Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. I , № 1, (2014)

Revista Del Programa De Matemáticas I (2014) 58–65

INTRODUCCIÓN A LA PRESENTACIÓN DE GRUPOS

Introduction to the presentation of groups

Gabriel Mauricio Vergara Rios[1]

[1] *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico*
Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, Colombia
E-mail: gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co

Julio Cesar Romero Pabón[2]

[2] *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico*
Univ. Rafael Belloso Chacín, Colombia
E-mail: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co

Amy Toscano Esmeral[3]

[3] *Programa de Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
amytoscanoe@hotmail.com

Received / Recibido: 30/11/2013. Accepted / Aceptado: 13/03/2014

Resumen

Uno de los resultados más importantes de la Teoría combinatoria de grupos garantiza que dado un conjunto no vacio X, existe un grupo que es libre en X, a saber el grupo $F := F(X)$ de palabras reducidas en X. Así las cosas, nuestro proposito fundamental en este trabajo es mostrar como a este grupo se le puede dotar de un buen orden y posteriormente usar este hecho para probar que todo subgrupo H de F tiene una transversal de Schreier. Finalmente trataremos algunos apartes respecto a la libre presentación de grupos y al test de sustitución, el cual nos permite encontar presentaciones isomorfas a una presentación dada de un grupo.

Palabras claves: Grupo libre, palabra reducida, transversal de Schreier y presentación de grupos.

Abstract

One of the most important combinatorial group theory guarantees that given a nonempty set X, there is a group who is free on X, namely the group $F := F(X)$ of reduced words in X. So, our fundamental purpose in this paper is to show how this group can provide a good order and subsequently use this fact to prove that every subgroup H of F has a Schreier transversal. Finally we discuss some asides about the free submission of test groups and substitution, which allows us to locate an isomorphic presentations given to the presentation of a group.

Keywords: Free group, reduced word, Schreier transversal and group presentation.

1. Preliminares

En esta sección definiremos los tópicos necesarios para poder abordar con mayor precisión los temas que serán tratados a traves de este trabajo.

Definición 1.1. *Un grupo F se dice* ***libre en un subconjunto*** *$X \subseteq F$ si para todo grupo G y toda función $\theta : X \longrightarrow G$, existe un único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ que extiende a θ, es decir $\varphi\,|_X = \theta$. Decir que φ extiende θ equivale a que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

*donde $i : X \to F$ es la función inclusión. En tal caso decimos que X **genera libremente a** F y que X es un **conjunto generador** para F o una **base** para F. Si X es finito decimos que F es **finitamente generado**.*

La notación $F = \langle X| \ \rangle$ indica que F es libre con base X. En particular, si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, escribimos $F = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n| \ \rangle$.

Lema 1.1. *Si F es libre en X, entonces $F = \langle X \rangle$.*

Demostración. Ver [1] □

Definición 1.2. *Sea X un conjunto. Una **palabra** en X es una sucesión $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in (X \cup \{1\})^{\pm}$ y $1^{\pm} = 1$. Si $x_i = 1$ para todo i, diremos que w es la **palabra vacía** y escribiremos $w = 1$.*

A lo largo de este trabajo, en lugar de $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, escribiremos $w = x_1x_2 \ldots x_n$ o $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, donde $x_i \in X \cup \{1\}$ y $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Definición 1.3. *Sea X un conjunto arbitrario y $w = x_1x_2 \ldots x_n$ una palabra en X.*

- *La **inversa** de w, denotada w^{-1} se define como $w^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \ldots x_1^{-1}$.*
- *A una palabra de la forma $w' = x_ix_{i+1} \ldots x_j$, donde $1 \leq i \leq j \leq n$, la llamaremos una **subpalabra** de $w = x_1x_2 \ldots x_n$.*
- *Si $w' = x_1x_2 \ldots x_j$, diremos que w' es el segmento inicial de w que finaliza en x_j.*
- *Diremos que $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ con $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, es una palabra **reducida** si no contiene subpalabras de la forma $x^{\varepsilon_i} x^{-\varepsilon_i}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*
- *Si $v = y_1y_2 \ldots y_m$ es otra **palabra reducida** en X, definimos el producto de w con v como la palabra $wv = x_1x_2 \ldots x_ny_1y_2 \ldots y_m$.*
- *Una **transformación elemental** sobre w consiste en insertar o eliminar palabras de la forma $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ con $\varepsilon = \pm 1$. Si al aplicar una transformación elemental a w obtenemos una palabra w', decimos que w' se **deriva** de w y escribiremos $w \to w'$.*
- *Si denotamos por W al conjunto de todas las palabras reducidas en X, diremos que $v, w \in W$ son **equivalentes** si existen palabras $w_1, w_2, \ldots, w_n$ en W tales que $w \to w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n = v$. En este caso escribiremos $w \sim v$.*
- *Dado un conjunto arbitrario X, denotamos por $F(X)$ al conjunto de palabras reducidas en X; es decir, $F(X) = \{\overline{w} | w \in W\}$, donde W está definido como arriba.*

Teorema 1.1. *Dado un conjunto X, existe un grupo F que es libre en X.*

Demostración. Ver [1]. □

Definición 1.4. *Sea F un grupo libre en X, $R \subset F$ y N la clausura normal de R en F (es decir el subgrupo normal más pequeño de F que contiene a R). Si G es un grupo tal que $G \cong F/N$, diremos que G tiene la presentación $\langle X|R \ \rangle$ y escribiremos $G = \langle X|R \ \rangle$. A los elementos de X los llamaremos generadores de G y los elementos de R, relaciones. Además, si tanto X como R son finitos, diremos que G es finitamente presentado.*

Observación. Abusando de la notación, supondremos que $X \subset F$ es un conjunto generador de G y los elementos de R son relaciones que equivalen a la identidad en G; i.e $r = e$ para todo $r \in R$.

