Universidad del Atlántico

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas (2014) 7–11

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. 1 , № 2, (2014)

Función de Lyapunov para una caso particular del Circuito de Chua

Lyapunov Function for a particular case Chua Circuit

Jorge Rodríguez Contreras[1]

[1] *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico*
jorge.jrodri@gmail.com

Angélica Arroyo Cabrera[2]

[2] *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico*
aarroyo@mail.uniatlantico.edu.co

Ever Vásquez Álvarez[3]

[3] *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico*
evervasquez0123@gmail.com

Recibido: 02/12/2014 - Aceptado: 03/12/2014

Resumen

En este trabajo se considera la existencia de soluciones periódicas en el espacio, en un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el circuito de Chua. Determinaremos sus puntos de equilibrio; linealizamos el sistema y estudiaremos a fondo las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha c + 1)\lambda^2 + (\alpha c - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta c = 0$, dando condiciones necesarias a cada uno de los parámetros α, β y c. Dado que en los sistemas diferenciales ordinarios no lineales la determinación de la estabilidad global asintótica en los puntos de equilibrio tiene una importancia especial, construiremos una función de Lyapunov para el sistema lineal bajo ciertas condiciones, demostrando que el punto de equilibrio es asintóticamente estable ya que la derivada de la función de Lyapunov es menor que cero.

Palabras claves: Circuito de Chua, Lyapunov, punto de equilibrio

Abstract

This paper considers the existence of periodic solutions in space, in a particular case the system of differential equations describing the Chua circuit. Determine their equilibrium; linearize the system and thoroughly study the roots of the characteristic polynomial $p(lambda) = lambda^3 + (alphac + 1) lambda^2 + (alphac - alpha + beta) lambda + alpha betac = 0$, giving necessary conditions for each of the parameters $alpha$, $beta$ and c. As in ordinary nonlinear determining global asymptotic stability in the equilibrium points differential systems is particularly important, build a Lyapunov function for the linear system under certain conditions, showing that the equilibrium point is asymptotically stable since the derivative of the Lyapunov function is less than zero.

Keywords: Chua circuit, Lyapunov, equilibrium point.

1. Introducción

En el problema del estudio de la existencia de soluciones periódicas en un sistema diferencial no lineal en el espacio, se han desarrollado diversos trabajos realizados por investigadores en el tema, de los cuales hemos destacado los más recientes en orden cronológico concernientes al estudio de la existencia de soluciones periódicas en un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el circuito de Chua.

En Septiembre de 2014 fue publicado en la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* el trabajo realizado por el Investigador Juhong Kuang, titulado *Existence of homoclinic solutions for higher-order periodic difference equations with p-Laplacian* en el cual, a través del uso de la teoría del punto crítico en combinación con aproximaciones periódicas , establece las condiciones suficientes para la existencia de soluciones homoclínicas en ecuaciones en diferencias periódicas de orden superior con p - Laplaciano, en sus resultados proporciona condiciones más débiles para garantizar la existencia de soluciones homoclínicas. En Mayo de ese mismo año se publica en la revista *Applied Mathematics and Computation* el trabajo realizado por los autores J. Kalas, Z. Kadeábek, titulado *Periodic solutions of a generalized Van der Pol-Mathieu differential equation*, en el que se estudia la ecuación generalizada Van der Pol - Mathieu con un pequeño parámetro ε. Se prueba la existencia de soluciones periódicas y cuasiperiódicos utilizando el método de promedio, el método de complejación y el espacio fase de análisis de una ecuación diferencial autónoma. En ese mismo año se publica en la revista *Fixed Point Theory* el trabajo realizado por los autores Li, Shengjun; Liao, Fang-Fang; Zhu, Hailong; en él se estudia la existencia de soluciones no negativas de segundo orden los sistemas diferenciales no lineales con condiciones de frontera periódicas.El método que ellos proponen, titulado *Guo-Krasnosel'skii*, se basa en la teorema del punto fijo de la expansión del cono. En el año 2013 se publica el libro titulado *Travelling Wave Solutions, Periodic and Chaotic Solutions of a PDE Approximation of Coupled Chua's Circuits*, Tesis postdoctoral desarrollada por el autor Jiang - Ming, en el cual se estudia un sistema singularmente perturbado de ecuaciones diferenciales parciales que modela un arreglo unidimensional de circuitos de Chua acoplados. El sistema EDP es una generalización natural de la ecuación del Fitzhugh-Nagumo. En los trabajos anteriores se estudia la existencia de soluciones periódicas para caso particulares de un sistema de ecuaciones diferenciales. Para nuestro caso, este trabajo se centra en el estudio de la existencia de soluciones periódicas en el espacio, en un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el circuito de Chua.Determinando sus puntos de equilibrio, linealizando el sistema, construyendo una función de Lyapunov para el sistema linealizado bajo ciertos parámetros y demostrando que el único punto de equilibrio es asintóticamente estable.

