Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. I , Nº 2, (2014)

Revista Del Programa De Matemáticas (2014) 18–24

Una nota sobre polinomios de Gegenbauer

A note on Gegenbauer polynomials

Pedro L. Hernández Llanos[1]

[1] *Programa de Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
phernandezllanos@mail.uniatlantico.edu.co

Luis R. Siado Castañeda[2]

[2] *Programa de Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
luisrsiado88@gmail.com

Alejandro Urieles Guerrero[3]

[3] *Programa de Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Recibido: 02/12/2014 - Aceptado: 03/12/2014

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar algunas propiedades diferenciales que satisfacen los polinomios ortogonales de Gegenbauer $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda > -\frac{1}{2}$ real, como la ecuación diferencial, fórmula de Rodrigues, norma, derivada de orden uno. Además, mostraremos algunas propiedades algebraicas tales como: expresión explícita, coeficiente principal, fórmula de recurrencia a tres términos y la fórmula de Christoffel-Darboux.

Palabras claves: Producto interior; ortogonalidad; sucesión de polinomios ortogonales; funcional de momentos; funcional definido-positivo; polinomios de Jacobi.

Abstract

The main objective of this work is to study some properties which satisfy differential properties of the Gegenbauer orthogonal polynomials $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}$ with $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda > -\frac{1}{2}$ real, as the differential equation, Rodrigues formula, norm, derivative of order one. Furthermore, we show some algebraic properties such as explicit expression, principal coefficient, recurrence formula three terms and the Christoffel-Darboux formula.

Keywords: Inner product, Orthogonality, orthogonal polynomials sequence, moment functional; positive-definite functional; Jacobi polynomials.

1. Introducción

La teoría de sistemas ortogonales y en particular la de los sistemas de polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas en la recta real ha sido de especial interés no sólo desde una perspectiva analítica (propiedades asintóticas, distribución de sus ceros) sino desde un amplio espectro de aplicaciones (Integración Numérica, representación de grupos cuánticos, Entropías de la Información, Análisis Armónico, métodos espectrales para el tratamiento de problemas de valores en la frontera, Teoría de Grafos, sistemas integrables, etc).

Recientemente, muchos autores han estudiado un tipo especial de polinomios ortogonales llamados de Gegenbauer denotados por $P_n^{\lambda}(x)$ definidos para parámetro λ real y $n \in \mathbb{N}$ los cuales tienen una interpretación electrostática y tienen mucha importancia como también en los sistemas cuánticos d-dimensionales como es el caso del oscilador ármonico isótropo y el átomo de hidrogéno enmarcados en el campo de la física matemática. En el año 2000 Buyarov, et al. [2] dieron un método eficaz para calcular la entropía para los polinomios de Gegenbauer con un parámetro entero y obtener los primeros términos de la expansión asintótica cuando el grado del polinomio tiende al infinito. Sánchez-Ruiz en 2003 [11] mostró que $P_n^{(\lambda)}(x)$ está relacionado con los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Gauss para el peso de Gegenbauer $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, y este hecho se utiliza para obtener la forma explícita de $P_n^{(\lambda)}(x)$. En 2007 de Vicente et al. [4] presentan un nuevo enfoque para la evaluación de la entropía de información de los polinomios de Gegenbauer, que hace uso de representaciones trigonométricas y técnicas de integración compleja. Estos polinomios también tienen aplicaciones en la Geometría Diferencial donde aparece de manera natural el parámetro $\lambda = n \in \mathbb{N}$ en las isometrías de la hiperesfera en $\mathbb{R}^{n+2}$ por lo que son también llamados polinomios ultraesféricos. Pollard (1948) probó que los polinomios ortogonales de Gegenbauer eran una base para el espacio $L_w^p[-1,1]$ para todo p, $2-\frac{1}{2} < p < 2+\frac{1}{2}$. En el presente trabajo realizamos inicialmente un estudio de los sistemas de polinomios ortogonales siguiendo el enfoque de los trabajos clásicos dados en Szego (ver [12]) y Chihara [3] hasta llegar a los polinomios de Gegenbauer. En la sección 2 damos algunos resultados y observaciones conocidas que serán utilizados en el trabajo.

