-$.

Se puede ver que este método puede ser tedioso para resolver inecuaciones que contengan para polinomios de grado mayor que 4 por el número de rectas a considerar. Por esa razon se presenta aquí el método alternativo ***Método del Cero*** que permite reducir el número de pasos a considerar al momento de resolver una inecuación de cualquier grado y es de fácil aplicación para los estudiantes.

3. Resultados y Análisis

A continuación se presenta un método alternativo que permite reducir el número de pasos a considerar al momento de resolver una Inecuación, el cual llamaremos "**El método del cero**".

Sea $p(x)$ un polinomio de grado n con todas sus raíces reales distintas. Es decir

$$p(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n)$$

Entonces

✲ Si $p(x)$ es de grado par, es decir $n = 2m$, entonces

- ✲ $p(x) > 0$ en $S = (-\infty, r_1) \bigcup \Big(k = 1m - 1 \cup (r_{2k}, r_{2k+1}) \Big) \cup (r_{2m}, \infty)$
- ✲ $p(x) < 0$ en $S = \Big(k = 1m \cup (r_{2k-1}, r_{2k}) \Big)$.

✲ Si $p(x)$ es un polinomio de grado impar, es decir $n = 2m+1$, entonces

- ✲ $p(x) > 0$ en $S = \bigcup \Big(k = 1m \cup (r_{2k-1}, r_{2k}) \Big) \bigcup (r_{2m+1}, \infty)$
- ✲ $p(x) < 0$ en $S = (-\infty, r_1) \bigcup \Big(k = 1m \cup (r_{2k}, r_{2k+1}) \Big)$.

Demostración.

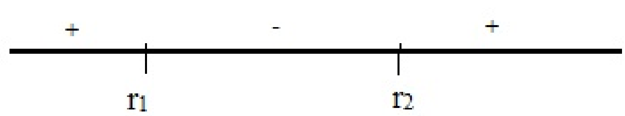
✲ Esta demostración la haremos por inducción sobre m.
Si $m = 1$ se tiene que $p(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)$ y $r_1 < r_2$ entonces:

1. Si $x > r_2$ entonces $x > r_1$, así que $(x - r_2) > 0$ y $(x - r_1) > 0$, luego $(x-r_2)(x-r_1) > 0$.

2. Si $r_1 < x < r_2$ entonces $(x-r_2)(x-r_1) < 0$

3. Si $x < r_1$ entonces $x < r_2$, así que $(x - r_2)(x - r_1) > 0$

Por lo tanto $p(x) > 0$ en $S = (-\infty, r_1) \cup (r_2, \infty)$ y $p(x) < 0$ en $S = (r_1, r_2)$.
Así que se cumple para $m = 1$.
Gráficamente:



Supongamos que se cumple para $m = k$, es decir $n = 2k$ con $r_1 < r_2 < \dots < r_{2k}$
Demostremos que se cumple para $m = k+1$, y $r_1 < r_2 < \dots < r_{2k} < r_{2k+1} < r_{2k+2}$.

a) Sea $x > r_{2k+2}$ entonces $x > r_{2k+1} > r_{2k} > \dots > r_2 > r_1$, luego

$$(x-r_{2k+2})(x-r_{2k+1})(x-r_{2k})\dots(x-r_2)(x-r_1) > 0$$

Así que $p(x) > 0$ en (r_{2k+2}, ∞).

b) Supongamos que $r_{2k+1} < x < r_{2k+2}$ entonces $x > r_{2k} > \ldots > r_2 > r_1$ así que

$$(x - r_{2k+2}) < 0 \quad \text{y} \quad (x - r_{2k+1})(x - r_{2k})\ldots(x - r_2)(x - r_1) > 0$$

luego

$$(x - r_{2k+2})(x - r_{2k+2})(x - r_{2k+1})(x - r_{2k})\ldots(x - r_2)(x - r_1) < 0$$

Así que $p(x) < 0$ en (r_{2k}, r_{2k+1}).

c) Supongamos que

i. $x \in \Big((-\infty, r_1) \bigcup \Big(\ k = 1k-1 \cup (r_{2j}, r_{2j+1})\Big)\Big)$, luego $x < r_{2k+1} < r_{2k+2}$ y

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots(x - r_{2k-1}) > 0$$

entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots (x - r_{2k})(x - r_{2k+1})(x - r_{2k+2}) < 0$$

ii. $x \in \Big(k = 1k \cup (r_{2j-1}, r_{2j})\Big)$, luego $x < r_{2k+1} < r_{2k+2}$ y $a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots(x - r_{2k}) < 0$, entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots (x - r_{2k})(x - r_{2k+1})(x - r_{2k+2}) < 0$$

Luego para $n = 2k+2$ se tiene:

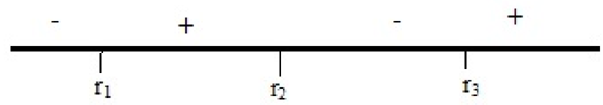
* $p(x) > 0$ en $S = (-\infty, r_1) \bigcup \Big(\ j = 1k \cup (r_{2j}, r_{2j+1})\Big) \cup (r_{2k+2}, \infty)$
* $p(x) < 0$ en $S = \Big(\ j = 1k \cup (r_{2j-1}, r_{2j+2})\Big)$.