2. Marco Teórico

En este trabajo nos proponemos estudiar los fenómenos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal en el espacio que explica el comportamiento de las variables eléctricas del circuito de Chua. Lo que diferencia a este trabajo de los que conocemos que se han realizado en este tema es que han sido abordados desde el punto de vista numérico. En este artículo intentamos hacer un estudio cualitativo del sistema, algo más general.

A continuación presentaremos algunos conceptos básicos que serán de apoyo para la realización de este trabajo.

2.1. Circuito de Chua

El Circuito de Chua, fue uno de los primeros sistemas eléctricos en los cuales se detectó la presencia de Caos. Este circuito fue inventado en el año 1983, por el Prof. Leon Ong Chua de la universidad de Berkeley, California. Inicialmente fue una respuesta a los fallidos intentos de producir un ánlogo eléctrico lineal a trozos de la ecución de Lorenz.

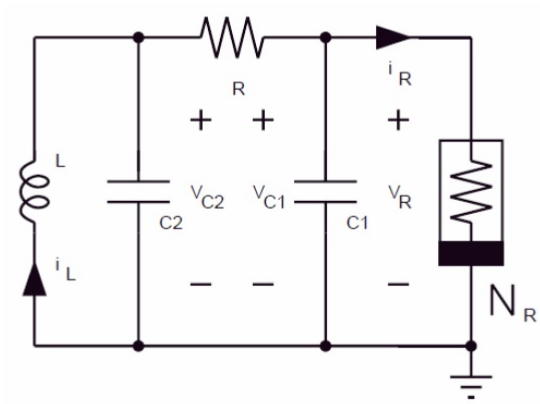


Figura 1. Circuito de Chua

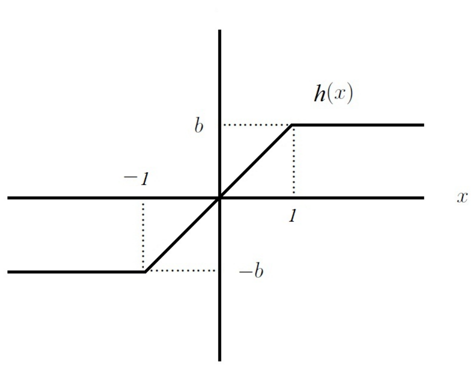


Figura 2. Función de transferencia

El circuito de chua, es analizado por ser una red eléctrica simple que exhibe una variedad de fenómenos de bifurcaciones y atractores.

Al aplicar las leyes de Kirchhoff al Circuito de Chua de la figura anterior, y teniendo en cuenta las variables señaladas en el esquema, se obtienen las siguientes ecuaciones que describen su comportamiento:

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R_0}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_R \quad (1)$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R_0}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \quad (2)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2} \quad (3)$$

Donde i_R es la función de respuesta del elemento no lineal las variables que surgen en las ecuaciones son la tensión V_{C_1} que aparecen en bornes del condensador de la derecha, la tensión V_{C_2} que aparecen en bornes del condensador izquierdo e i_L que se trata de la intensidad que circula por la bobina. Las constantes que aparecen en el sistema de ecuaciones diferenciales son las capacitancias C_1 y C_2 de los dos condensadores, la inductancia L de la bobina, la resistencia interna r_0 de la bobina y la resistencia variable R_0 del potenciómetro.

Nos proponemos estudiar los fénomenos del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal en el espacio, el cual explica el comportamiento de las variables eléctricas del circuito de chua:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha\big(y - h(x)\big) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (4)$$

donde la función de transferencia $h(x)$ esta dada por

$$h(x) = \begin{cases} b & si \quad x \geq 1 \\ cx & si \quad \mid x \mid < 1 \\ -b & si \quad x \leq -1 \end{cases} \quad (5)$$

La forma en el espacio del sistema de ecuaciones diferenciales; se obtienen con los cambios de variable:

$$x = \frac{V_{C_1}}{B_P}; \quad y = \frac{V_{C_2}}{B_P}; \quad z = \frac{R_0 i_L}{B_P}; \quad \tau = tR_0C_2$$

3. Resultados y Análisis

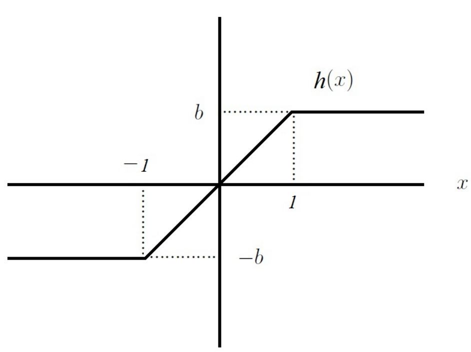
Para el estudio de la existencia de soluciones periódicas para un caso particular del circuito de Chua, inicialmente se caracterizó el comportamiento del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha\big(y - h(x)\big) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$

donde la función $h(x)$ esta dada por

$$h(x) = \begin{cases} b & si \quad x \geq 1 \\ cx & si \quad \mid x \mid < 1 \\ -b & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