Definición 1.5. *Sea "$<$ "un buen orden en $X^{\pm}$, y sean $a = x_1x_2 \ldots x_l$, $b = y_1y_2 \ldots y_m$ con $a \neq b$, palabras reducidas en F. Escribiremos $a < b$ si se cumple exactamente una de las siguientes condiciones:*

i) $l < m$

ii) $l = m$ y $x_r < y_r$ en $X^{\pm}$, donde $r = min\{i : x_i \neq y_i\}$

Proposición 1.1. *Con la relación "$<$ "definida arriba, F es un conjunto bien ordenado*

Demostración.

i) Para todo $a = x_1x_2 \ldots x_l$, palabra reducida en F, claramente no se cumple que $a < a$ pues $a = a$.

ii) Sean $a = x_1x_2 \ldots x_l$, $b = y_1y_2 \ldots y_m$ y $c = z_1z_2 \ldots z_n$ palabras reducidas en F tales que $a < b$, $b < c$, $l < m$ y $m < n$. Entonces $l \leq n$ y por tanto $a < c$.

iii) Paro todo $a, b \in F$, $a = x_1x_2 \ldots x_l$, $b = y_1y_2 \ldots y_m$, de la definición de " $<$ ", es claro que $a < b$ o $a = b$ o $b < a$.

iv) Sea F^* un subconjunto no vacio de F. Como F es grupo (bajo la operación yuxtaposición de palabras), F^* también es grupo (con la operación de F restringida a F^*), luego e (la palabra vacía) está en F^*, aún mas, $e < a = x_1x_2 \ldots x_l$ para todo $a \in F^*$ con $a \neq e$. Por tanto e es el elemento mínimo de F^*.

□

2. La transversal de Schreier

Un resultado clásico de Dedekind afirma que si G es un grupo libre, así también lo es cualquier subgrupo de G. Probaremos el análogo para el caso no conmutativo, conocido como el Teorema de **Nielsen-Schreier**; sin embargo en el caso no abeliano, el rango del subgrupo puede exceder al rango del grupo. Los dos métodos de prueba, el dado por Nielsen (1921) y el de Schreier (1927) son muy diferentes y proveen los fundamentos para diferentes aspectos de los desarrollos subsiguientes de esta teoría. Por ejemplo, el método de Nielsen conduce de manera natural a la teoría de automorfismos de grupos libres, mientras que el método de Schreier es la llave para encontrar presentaciones de subgrupos.

Sea H un subgrupo fijo de F y sea $w \in F$. Sabemos que una clase lateral (derecha) de H es un subconjunto de F de la forma $Hw := \{hw \mid h \in H\}$; además dos clases laterales cualesquiera o son iguales o son disjuntas esto es, para $u, v \in F$ se tiene o que $Hu = Hv$ o $Hu \cap Hv = \emptyset$. Por tanto las clases laterales de H forman una partición de F, es decir

$$F = \bigcup_{w \in F} Hw$$

Definición 2.1. *Una transversal (derecha) U para H en F es el conjunto formado eligiendo un elemento de cada clase lateral de H, esto es,*

$$U := \{a_j \mid a_j \in Hw_j\}.$$

Nótese que para cada $w \in F$, $Hw \cap U$ consiste de un solo elemento, el cual denotaremos por $\overline{w}$.

Definición 2.2. *Un subconjunto no vacío S de F tiene* ***la propiedad de Schreier*** *si contiene todos los segmentos iniciales de cada uno de sus elementos, es decir*

$$\forall\ w = x_1 x_2 \dots x_n \in S \text{ se tiene que } x_1 x_2 \dots x_{n-1} \in S.$$

Definición 2.3. ***Una transversal de Schreier*** *para H en F es una transversal (derecha) para H con la propiedad de Schreier.*

Observacion. Cada conjunto S de Schreier y por lo tanto cada transversal de Schreier contiene la palabra vacía $w = 1$. En efecto, como S es no vacio entonces existe $w_j = x_1 x_2 \dots x_j \in S$ tal que $l(w_j) \geq 1$. Tenemos los siguientes casos:

i) Si $l(w_j) = 1$, entonces $w = x_1$ y como S tiene la propiedad de Schreier, el segmento inicial de w está en S, es decir $x_{1-1} = x_0 = 1 \in S$.

ii) Si $l(w_j) > 1$, entonces $w_j = x_1 x_2 \dots x_j$. Como S tiene la propiedad de Schreier entonces $x_1 x_2 \dots x_{j-1} \in S$ y nuevamente por la propiedad de Schreier, $x_1 x_2 \dots x_{j-2} \in S$. Continuando con este proceso de manera reiterada , llegamos a que $x_1 \in S$ y por tanto $x_0 = 1 \in S$.

Lema 2.1. *Sea $w = x_1 x_2 \dots x_n$ una palabra reducida en $X^{\pm}$ con $n > 1$ y sea $v \in F$. Entonces*

$$v < x_1 x_2 \dots x_{n-1} \Rightarrow v x_n < w$$

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

caso i: $l(v) < l(x_1 x_2 \dots x_{n-1}) = n - 1$. Esto se puede dar pues $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ es una palabra reducida en $X^{\pm}$. Tenemos que $l(v) < n - 1$, luego

$$l(v x_n) \leq n - 1 < n = l(w).$$

Así $l(v x_n) < l(w)$ y por tanto $v x_n < w$.

caso ii: $l(v) = l(x_1 x_2 \dots x_{n-1}) = n - 1$ y $v = x_1 x_2 \dots x_{r-1} y_r y_{r+1} \dots y_{n-1}$ con $1 \leq r \leq n - 1$ y $x_r < y_r$. Luego $v x_n = x_1 x_2 \dots x_{r-1} y_r y_{r+1} \dots y_{n-1} x_n$.