Por lo tanto el teorema se cumple para todo $m \geq 1$.

✲ Probaremos por inducción sobre m
Si $m = 1$ se tiene que $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ con $r_1 < r_2 < r_3$ entonces

1. Si $x > r_3$ entonces $x > r_2 > r_1$ luego $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) > 0$
2. Si $r_1 < r_2 < x < r_3$ entonces $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) < 0$
3. Si $r_1 < x < r_2 < r_3$ entonces $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) > 0$
4. Si $x < r_1 < r_2 < r_3$ entonces $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) < 0$

Por lo tanto $p(x) > 0$ en $S = (r_1, r_2) \cup (r_3, \infty)$ y $p(x) < 0$ en $S = (-\infty, r_1) \cup (r_2, r_3)$
Así que se cumple para $m = 1$.
Gráficamente:



Supongamos que se cumple para $m = k$, es decir $n = 2k+1$ con $r_1 < r_2 < \ldots < r_{2k+1}$
Demostremos que se cumple para $m = k+1$, y $r_1 < r_2 < \ldots < r_{2k} < r_{2k+1} < r_{2k+2} < r_{2k+3}$.

a) Sea $x > r_{2k+3}$ entonces $x > r_{2k+3} > r_{2k+2} > \ldots > r_2 > r_1$, luego

$$(x - r_{2k+3})(x - r_{2k+2})(x - r_{2k+1})\ldots(x - r_2)(x - r_1) > 0$$

Así que $p(x) > 0$ en (r_{2k+3}, ∞).

b) Supongamos que $r_{2k+2} < x < r_{2k+3}$ entonces $x > r_{2k+2} > \ldots > r_2 > r_1$ así que

$$(x - r_{2k+3}) < 0 \quad \text{y} \quad (x - r_{2k+2})(x - r_{2k+1}) \ldots (x - r_2)(x - r_1) > 0$$

luego

$$(x - r_{2k+3})(x - r_{2k+2})(x - r_{2k+1})(x - r_{2k})\ldots (x - r_2)(x - r_1) < 0$$

Así que $p(x) < 0$ en (r_{2k+2}, r_{2k+3}).

c) Supongamos que

i. $x \in \Big(\ j = 1k \cup (r_{2j-1}, r_{2j})\Big)$, luego $x < r_{2k+2} < r_{2k+3}$ y

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots (x - r_{2k+1}) > 0$$

entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots (x - r_{2k})(x - r_{2k+1})(x - r_{2k+2}) > 0$$

ii. $x \in \Big((-\infty, r_1) \bigcup \Big(\ j = 1k \cup (r_{2j-1}, r_{2j})\Big)\Big)$, luego $x < r_{2k+2} < r_{2k+3}$ y $a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1})\ldots(x - r_{2k+1}) < 0$, entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_j)(x - r_{j+1}) \ldots (x - r_{2k})(x - r_{2k+1})(x - r_{2k+2}) < 0$$

Luego para $n = 2k+2$ se tiene:

- $p(x) > 0$ en $S = \Big(j = 1k + 1 \cup (r_{2j-1}, r_{2j}) \Big) \cup (r_{2k+3}, \infty)$
- $p(x) < 0$ en $S = \Big((-\infty, r_1) \cup \big(j = 1k + 1 \cup (r_{2j}, r_{2j+1}) \big) \Big)$.

Por lo tanto el teorema se cumple para todo $m \geq 1$.

□

- Sea $p(x)$ un polinomio con una raíz de multiplicidad par. Supongamos

  $$p(x) = a_n (x - r_1)^{2p} (x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

  con $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ y $a_n > 0$. Entonces

  - $p(x) > 0 \Leftrightarrow q(x) = (x - r_2) \ldots (x - r_n) > 0$
  - $p(x) < 0 \Leftrightarrow q(x) = (x - r_2) \ldots (x - r_n) < 0$

- Sea $p(x)$ un polinomio con una raíz de multiplicidad impar. Supongamos

  $$p(x) = a_n (x - r_1)^{2p+1} (x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

  con $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ y $a_n > 0$. Entonces

  - $p(x) > 0 \Leftrightarrow q(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) > 0$
  - $p(x) < 0 \Leftrightarrow q(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) < 0$

- Sea $p(x)$ un polinomio con 2 raíces complejas, digamos $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ y

  $$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$$

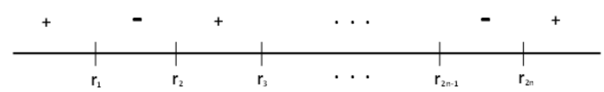
  con $r_3 < \ldots < r_n$ y $a_n > 0$. Entonces