Finalmente, en la sección 3 estudiamos los polinomios de Gegenbauer sus propiedades diferenciales y algebraicas así como mostrarémos algunas gráficas de estos polinomios.

2. Resultados Previos y Notación

Como es usual $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. También a lo largo del trabajo $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ denotará el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos, $\mathbb{P}$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y variable real.

Sea L un funcional lineal definido en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, por $\langle L, P(x)\rangle$ denotamos la acción del funcional lineal L sobre el polinomio $P(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$.

Definición **2.1.** Sea $\{m_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números complejos y L un funcional lineal definido sobre $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, tal que

$$\langle L, x^n \rangle = m_n < +\infty, \qquad n \geq 0.$$

Entonces la sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ se denomina sucesión de momentos. L se denomina funcional de momentos asociado a la sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$. El valor m_n, se denomina n-ésimo momento asociado al funcional lineal L.

Definición **2.2.** Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$ y L un funcional de momentos sobre $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Se dice que la familia $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO), con respecto a L si:

1. $P_n(x)$ es de grado n, para todo $n \geq 0$,
2. $\langle L, P_n(x)P_m(x)\rangle = 0$ para $m \neq n$,
3. $\langle L, P_n^2(x)\rangle \neq 0$.

Si el coeficiente principal de $P_n(x)$ es 1 para todo n, se dice que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional de momentos L (SPOM).

TEOREMA 1. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. L es definido positivo si y sólo si todos sus momentos son todos reales y $\Delta_n > 0$.

DEFINICIÓN **2.3.** Sea $p(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$. Un funcional de momentos L es llamado definido positivo si $\langle L, p(x)\rangle > 0$ para todo $p(x)$ que no es identicamente cero y no negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea L un funcional de momentos y $\{m_n\}_{n\geq 0}$ la correspondiente sucesión de momentos. Designaremos por Δ_n el determinante de Hankel de orden $n+1$ asociado a la sucesión de los $2n+1$ primeros momentos

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} \cdots & m_{2n} \end{vmatrix}$$

DEFINICIÓN **2.4.** Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Un funcional de momento L es llamado cuasi-definido o regular si $\Delta_n \neq 0$ para $n \geq 0$.

El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un SPO con respecto a un funcional de momentos L [3].

TEOREMA 2. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y L un funcional de momentos asociado a la sucesión de momentos $\{m_n\}_{n\geq 0}$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un SPO con respecto a L es que sea regular.

A partir de un funcional lineal L, podemos introducir una forma bilineal sobre $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, que denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dada por $\langle p, q\rangle = \left\langle L, p(x)\overline{q(x)}\right\rangle$, donde $p(x), q(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$.

En particular, si L es definido positivo, entonces la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define un producto interior en $\mathbb{P}$. Si $\{P_n(x)\}_{n\geq}$ es una SPO para L, se tiene:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \left\langle L, P_n(x)\overline{P_m(x)}\right\rangle = \langle L, P_n(x)P_m(x)\rangle .$$

DEFINICIÓN **2.5.** El operador lineal M_x : $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C})$ definido por $M_x(p)(x) = xp(x)$ se dice que es el operador multiplicación por x en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ para todo $p \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$.

DEFINICIÓN **2.6.** Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{P}\times\mathbb{P} \longrightarrow [0,\infty)$ un producto interno sobre $\mathbb{P}$. Diremos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno estándar sobre $\mathbb{P}$, si el operador M_x es autoadjunto, es decir, $\langle M_x(p), q\rangle = \langle xp, Q\rangle = \langle p, xq\rangle = \langle p, M_x(q)\rangle$, para todo $p, q \in \mathbb{P}$.

DEFINICIÓN **2.7.** Diremos que una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es estándar si es ortogonal con respecto a un producto interno estándar sobre $\mathbb{P}$.