Si $y_{n-1} = x_n^{-1}$, $l(v x_n) = n - 2 < n = l(w)$, por tanto $v x_n < w$.

Si $y_{n-1} \neq x_n^{-1}$, $l(v x_n) = n = l(w)$ y $x_r < y_r$, $1 \leq r \leq n - 1$ por tanto $v x_n < w$.

□

Lema 2.2. *Cada subgrupo H de F tiene una transversal de Schreier, por ejemplo, la obtenida tomando el menor elemento de cada clase lateral derecha de H, con el orden definido en F.*

Demostración. Sea $H < F$. Dado $w \in F$, Hw es un subconjunto no vacío de F y como F tiene la propiedad del buen orden, para cada $w \in F$, Hw contiene un elemento mínimo. Sea $U = \{\overline{w_i} \mid \overline{w_i} = min(Hw_i)\}$, es decir U es el subconjunto de F consistente del menor elemento de cada clase lateral derecha Hw de H en F. Debemos probar que $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \in U$ para todo $\overline{w} = x_1 x_2 \dots x_n \in U$. En efecto, si $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \notin U$ consideremos la clase lateral derecha $H x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ y sea $v \in U$ tal que v es el menor elemento de $H x_1 x_2 \dots x_{n-1}$. Como $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \in H x_1 x_2 \dots x_{n-1}$, entonces $v < x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ y como $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ es una palabra reducida en $X^{\pm}$ por el Lema 2.1,

$$v x_n < x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = \overline{w};$$

además, $Hv = H x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ (esto es pues en general: Si G es un grupo, $a, b \in G$ y $a \in Hb \Rightarrow Ha = Hb$). Luego $H v x_n = H x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$, es decir $H v x_n = H\overline{w}$, de donde se sigue que $v x_n \in H\overline{w}$ y $v x_n < \overline{w}$, por lo que $\overline{w}$ no es el elemento mínimo de $H\overline{w}$. Por tanto $\overline{w} \notin U$ $(\rightarrow\leftarrow)$. En consecuencia, $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \in U$ siempre que $\overline{w} = x_1 x_2 \dots x_n \in U$. Por tanto U es una transversal de Schreier. □

Ejemplo. Sea $X = \{x, y\}$ y sea F ordenado con el orden definido anteriormente. Además, sea $S = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\} \subset F$ y sea

$$H = \overline{S} = \bigcap_{K \lhd F, K \supset S} K$$

la clausura normal de S en F . Mostraremos que $[F : H] = 6$ y encontraremos una transversal de Schreier para H en F.

Solución. Consideremos el grupo cíclico de orden 6, $Z_6 = \{e, a^2, \ldots, a^5\}$ donde $a^6 = e$. En realidad, $Z_6 = \langle a \mid a \in \mathbb{Z}, |a| = 6\rangle$. Como F es libre en $X = \{x, y\}$, para la función

$$\begin{aligned} \theta : \{x, y\} &\to Z_6 \\ x &\to a^2 \\ y &\to a^3, \end{aligned}$$

existe un único homorfimso $\theta' : F \to Z_6$ que extiende a θ, es decir $\theta' \mid_X = \theta$. Como $x, y \in X$ y θ' es homomorfismo, entonces:

$$\theta'(yx^{-1}) = \theta'(y)\theta'(x)^{-1} = \theta(y)\theta(x)^{-1} = a^3a^{-2} = a$$

y

$$\theta'(x^3) = (\theta'(x))^3 = (\theta(x))^3 = a^6 = e$$

$$\theta'(y^2) = (\theta'(y))^2 = (\theta(y))^2 = a^6 = e$$

$$\theta'(x^{-1}y^{-1}yx) = e$$

Nótese que:

i) θ' es sobreyectiva, pues para todo $y \in Z_6 = \langle a \rangle$, $y = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n \leq 5$. Además, como $a = \theta'(yx^{-1})$ entonces

$$y = a^n = (\theta'(yx^{-1}))^n = \theta'((yx^{-1})^n).$$

ii) $S \subseteq ker\theta'$, pues para todo $s \in S$,

$$\theta'(s) = e, (\theta'(x^2) = e, \theta'(y^2) = e, \theta'(x^{-1}y^{-1}xy) = e$$

iii) Sabemos que $ker\theta' \lhd F$ y $S \subseteq ker\theta'$, por lo que $H = \overline{S} \leq ker\theta'$, esto pues $\overline{S}$ es el subgrupo normal más pequeño de F que contiene a S.

iv) Tenemos la cadena de subgrupos

$$H \leq ker\theta' \trianglelefteq F,$$

por lo que

$$\begin{aligned} [F : H] = [F : ker\theta'][ker\theta' : H] \\ \geqslant [F : ker\theta'] &= \mid F/ker\theta' \mid \\ &= \mid Im\theta' \mid \\ &= \mid Z_6 \mid \\ &= 6. \end{aligned}$$

Por el primer teorema de isomorfismos, $F/ker\theta' \cong Im\theta' = Z_6$, por tanto $[F : H] \geq 6$. De otro lado, dado que $F = \langle\{x, y\}\rangle$ entonces x y y generan a $F/H = \{gH : g \in F\}$, es decir $F/H = \langle\{Hx, Hy\}\rangle$. Además, $x'y' = HxHy = Hxy$; $y'x' = HyHx = Hyx$, pero

$$x^{-1}y^{-1}xy = (yx)^{-1}xy \in S \subseteq \overline{S} = H$$

es decir $(yx)^{-1}xy \in H$, lo que equivale a que $Hxy = Hyx$. Por tanto $x'y' = Hxy = Hyx = y'x'$.