La gráfica de la función h esta dada por la Figura:



la función h es de Lipschitz, h' existe y es continua en un entorno de 0 y $h'(0) = c > 0$ $xh(x) > 0$ si $x \neq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
El sistema de ecuaciones diferenciales enunciado arriba presentó un único punto de equilibrio en $(0,0,0)$

Luego, Para el estudio del punto singular se linealizó el sistema de ecuaciones diferenciales y se obtuvo :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha y - \alpha c x \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$

Para el que se halló el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha c + 1)\lambda^2 + (\alpha c - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta c = 0$$

Donde, λ_1, λ_2, λ_3, las raíces del polinomio característico,satisfacen:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = -(\alpha c + 1) \\ A_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = \alpha(c-1) + \beta \\ A_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = -\alpha\beta c \end{cases}$$

Se establecen los parámetros c, α y β positivos, y además se establece que el parámetro α cumpla la siguiente condición:

$$\alpha c + \beta > \alpha$$

Se construyó una función de Lyapunov cuya derivada es menor que cero, probando con ésto que el único punto crítico $(0,0,0)$ es estable. Esta función tiene esta forma:

$$W = \kappa_1(Ax + By)^2 + \kappa_2(Dy + Ez)^2 + \kappa_3 y^2$$

Se espera en un futuro poder construir una función de Lyapunov para el sistema no lineal y con ello mostrar que la solución del sistema es globalmente asintóticamente estable. Finalmente se intentará construir una esfera atractora en $\mathbb{R}^3$ que encierre al origen tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para t suficientemente grande.

4. Conclusión

Para el sistema de ecuaciones diferenciales estudiado, que es un caso particular de del sistema que describe el circuito de Chua se determinó el punto de equilibrio, se estudiaron a fondo las raíces del polinomio característico y se construyó una función de Lyapunov de la forma $W = \kappa_1(Ax + By)^2 + \kappa_2(Dy + Ez)^2 + \kappa_3 y^2$ cuya derivada es menor que cero, demostrando que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Reconocimiento: Este artículo es un producto del Proyecto *EXISTENCIA DE OSCILACIONES EN EL CIRCUITO DE CHUA* Financiado por Colciencias y la Universidad del Atlántico a través del apoyo titulado *Joven Investigador*- Joven Investigador: Angélica Arroyo Cabrera.

Referencias

[1] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Estados Unidos de América.

[2] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition, Estados Unidos de América.

[3] Ir. L. Kodde. Prof. dr. H. Nijmeijer. *Chua's Circuit Synchronisation*. Eindhoven, 5 mai 2004.

[4] Cartwright, M. L., *The Stability Of Solutions Of Certain Differential Iquations Of The Fourth Order*. The Quaterly Journal Of Mechanic and Applied Mathematics, 9(1956), pp 185 - 194.

[5] Jaime Martínez. *Derivación numérica de EDO's: Circuito de Chua*. [Documento en línea]. ¡http://http://www.slideshare.net/balzasbravas/derivacin-numrica-de-ecuaciones-diferenciales-ordinarias/ Consultado: Mayo 2014.

[6] Jorge Rodríguez Contreras. *Existencia, Perturbación y Anulación de Soluciones Periódicas en un Sistema de Ecuaciones Diferenciales en el Espacio*. [Documento en línea]. Bellatera, Maig del 2003. ¡http://www.tdx.cat/bitstream/10803/3079/1/jrc1de1.pdf¿. Consultado: Febrero 2014.

[7] Sandra Kahan. *Bifurcaciones Homclínicas en el Circuito de Chua*. [Documento en línea]. ¡http://www.fing.edu.uy/ skahan/todo.pdf¿Consultado: noviembre 2013.

[8] Sitio web Biblioteca digital repositorio institucional UN. ¡http://http://www.bdigital.unal.edu.co/23758/1/20803-106535-1-PB.pdf¿.

[9] William E. Boyce, Richard C. Diprima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Editorial John Wiley & Sons, Inc. Seventh edición, Hoboken, New Jersey.

[10] G. Conde S., G. M. Ramírez A. *Estudio de Dos Circuitos Caóticos*, Revista Bolivarina de Física 13, 58 - 74 del 2007.

[11] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon and A.G. Maier. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*,, John Wiley & Sons, New York, 1973.

Para citar este artículo: Jorge Rodríguez Contreras et al . 2014, "Función de Lyapunov para una caso particular del Circuito de Chua". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.