Una de las más importantes características de las SPOM estándar es el hecho de que existe una relación entre tres polinomios consecutivos (ver [8]).

TEOREMA 3. Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ la sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a una medida μ. Entonces se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \gamma_n P_{n-2}(x), \qquad (1)$$

siempre que $n \geq 0$, $P_{-1}(x) = 0$, $\gamma_n \in \mathbb{R}$ y además

$$c_n = \frac{\langle xP_{n-1}(x), P_{n-1}(x)\rangle_\mu}{||P_{n-1}(x)||^2_\mu}, \quad n \geq 0,$$

$$\gamma_n = \frac{||P_n(x)||^2_\mu}{||P_{n-1}(x)||^2_\mu} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

TEOREMA 4. *(Teorema de Favard).* Sean $\{c_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ sucesiones arbitrarias de números complejos y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ un SPOM definido por la fórmula (1) con $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$. Entonces existe una única medida μ respecto a la cual $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.

Para detalles de la prueba del teorema anterior ver [3].

TEOREMA 5. (Fórmula Christoffel-Darboux). Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ un SPOM tal que satisface (1) con $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ y $\gamma_n \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{k+1}} =(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n+1})^{-1} \times \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}.$$

Para detalles ver [3].

Las familias de polinomios ortogonales sobre $\mathbb{P}$ más estudiadas en la literatura y con mayor campo de aplicación son las llamadas clásicas. Dentro de estas familias están incluidos los polinomios de Jacobi (este incluye como casos particulares los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase, los de Gegenbauer o Ultraesféricos y los polinomios de Legendre), Laguerre y Hermite. Estas familias se caracterizan por sus propiedades diferenciales entre las cuales las más importantes son (veáse [6]):

- Existen dos polinomios, ϕ y Ψ y una sucesión de números reales $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ con $\lambda_n \neq 0$, $n \geq 1$, tales que P_n es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\phi(x)y^{''}(x) + \Psi(x)y^{'}(x) + \lambda_n y(x) = 0.$$

- Pueden ser generados por una fórmula que contiene derivadas de orden n, conocida como fórmula de Rodrigues, dada por

$$P_n(x) = \frac{1}{k_n w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[w(x)\phi^n(x)],$$

donde, k_n es una constante que depende de n, $w(x)$ es una función no negativa e integrable en un intervalo de la recta real y $\phi(x)$ es un polinomio que no depende de n de grado no mayor que dos.

Una de las familias de polinomios de gran relevancia la constituyen los llamados, polinomios de Jacobi. Esta familia de polinomios fue introducida por el matemático Alemán Carl Gustav Jakob Jacobi y cumple la siguiente relación de ortogonalidad

$$\left\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \right\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)d\mu_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{m,n}. \quad (2)$$

Donde $m, n \in \mathbb{N}_0$, $d\mu_{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$, $x \in [-1,1]$, $\alpha, \beta > -1$ y Γ la función gamma.

Los polinomios de Jacobi se pueden obtener a través de la fórmula Rodrigues (ver [7])

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{n+\beta}\right\}, \quad (3)$$

con $x \in (-1,1)$ y el valor en los extremos del intervalo $[-1,1]$ está dado por:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}.$$

Dentro de los polinomios de Jacobi subyacen otras familias condicionadas por los valor de α y β. Si $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ con $\lambda > -1/2$ se obtienen los polinomios de Gegenbauer o también llamados Ultraesféricos. Las restantes familias son casos particulares de éstos, como se sigue:

- Cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ se obtienen los polinomios de Chevyshev de primer tipo.
- Si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ se obtienen los polinomios de Chevyshev de segundo tipo.
- Para $\alpha = \beta = 0$ se obtienen los polinomios de Legendre.

3. Polinomios de Gegenbauer. Algunas propiedades

En este apartado veremos algunas de las propiedades diferenciales y algebraicas que satisfacen los polinomios ortogonales de Gegenbauer, como la ecuación diferencial, fórmula de Rodrigues, derivada de primer orden y algunas propiedades algebraicas como , fórmula de recurrencia a tres términos, coeficiente principal, valores en la frontera.