De otra parte,

$$(x')^3 = (Hx)^3 = HxHxHx = Hx^3 =$$

$$He = H = e_{F/H}$$

y como $Hx \neq He, Hx^2 \neq He$, ($x \neq e, x^2 \neq e$ y las clases son disjuntas), $x' = Hx$ tiene orden 3.

Nota: $x^3 \in H \Rightarrow x^3e \in H \Rightarrow Hx^3 = He$.

Análogamente, como $y^2 \in H$ entonces $y^2e \in H$ y $Hy^2 = He = H = e_{F/H}$. Luego $(y')^2 = (Hy)^2 = HyHy = Hy^2 = e_{F/H}$ y como $Hy \neq He$, necesariamente $y' = Hy$ tiene orden 2.

De otro lado, como $F/H = \langle\{x', y'\}\rangle$ y $O(x') = 3, O(y') = 2$, entonces cualquier elemento de F/H es igual a una de las seis palabras $e, x', (x')^2, y', x'y', (x')^2y'$ es decir cualquier elemento de F/H es igual a una de las seis clases $H, Hx, Hx^2, Hy, Hxy, Hx^2y$, pero como $\mid F/H \mid = [F : H] \geq 6$, esas seis clases deben ser distintas. Por tanto $\mid F/H \mid \geq= [F : H] = 6$, y una transversal para H en F es:

$$T = \{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}.$$

Nótese que T tiene la propiedad de Schreier, por lo que T es una transversal (derecha) de Schreier, pero T no coincide con el conjunto U construido en el lema 2.2. Esto se evidencia si usamos las siguientes reglas:

$$Hx^2 = Hx^{-1}, Hy^{-1} = Hy, Hxy = Hyx$$

vemos que los mínimos de las seis clases laterales para H son:

$$U = \{e, x, x^{-1}, y, xy, yx^{-1}\}.$$

En efecto:

$$H = \{h, e : h \in H, h \neq e\};\ \min(H) = e.$$

$$Hx = \{hx : h \in H\} = \{x\} \cup \{hx : h \in H, h \neq e\};\ \min(Hx) = x.$$

$$\begin{aligned} Hx^2 = Hx^{-1} \Rightarrow Hx^2 \\ &= \{hx^{-1} : h \in H\} \\ &= \{x^{-1}\} \cup \{hx^{-1} : h \in H - \{e\}\}, \end{aligned}$$

por lo que $min(Hx^2) = x^{-1}$.

$$\begin{aligned} Hy &= \{hy : h \in H\} \\ &= \{y\} \cup \{hy : h \in H - \{e\}\}, \\ &\min(Hy) = y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hxy &= \{h(xy) : h \in H\} \\ &= \{xy\} \cup \{h(xy) : h \in H - \{e\}\}, \end{aligned}$$

por lo que $min(Hxy) = xy$.

Finalmente,

$$Hx^2y = Hyx^2 = HyHx^2 = HyHx^{-1} = Hyx^{-1}$$

por lo que $min(Hx^2y) = min(Hyx^{-1}) = yx^{-1}$.

2.1. Los gemeradores de Schreier

Dada una transversal de Schreier H de F , podemos encontrar unos generadores adecuados para H, haciendo uso de la función $\overline{f} : F \to U$ definida para todo $w \in F$ por $\overline{f}(w) = \overline{w}$, donde $\overline{w} = Hw \cap U$. $\overline{f}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $Hw = H\overline{w}, \forall w \in F$.
2. $\overline{\overline{w}} = \overline{w}$.
3. $\overline{w} = w$ sí y solo si $w \in U$.

En efecto,

1. Como $\overline{w} = Hw \cap U$ entonces $\overline{w} \in Hw$ y esto ocurre si y solo si $\overline{w} = hw, h \in H$ por lo que $\overline{w}w^{-1} \in H$, lo que equivale a que $H\overline{w} = Hw$.
2. Tenemos que $\overline{\overline{w}} = H\overline{w} \cap U$. Si $x \in \overline{\overline{w}}$ entonces $x \in H\overline{w} \cap U = Hw \cap U = \overline{w}$, luego $x \in \overline{w}$. Por tanto $\overline{\overline{w}} \subset \overline{w}$. De otra parte, $\overline{w} = Hw \cap U = H\overline{w} \cap U = \overline{\overline{w}}$. Por tanto $\overline{\overline{w}} = \overline{w}$.
3. Si $\overline{w} = w$ entonces $Hw \cap U = \{w\}$. Luego $w \in U$ (pues $w \in Hw$). Si $w \in U$, como $w \in Hw$ entonces $Hw \cap U = \{w\}$ es decir $\overline{w} = w$.

Lema 2.3. *Los elementos del conjunto*

$$A := \{ux(\overline{ux})^{-1} \mid u \in U;\ x \in X^{\pm}\}$$

generan a H.

Demostración. Debemos probar que $H =< A >$. En efecto, dado que $Hux = H\overline{ux}$ entonces $ux(\overline{ux})^{-1} \in H$ y por tanto $A \subseteq H$. Ahora sea $h \in H$, debemos probar que h se expresa como producto finito de elementos de A. Sea $h = x_1x_2 \ldots x_n,\ x_i \in X^{\pm},\ 1 \le i \le n$ una palabra reducida en $X^{\pm}$, por el Lema 2.2, H tiene una transversal de Schreier U. Definamos una sucesión de elementos de U inductivamente como sigue:

$$u_1 = e,\ u_{i+1} = \overline{u_ix_i},\ 1 \le i \le n,\ (e \in U)$$

Sea $a_i = u_ix_iu_{i+1}^{-1} = u_ix_i(\overline{u_ix_i})^{-1} \in A,\ 1 \le i \le n$, así que:

$$\begin{aligned} a_1a_2 \cdots a_n &= u_1x_1u_2^{-1}u_2x_2u_3^{-1}u_3x_3u_4^{-1} \cdots u_nx_nu_{n+1}^{-1} \\ &= u_1x_1x_2 \ldots x_nu_{n+1}^{-1} \\ &= ehu_{n+1}^{-1} \end{aligned}$$