  - $p(x) > 0 \Leftrightarrow (x - r_3) \ldots (x - r_n) > 0$
  - $p(x) < 0 \Leftrightarrow (x - r_3) \ldots (x - r_n) < 0$

Demostración. □

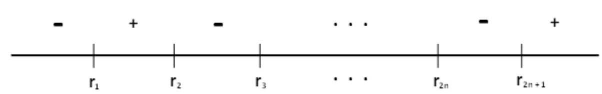
3.0.1. *Representación Gráfica de la Solución de una Desigualdad*

Ahora representaremos gráficamente la solución de una desigualdad, la raíces del polinomio son los ceros quienes son las divisiones de la parte positiva y parte negativa y la unión de todos los intervalos que tienen el signo + equivale a los valores de x donde el polinomio es positivo y donde tienen el signo menos representa el conjunto de los x donde el polinomio es negativo. En este caso consideraremos $p(x) \geq 0$



Así que la solución en este caso viene dada por

$$S = (-\infty, r_1] \bigcup \Big(k = 1n - 1 \cup [r_{2k}, r_{2k+1}] \Big) \bigcup [r_{2n}, \infty)$$



Y para este caso la solución es

$$S = [r_1, r_2] \cup \Big(k = 1n - 1 \cup [r_{2k+1}, r_{2k+2}] \Big) \cup [r_{2n+1}, \infty)$$

Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas

$12x^3 + 8x^2 - 13x + 3 \geq 0$

Solución

Factorizando el polinomio obtenemos que $p(x) = 12(x - 1/3)(x - 1/2)(x + 3/2)$ luego

$$12(x - 1/3)(x - 1/2)(x + 3/2) \geq 0$$

Así que el conjunto solución es:

$$S = [-3/2, 1/3] \cup [1/2, \infty)$$

$x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 27x + 18 \leq 0$

Solución

Factorizando el polinomio se tiene que $p(x) = (x-2)(x-3)(x^2-2x+3)$ luego

$$(x-2)(x-3)(x^2-2x+3) \leq 0$$

Como $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ se tiene

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Luego el conjunto solución es:

$$S = [2,3]$$

$x^5 - 9x^4 + 37x^3 - 53x^2 - 24x + 76 < 0$

Solución

Factorizando el polinomio se tiene que $p(x) = (x-2)^2(x+1)(x^2-6x+19)$ así que

$$(x-2)^2(x+1)(x^2-6x+19) < 0$$

Ahora como $(x-2)^2 \geq 0$ entonces

$$(x+1)(x^2-6x+19) < 0$$

Pero hay que tener presente que $x = 2$ es una raíz del polinomio y por lo tanto no hace parte del conjunto solución. Por otra parte $x^2 - 6x + 19 = (x-3)^2 + 10 > 0$ así que

$$x + 1 < 0$$

Luego el conjunto solución es:

$$S = (-\infty, -1)$$

4. Conclusión

En el presente artículo se presentó un método alternativo para resolver Inecuaciones que es de rápida aplicación y de fácil comprensión que consiste en considerar la recta real para ubicar las raíces del polinomio de la inecuación y proceder de la siguiente manera:

- Si el polinomio tiene raíces reales distintas, se procede a factorizar, ubicar las raíces del polinomio en la recta real y Los intervalos en los que se va a analizar el signo del polinomio son los que se forman entre cada una de las raíces del mismo, siendo el primero el que está a la derecha de la raíz mayor y el ultimo el que esta a la izquierda de la raíz menor.

  Así, en el primer intervalo colocamos el signo $+$ ya que cualquier elemento perteneciente a ese intervalo es mayor que todas las raíces del polinomio, luego en los intervalos siguientes se coloca el signo $-$ y así sucesivamente se van alternando los signos $+$ y $-$ en los intervalos restantes.Luego el conjunto solución sera la union de los intervalos con el signo de acuerdo a la inecuación.

- En los otros casos, llevamos la inecuación a una Inecuación con polinomio de raíces reales distintas y procedemos de igual manera. El hecho de ubicar las raíces del polinomio en una sola recta, hace fácil su comprensión y se convierte en un método de rápida aplicación.

. Para la construcción de este método se enunciaron teoremas y proposiciones que se encuentran demostradas aquí y que sustentan el método.

Reconocimiento: Este artículo es un producto del Proyecto *SEMILLERO DE INVESTIGACIÓN - GRUPO DE INVESTIGACIÓN SISTEMAS DINÁMICOS Y EDOS* Financiado por Colciencias y la Universidad del Atlántico.

Referencias

[1] Rodríguez Jorge, Arroyo Angélica, Salas Lesly, Villarreal Alejandro. *CÁLCULO I- NOTAS DE CLASE*. Universidad del Atlántico, Colombia.

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Inecuaci %C3 %B3n.

[3] http://www.fmat.cl/index.php?showtopic=9352.ϵ

Para citar este artículo: Jorge Rodríguez Contreras et al . 2014, "Método del Cero para resolver Inecuaciones". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.