3.1. *Polinomios Ortogonales de Gegenbauer*

DEFINICIÓN **3.1.** Los polinomios ortogonales de Gegenbauer, $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, son polinomios en $[-1,1]$ ortogonales respecto al peso, que llamaremos peso de Gegenbauer, los cuales cumplen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2^{2\lambda}}{n!\Gamma(n+2\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+n+1/2)\Gamma(\lambda+n+1/2)}{(2n+2\lambda)} & \text{si } m = n \end{cases}$$

donde $w(x) = w^{(\lambda)}(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, es la función peso y $\lambda > -\frac{1}{2}$

Estos polinomios tienen las siguientes propiedades

- $P_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\lambda)}(x)$.
- $P_n^{(\lambda)}(1) = \begin{pmatrix} n+\lambda-1/2 \\ n \end{pmatrix}$.
- $P_n^{(\lambda)}(-1) = (-1)^n P_n^{(\lambda)}(1) = (-1)^n \begin{pmatrix} n+\lambda-1/2 \\ n \end{pmatrix}$.

3.2. *Propiedades diferenciales y algebraicas de $P_n^{(\lambda)}(x)$*

Otra manera de definir los polinomios ortogonales de Gegenbauer es como solución de la siguiente ecuación diferencial, que llamaremos **ecuación diferencial de Gegenbauer**,

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0. \quad (4)$$

Ó equivalentemente

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}y'\} + n(n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}y = 0 \quad (5)$$

TEOREMA 6. El n-ésimo polinomio de Gegenbauer $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}$ con $\lambda > -\frac{1}{2}$ y $x \in [-1,1]$ es solución de la ecuación diferencial (5).

Demostración. Sustituyendo $y = P_n^{(\lambda)}(x)$ en (4), multiplicando en ambos miembros por $w(x) = (1-x^2)^{(\lambda-1/2)}$, integrando sobre $[-1,1]$ y finalmente aplicando la defінción de ortogonalidad se concluye que $y = P_n^{(\lambda)}(x)$ es solución de la ecuación diferencial (5). □

OBSERVACIÓN 3.1. Los polinomios de Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}(x)$ con $\lambda > -\frac{1}{2}$ y $x \in [-1,1]$ al ser solución de la ecuación hipergeométrica tienen la siguiente forma explícita:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n+2\lambda)_k(\lambda+k+\frac{1}{2})_{n-k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\right] \quad (6)$$

TEOREMA 7. El coeficiente principal de $P_n^{(\lambda)}$, $l_n^{(\lambda)}$, está determinado por

$$l_n^{(\lambda)} = \lim_{x\to\infty}\frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{x^n} = 2^{-n}\binom{2n+2\lambda-1}{n} \quad (7)$$

Demostración. Por expansión de (6) tenemos que,

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{1}{n!}[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(n+2\lambda)_k(\lambda+k+\frac{1}{2})_{n-k}(\frac{x-1}{2})^k \\ &\quad + \frac{(2n+2\lambda-1)!}{(n+2\lambda-1)!}(\frac{x-1}{2})^n] \\ &= \frac{(2n+2\lambda-1)!}{n!(n+2\lambda-1)!}(\frac{x-1}{2})^n + r(x), \end{aligned}$$

donde $r(x)$ es un polinomio de grado a lo más $n-1$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \binom{2n+2\lambda-1}{n}(\frac{x-1}{2})^n + r(x) \\ &= 2^{-n}\binom{2n+2\lambda-1}{n}(x-1)^n + r(x). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} l_n^{(\lambda)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{x^n} \\ &= 2^{-n}\binom{2n+2\lambda-1}{n} \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^n}{x^n}+\frac{r(x)}{x^n}\right] \\ &= 2^{-n}\binom{2n+2\lambda-1}{n}. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 8. (Fórmula de Rodrigues) Para $\lambda > -\frac{1}{2}$ se cumple que (ver [12])

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{n!(-2)^n}\frac{1}{(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}+n}\}. \tag{8}$$

PROPOSICIÓN 3.1. (Derivada de Orden Uno)

$$\frac{d}{dx}\{P_n^{(\lambda)}(x)\} = \frac{(n+2\lambda)}{2}P_{n-1}^{(\lambda+1/2,\lambda+1/2)}(x).$$

La prueba puede consultarse en [12].