Dado que $a_1a_2 \cdots a_n \in A \subseteq H$ entonces $a_1a_2 \cdots a_n \in H$, luego $u_{n+1} \in H$, pero $u_{n+1} \in U$, por lo que $u_{n+1} \in U \cap H = \{e\}$ y así $u_{n+1} = e$. Por tanto $h = a_1a_2 \cdots a_n$, es decir h es producto de elementos de A. En consecuencia $H =< A >$. □

Teorema 2.1. *(Nielsen-Schreier) . Sea F un grupo libre y H un subgrupo de F. Entonces Hes libre. Aún más, si $|F : H| = g$ y $r(F) = r$ son ambos finitos, entonces*

$$r(H) = (r - 1)g + 1.$$

Demostración. Ver ([1], pag. 22). □

El siguiente Teorema es considerado como uno de los resultados más importantes en teoría combinatoria de grupos, garantiza que todo grupo tiene una presentación. Este resultado fué un pilar fundamental en la solución del problema de la palbra de Gauss.

Proposición 2.1. *Todo grupo tiene una presentación y todo grupo finito es finitamente presentado.*

Demostración. Sea G un grupo, $X \subset G$ un conjunto generador para G y F el grupo libre en X. Como F es libre en X, para la función $\theta : X \to G$ existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi|_X = \theta$. Ahora, puesto que X genera a G entonces φ es sobreyectiva, es decir $\mathrm{Im}\varphi = G$. Por el primer Teorema de isomorfismos, $F/Ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$, es decir $F/N \cong G$ donde $N = Ker\varphi$. Por tanto $\langle X|N \rangle$ es una presentación para G, es decir $G = \langle X|N \rangle$.

Supongamos ahora que G es finito, luego F es libre de rango finito, i.e $r(F) = |X| < \infty$. Además, $[F : N] = |F/N| = |G| < \infty$. Por el Teorema de Nielsen-Schreier $r(N) = (|X| - 1)|G| + 1$, es decir $N = \mathrm{Ker}\varphi$ es libre de rango finito; luego existe $R \subset N$ conjunto finito de generadores para N, es decir $N = \langle R \rangle$ y como $\overline{R}$ es el subgrupo normal más pequeño de N que contiene a R entonces $N = \overline{R}$. Tenemos que $F/N \cong G$ con $N = \overline{R}$, por lo que $G = \langle X|R \rangle$ con X y R finitos. Por tanto G es finitamente presentado. □

Ejemplo 2.1. *$\langle X|\{1\}\ \rangle$ es una presentación del grupo libre en X de rango $|X|$. En efecto, sea F un grupo libre en X, $R \subset F$ y $N = \overline{R}$, la clausura normal de R en F y $\varphi : F \to F$ definida para todo $x \in F$ por $\varphi(x) = x$. Claramente φ es un homomorfismo,* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in F \mid \varphi(x) = 1\} = \{x \in F \mid x = 1\} = \{1\}$ *y* $\mathrm{Im}(\varphi) = F$. *Por el primer teorema de isomorfismos, $F/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$, es decir $F \cong F/\{1\}$. Por tanto $\langle X|\{1\}\ \rangle$ es una presentación para el grupo F libre en X.*

Ejemplo 2.2. *$\langle x, y|x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\ \rangle$ es una presentación para $\mathbf{Z}_6$ el grupo cíclico de orden 6. En efecto, recordemos que $\mathbf{Z}_6 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$, por lo que $|\mathbf{Z}_6| = 6$ y $a^6 = 1$. Sean $X = \{x, y\}$, $N = \overline{R}$ donde $R = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\}$. Probemos que $\mathbf{Z}_6 \cong F/N$ donde F es el grupo libre en X. Sea $\theta : X \to \mathbf{Z}_6$ definida por $\theta(x) = a^2$ y $\theta(y) = a^3$. Como F es libre en X, existe un único homomorfismo $\varphi : F \to \mathbf{Z}_6$ tal que $\varphi|_X = \theta$.*

Afirmación 1: φ es sobre. Sea $a \in \mathbf{Z}_6$, como F es libre en $X = \{x, y\}$ entonces $F = \langle X \rangle$; además $z = yx^{-1} \in F$ y $\varphi(z) = \varphi(yx^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = \varphi(y)(\varphi(x))^{-1} = a^3a^{-2} = a$. Hemos probado que dado $a \in Z_6$, existe $z \in F$ tal que $a = \varphi(z)$, es decir φ es sobre. Por tanto $\mathrm{Im}\varphi = Z_6$ *y por el primer teorema de isomorfismos* $F/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathbf{Z}_6$.

Afirmación 2: $N = \overline{R} = \mathrm{Ker}\varphi$. Tenemos que $R = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\}$; además, nótese que:

$$\varphi(x^3) = (\varphi(x))^3 = (\theta(x))^3 = (a^2)^3 = a^6 = 1,$$

$$\varphi(y^2) = (\varphi(y))^2 = (\theta(y))^2 = (a^3)^2 = a^6 = 1,$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(x^{-1}y^{-1}xy) &= \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1})\varphi(x)\varphi(y)\\ &= (\theta(x))^{-1}(\theta(y))^{-1}\theta(x)\theta(y)\\ &= (a^2)^{-1}(a^3)^{-1}a^2a^3\\ &= 1\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que $R \subset \mathrm{Ker}\varphi$. Además, como $\mathrm{Ker}\varphi \lhd F$ y $\overline{R}$ es el subgrupo normal más pequeño de F que contiene R, entonces $N = \overline{R} \subset \mathrm{Ker}\varphi := H$. De otra parte, como $N < H$ y $H \lhd F$, entonces $N < H \lhd F$ y por una consecuencia de los teoremas de isomorfismo, tenemos que

$[F : N] = [F : H][H : N] \geq [F : H] = |F/H| = |\mathbf{Z}_6| = 6$; la penúltima igualdad se debe a que $F/H \cong \mathbf{Z}_6$.

De otra parte, como $X = \{x, y\}$ genera a F, necesariamente $\overline{x} = Nx$ y $\overline{y} = Ny$ generan a F/N. Sea $S = \{1, \overline{x}, \overline{x}^2, \overline{y}, \overline{xy}, \overline{x}^2\overline{y}\}$. Veamos que $F/N = S$, en efecto, como $\overline{x}, \overline{y}$ generan a F/N, es claro que $S \subset F/N$. Ahora, para probar que $F/N \subset S$, basta ver que $\overline{x}S \subset S$ y $\overline{y}S \subset S$. En realidad,

$$\begin{aligned}\overline{x}S &= \{\overline{x}, \overline{xx}, \overline{xx}^2, \overline{xy}, \overline{xxy}, \overline{xx}^2\overline{y}\}\\ &= \{\ \overline{x}, \overline{x}^2, \overline{x}^3, \overline{xy}, \overline{x}^2\overline{y}, \overline{x}^3\overline{y}\}\\ &= \{\ \overline{x},\ \overline{x}^2,\ 1, \overline{xy}, \overline{x}^2\overline{y}, \overline{y}\} = S\end{aligned}$$

Como $x^3 = 1$ en F y $R \subset N$, entonces $\overline{x}^3 = 1$ en F/N.

$$\begin{aligned}\overline{y}S = \{\overline{y}, \overline{yx}, \overline{yx}^2, \overline{yy}, \overline{yxy}, \overline{yx}^2\overline{y}\} =\\ \{\overline{y}, \overline{xy}, \overline{x}^2\overline{y}, 1, \overline{x}, \overline{x}^2\} = S.\end{aligned}$$

Como $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ y $y^2 = 1$ en F y $R \subset N$, entonces $\overline{xy} = \overline{yx}$ y $\overline{y}^2 = 1$ en F/N. Así, $F/N \subset S$ y como $S \subset F/N$ entonces $F/N = S$. En consecuencia $[F : N] = |F/N| = |S| = 6$ y como $[F : N] = [H : F][H : N]$ con $[H : F] = 6$, entonces $[H : N] = 1$. Así, como
$[H : N] = 1$ y $N \subset H$, necesariamente $N = H$, es decir $N = \mathrm{Ker}\varphi$. Por tanto $F/N \cong \mathbf{Z}_6$ y en consecuencia $\mathbf{Z}_6 = \langle X|R\ \rangle$.

3. Homomorfismos Inducidos y el Test de Sustitución

El Test de sustitución juega un papel importante al momento de determinar cuando dado un grupo G con una presentación $G = \langle X \mid R\ \rangle$, un grupo H y una función $\theta : X \to H$, esta extiende a un homomorfismo $\alpha : G \to H$, es decir para determinar cuando θ induce un homomorfismo $\alpha : G \to H$. Veremos que tal extensión ocurre si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $r \in R$, el hecho de sustituir x por $\theta(x)$ en r da la identidad en H.

Lema 3.1. *Sean F, G, H grupos y sean $\nu : F \to G$, $\alpha : F \to H$ homomorfismos tales que:*
i) $\mathrm{Im}\nu = G$ *y*
ii) $\mathrm{Ker}\nu \subset \mathrm{Ker}\alpha$.
Entonces existe un homomorfismo $\alpha' : G \to H$ tal que $\alpha' \circ \nu = \alpha$

Nota: Lo anterior equivale a que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\alpha"'] & F \arrow[d, "\alpha'"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $\nu : F \to G$ es sobre, dado $g \in G$ existe $f \in F$ tal que $g = \nu(f)$. Sea $\alpha' : G \to H$ definida para todo $g \in G$ por $\alpha'(g) = \alpha(f)$. Respecto a α' podemoos afirmar que:

i) α' está bién definida. En efecto, sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1 = g_2$. Como $g_1, g_2 \in G$ y $\nu : F \to G$ es sobre, existen $f_1, f_2 \in F$ tales que $g_1 = \nu(f_1)$ y $g_2 = \nu(f_2)$; pero $g_1 = g_2$, por lo que $\nu(f_1) = \nu(f_2)$.

Luego,

$$\begin{aligned}\nu(f_1)=\nu(f_2) &\Rightarrow \nu(f_1)\nu(f_2)^{-1}=1\\ &\Rightarrow \nu(f_1)\nu(f_2^{-1})=1\\ &\Rightarrow \nu(f_1f_2^{-1})=1\\ &\Rightarrow f_1f_2^{-1}\in \mathrm{Ker}\nu\subset \mathrm{Ker}\alpha\\ &\Rightarrow \alpha(f_1f_2^{-1})=1\\ &\Rightarrow \alpha(f_1)=\alpha(f_2)\\ &\Rightarrow \alpha'(g_1)=\alpha'(g_2).\end{aligned}$$

ii) α' es un homomorfismo. En efecto, sean $g_1, g_2 \in G$. Como $\nu : F \to G$ es sobre, existen $f_1, f_2 \in F$ tales que $g_1 = \nu(f_1)$ y $g_2 = \nu(f_2)$. Luego, $g_1g_2 = \nu(f_1)\nu(f_2) = \nu(f_1f_2)$ y $\alpha'(g_1g_2) = \alpha(f_1f_2) = \alpha(f_1)\alpha(f_2) = \alpha'(g_1)\alpha'(g_2)$.

iii) $\alpha' \circ \nu = \alpha$. En efecto, para toda $f \in F$, $(\alpha'\circ\nu)(f) = \alpha'(\nu(f)) = \alpha(f)$. Por tanto $\alpha'\circ\nu = \alpha$. □

Proposición 3.1. *(Test de Sustitución).*
Sean $G = \langle X \mid R\rangle$, H un grupo y $\theta : X \to H$ una función, entonces θ extiende a un homomorfismo $\alpha : G \to H$ si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $r \in R$, el hecho de sustituir x por $\theta(x)$ en r da la identidad en H.