TEOREMA 9. (Norma) Para $n = m$ se cumple que,

$$\begin{aligned} h_n^{(\lambda)} &= \int_{-1}^{1}\{P_n^{(\lambda)}(x)\}^2(1-x^2)^{(\lambda-1/2)}dx \\ &= \frac{2^{2\lambda}}{n!\Gamma(n+2\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(\lambda+n+1/2)\Gamma(\lambda+n+1/2)}{(2n+2\lambda)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Para los detalles de la prueba del resultado anterior, (ver [12]).

TEOREMA 10. (Fórmula de recurrencia a tres términos de los polinomios de Gegenbauer). Los polinomios de Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}(x)$, satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos (cfr. [12]):

$$2n(n+2\lambda-1)(2n+2\lambda-3)P_n^{(\lambda)}(x) = (2n+2\lambda-2)\{(2n+2\lambda-1)(2n+2\lambda-3)x\}P_{n-1}^{(\lambda)}(x) - 2(n+\lambda-3/2)^2(2n+2\lambda-1)P_{n-2}^{(\lambda)}(x)$$

con $n = 2,3,4,\ldots$ y $P_0^{(\lambda)}(x) = 1$, $P_1^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{2}(2\lambda+1)x$.

TEOREMA 11. (Fórmula de Christofell-Darboux)

$$K_n^{(\lambda)}(x,y) = \frac{2^{-2\lambda+1}}{2n+2\lambda+1}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1/2)\Gamma(n+\lambda+1/2)} \times \frac{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(y)-P_{n+1}^{(\lambda)}(y)P_n^{(\lambda)}(x)}{x-y}.$$

La prueba puede consultarse en [12].

3.3. *Propiedades diferenciales y algebraicas de $P_n^{(\lambda)}(x)$*

A continuación apreciaremos una de las propiedades satisfechas por estos polinomios como es la simetría en el intervalo $[-1,1]$ de la recta real. Para el logro de este objetivo fue necesaria la implementación de un programa de computo (MATLAB).

En la Figura 1, observamos el comportamiento del polinomio de Gegenbauer $P_4^{(1/2)}(x)$ para $\lambda = 0$.

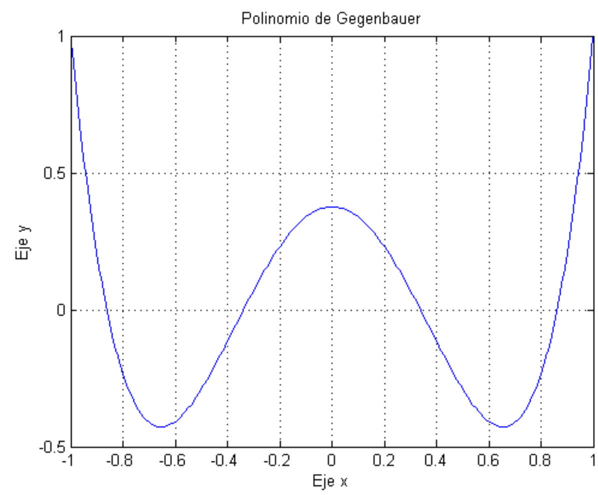

Figura 1

En la Figura 2, observamos el comportamiento del polinomio $P_5^{(1/2)}(x)$ para $\lambda = 0$.