Demostración. Sean $\eta : R \to F$, $\varphi : X \to F$ las funciones inclusión de R en F y de X en F, respectivamente y sea $\pi : F \to G$ el homomorfismo canónico al cociente, viendo a G como F/N donde $N = \overline{R}$.

De otra parte, como F es libre en X, para la función $\theta : X \to H$ existe un único homomorfismo $\upsilon : F \to H$ tal que $\upsilon\,|_X = \theta$.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $\alpha : G \to H$ homomorfismo que extiende a θ. Luego, para $f \in F$:

$$\begin{aligned}\alpha(\pi(f)) &= \alpha(\pi(x_1x_2\dots x_n))\\ &= \alpha(x_1x_2\dots x_n)\\ &= \alpha(x_1)\alpha(x_2)\dots\alpha(x_n)\\ &= \theta(x_1)\theta(x_2)\dots\theta(x_n)\\ &= \upsilon(x_1)\upsilon(x_2)\dots\upsilon(x_n)\\ &= \upsilon(x_1x_2\dots x_n)\\ &= \upsilon(f),\end{aligned}$$

donde $f = x_1x_2\dots x_n$. Así, para probar el resultado, basta ver que $R \subset \mathrm{Ker}\upsilon$. En efecto, puesto que $G \cong F/N$, entonces $R \subset \overline{R} = N = \mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Ker}(\alpha\circ\pi) = \mathrm{Ker}\upsilon$.

Note que si $x \in \mathrm{Ker}\pi$, entonces $\pi(x) = 1_G$. Luego $(\alpha\circ\pi)(x) = \alpha(\pi(x)) = \alpha(1_G) = 1_H$, es decir $x \in \mathrm{Ker}(\alpha\circ\pi) = \mathrm{Ker}\upsilon$. Por tanto, $\mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Ker}(\alpha\circ\pi)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $r \in R$ el hecho de sustituir x por $\theta(x)$ en r da la identidad en H, es decir supongamos que $R \subset \mathrm{Ker}\upsilon$. En efecto, como $\overline{R}$ es el subgrupo normal más pequeño de F que contiene a R, entonces $\overline{R} \subset \mathrm{Ker}\upsilon$ y como $\overline{R} = \mathrm{Ker}\pi$, entonces $\mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Ker}\upsilon$. Además, como $\upsilon : F \to H$ y $\pi : F \to G$ son homomorfismos con $\mathrm{Im}\pi = G$, por el Lema 3.1 se sigue que existe $\alpha : G \to H$ homomorfismo tal que $\alpha\circ\pi = \upsilon$. Veamos ahora que $\alpha\,|_X = \theta$. En efecto, para todo $x \in X$, $\alpha(x) = \alpha(\pi(x)) = (\alpha\circ\pi)(x) = \upsilon(x) = \theta(x)$ (La ultima igualdad se tiene pues $\upsilon\,|_X = \theta$). Por tanto $\alpha\,|_X = \theta$, es decir α es una extensión de θ. □

El siguiente resultado nos permite calcular una presentación del producto directo $G \times H$ de dos grupos, conocidas las presentaciones de cada uno de ellos.

Proposición 3.2. *Sean G y H grupos con presentaciones $\langle X \mid R\rangle$ y $\langle Y \mid S\rangle$ respectivamente, entonces su producto directo $G\times H$ tiene una presentación dada por $\langle X, Y \mid R, S, [X, Y]\rangle$ donde $[X, Y] = \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$.*

Demostración.
Sean $T = R \cup S \cup [X, Y]$ y $D = \langle X \cup Y \mid T\rangle$. Por el Test de Sustitución, las inclusiones $\iota_1 : X \to D$ y $\iota_2 : Y \to D$ inducen homomorfismos $\phi : G \to D$ y $\varphi : H \to D$. Sea $\alpha : G \times H \to D$ definida por $\alpha(g, h) = \phi(g)\varphi(h)$. Respecto a α podemos afirmar que:

i) α está bien definida. Esto es claro pues ϕ y φ lo están.

ii) α es homomorfismo. Sean (g_1, h_1) y (g_2, h_2) elementos de $G\times H$. Como $G = \langle X \mid R\rangle$ y $H = \langle Y \mid S\rangle$, entonces $h_1 = y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2}\dots y_n^{\varepsilon_n}$ y $g_2 = x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\dots x_m^{\delta_m}$, donde $x_i \in X$, $y_i \in Y$ y $\varepsilon_i, \delta_i \in \{1, -1\}$ para $1 \le i \le n, m$. Luego,

$$\begin{aligned}\alpha((g_1,h_1)(g_2,h_2)) &= \alpha(g_1g_2, h_1h_2) = \phi(g_1g_2)\varphi(h_1h_2)\\ &= \phi(g_1)\phi(g_2)\varphi(h_1)\varphi(h_2)\\ &= \phi(g_1)\phi(x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\dots x_m^{\delta_m})\varphi(y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2}\dots y_n^{\varepsilon_n})\varphi(h_2)\\ &= \phi(g_1)x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\dots x_m^{\delta_m}y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2}\dots y_n^{\varepsilon_n}\varphi(h_2)\\ &= \phi(g_1)y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2}\dots y_n^{\varepsilon_n}x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\dots x_m^{\delta_m}\varphi(h_2)\\ &= \phi(g_1)\varphi(h_1)\phi(g_2)\varphi(h_2)\\ &= \alpha(g_1,h_1)\alpha(g_2,h_2)\end{aligned}$$

Por tanto α es homomorfismo.
Por otro lado, sea $\nu : X \cup Y \to G \times H$ definida por $\nu(x) = (x, 1_H)$ y $\nu(y) = (1_G, y)$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$. Por el Test de Sustitución, existe $\beta : D \to G \times H$ homomorfismo que extiende a ν.

Afirmación: $\beta = \alpha^{-1}$. En efecto, sea $f \in D$. Como $D = \langle X \cup Y \mid T\rangle$, entonces $f = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_r^{\varepsilon_r}$ donde $x_i \in X \cup Y$ y $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$. Luego

$$\begin{aligned}(\alpha\circ\beta)(f) &= \alpha(\beta(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_r^{\varepsilon_r}))\\ &= \alpha(\beta(x_1)^{\varepsilon_1}\beta(x_2)^{\varepsilon_2}\dots\beta(x_r)^{\varepsilon_r})\\ &= \alpha(\beta(x_1)^{\varepsilon_1})\alpha(\beta(x_2)^{\varepsilon_2})\dots\alpha(\beta(x_r)^{\varepsilon_r}),\quad (*)\end{aligned}$$

Como $x_i \in X \cup Y$ entonces $x_i \in X$ ó $x_i \in Y$.

Caso *i*) Si $x_i \in X$, entonces $\beta(x_i) = \nu(x_i) = (x_i, 1_H)$ y por tanto

$$\alpha(\beta(x_i)^{\varepsilon_i}) = \alpha((x_i^{\varepsilon_i}, 1_H)) = \pi(x_i)^{\varepsilon_i}\varphi(1_H) = x_i^{\varepsilon_i} 1_H = x_i^{\varepsilon_i}$$

Caso *ii*) Si $x_i \in Y$, entonces $\beta(x_i) = \nu(x_i) = (1_G, x_i)$ y por tanto

$$\alpha(\beta(x_i)^{\varepsilon_i}) = \alpha(1_G, x_i^{\varepsilon_i}) = \phi(1_G)\varphi(x_i^{\varepsilon_i}) = 1_G x_i^{\varepsilon_i} = x_i^{\varepsilon_i}.$$

Así en $(*)$ se tiene que:

$$(\alpha \circ \beta)(f) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_r^{\varepsilon_r} = f = id_D.$$

Sea $(g, h) \in G \times H$, entonces $g \in G = \langle X \mid R \rangle$ y $h \in H = \langle Y \mid S \rangle$, entonces $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ y $h = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_m^{\varepsilon_m}$ con $x_i \in X$ y $y_i \in Y$. Luego,

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha)(g, h) = \beta(\alpha(g, h)) = &\\
\beta(\phi(g)\varphi(h))&\\
= \beta(\phi(g))\beta(\varphi(h))&\\
= \beta(\phi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}))\beta(\phi(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_m^{\varepsilon_m}))&\\
= \beta(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n})\beta(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_m^{\varepsilon_m})&\\
= \nu(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n})\nu(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_m^{\varepsilon_m})&\\
= (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_m}, 1_H)(1_G, y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_m^{\varepsilon_m})&\\
= (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_m^{\varepsilon_m}, y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_m^{\varepsilon_m})&\\
= (g, h)&
\end{aligned}$$

Así, $\beta \circ \alpha = id_{G\times H}$. Por tanto $\beta = \alpha^{-1}$
De *i*), *ii*) y de la afirmación anterior se sigue que $\alpha : G \times H \to D$ es un isomorfismo. Por tanto $G \times H \cong D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$; es decir, $G \times H$ tiene la presentación $\langle X, Y \mid R, S, [X, Y] \rangle$. □

Ejemplo 3.1. *Dado que* $\mathbf{Z}_2$ *el grupo cíclico de orden* 2 *tiene la presentación* $\langle a \mid a^2\rangle$ *y que* $\mathbf{Z}_3$ *el grupo cíclico de orden* 3 *tiene la presentación* $\langle b \mid b^3\rangle$*, por el Teorema anterior se sigue que una presentación para* $\mathbf{Z}_6 \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ *está dada por*

$$\langle a, b \mid a^2, b^3, [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab\rangle,$$

lo que coincide con lo mostrado en el Ejemplo 2.2, donde vimos que $\langle x, y|x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ *es una presentación para* $\mathbf{Z}_6$.

4. Conclusiones

1. Dado cualquier grupo F y cualquier subgrupo H de F, existe una transversal de Schreier para H.

2. El Teorema de Nielsen-Schreier nos permite establecer una conexión entre la teoría combiantoria y la teoría geométrica de grupos, pues a partir de este podemos probar que todo grupo tiene una presentación.

3. A futuro creemos que se pueden explorar mas propiedades de la transversal de Schreier, usando los generadores de la transversal en términos de la libre psentación de grupos.

Referencias

[1] JOHNSON, D.l. *Presentations of groups*. London Mathematical Society, Cambridge, 1990.

[2] Vergara Gabriel and Salazar Olga. *Introducción a la teoría geométrica de grupos*, Revista Integración. **29** (2011), 15-30.

[3] HARPE, P. *Topics in geometric group theory*. A series of comprehensive studies in mathematics, Chicago Lectures in Mathematics Series, 2000.

[4] WEST, D. *Introduction to Graph Theory*. Editorial Prentice-Hall

[5] DUMMIT, D. and FOOTE, R. *Abstract Algebra*, Third Edition. John Wiley, 2003.

[6] HUNGERFORD, T. Algebra. Graduate texts in Mathematics, Springer, 1974.

Para citar este artículo: Vergara G. et all, 2014, Ïntroducción a la Presentación de Grupo". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.