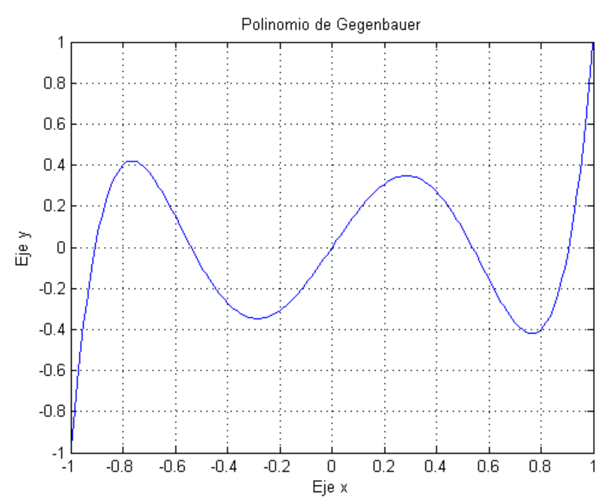

Figura 2

En esta parte veremos la representación gráfica de la ortogonalidad de dos cualesquiera polinomios de Gegenabuer respecto a la función peso.

En la Figura 3, tenemos que para $\lambda = 1/2$
$$\int_{-1}^{1} P_1^{(1/2)}(x)P_2^{(1/2)}(x)dx = 0$$

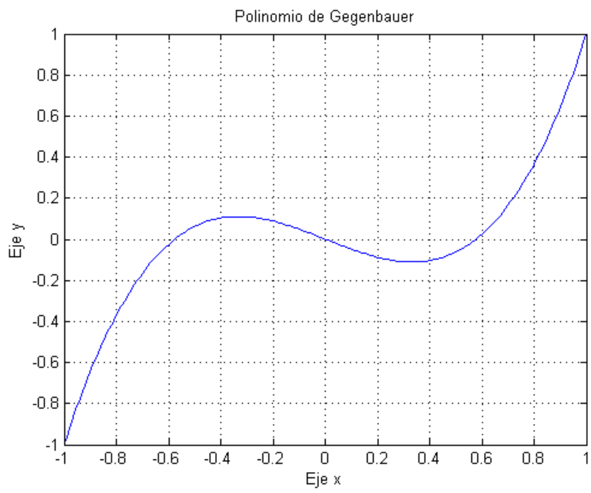

Figura 3

Referencias

[1] Alegría, P: *Teoría de la medida*. (2007).

[2] Buyarov, Martínez-Finkelshtein, A: *Information entropy of Gegenbauer polynomials* J. Phys. A, Math. Gen (2000).

[3] Chihara, TS: *An Introduction to Orthogonal polynomials*. Gordon and Breach, Science Publisher Inc., New York, EEUU (1978)

[4] De Vicente, Jl, Sánchez-Ruiz, J: *Information entropy of Gegenbauer polynomials of integer parameter.* J. Phys. A, Math. Gen (2003).

[5] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Trascendental Functions*. **Vol 3** (1953).

[6] López , G, Pijeira, H: *Polinomios Ortogonales*. XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela. (2001).

[7] Marcellán, F., Quintana, Y., Urieles, A.: *"On the Pollard decomposition method applied to some Jacobi - Sobolev expansions"*, Tübitak, Turkish Journal of Mathematics, 934-948 (2013).

[8] Marcellán, F., Quintana, Y.: *Polinomios ortogonales no estándar. Propiedades algebraicas y analíticas*. XXII Jornadas Venezolanas de Matemáticas (2009).

[9] Pollard, H: *The mean convergence of orthogonal series II.* Trans. Amer. Math. soc (1948).

[10] Rainville, ED: *Special Functions*. Macmillan Company, New York (1960); Reprinted by Chelsea publishing Company, Bronx (1971)

[11] Sánchez-Ruiz, J: *Information entropy of Gegenbauer polynomials and Gaussian quadrature.* J. Phys. A, Math. Theor. (2007).

[12] Szego, G: *Ortogonal Polynomials. Gabor Szego*. **vol XXIII** (1975).

[13] Wing, GM: *The mean convergence of orthogonal series.* Amer. J. Math. soc (1950).

Para citar este artículo: Pedro L. Hernández Llanos et al . 2014, "Una nota sobre polinomios de Gegenbauer". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.