Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. I , Nº 1, (2014)

Revista Del Programa De Matemáticas I (2014) 52–57

Sobre una Extensión de los Polinomios de Apostol-Euler Generalizados

On an Extension of the Generalized Apostol-Euler Polynomials

Pedro L. Hernández Llanos[1]

[1]*Programa de Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
E-mail: phernandezllanos@mail.uniatlantico.edu.co

Alejandro Urieles Guerrero[2]

[2]*Dpto. Matemáticas Puras y Aplicadas*
Universidad Simón Bolivar, Venezuela
Programa de Matemáticas
Universidad del Atlántico, Colombia
E-mail: alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Received / Recibido: 18/12/2013. Accepted / Aceptado: 25/01/2014

Resumen

En este artículo se estudia una extensión conocida de los polinomios de Apostol-Euler generalizados y algunas de sus propiedades, su relación con los números de Stirling de segundo orden, los polinomios de Genocchi y los polinomios ortogonales clásicos.

Palabras claves: Polinomios de Genocchi; funciones generatrices; polinomios de Apostol-Euler generalizados; Polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite; números de Stirling de segundo orden.

Abstract

In this article is studied an known extension of generalized Apostol-Euler polynomials and some properties, its relationship with the Stirling numbers of the second kind, Genocchi polynomials and the classics orthogonal polynomials.

Keywords: Genocchi polynomials; generating function; generalized Apostol-Euler polynomials ; Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials; Stirling numbers of the second kind.

1. Introducción

Denotamos por $E_n^{\alpha}(x)$ los polinomios de Euler generalizados de orden $\alpha \in \mathbb{N}$. Siguiendo las ideas de Apostol en el estudio de los polinomios de Bernoulli [1], Luo y Srivastava estudian los polinomios de Apostol-Euler [8]; en un trabajo posterior Luo [9] introduce una generalización de los polinomios de Apostol-Euler $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$ con λ real o complejo. En el presente trabajo realizamos inicialmente un estudio de una extensión de los polinomios $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$ tomando como base un trabajo reciente de Chen, Cai y Luo (ver [2]), dicha extensión la notamos por $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$. En la sección 2 damos algunos resultados y observaciones conocidas que serán utilizados en el trabajo.

Finalmente, en la sección 3 estudiamos las relaciones entre los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ y los números de Stirling de segundo orden, los polinomios de Genocchi y los polinomios clásicos de Jacobi, Hermite y Laguerre.

2. Resultados Previos y Notación

Sea $E_n(x)$ el n-ésimo polinomio de Euler. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, denotamos por $E_n^{(\alpha)}(x)$ el n-ésimo polinomio de Euler generalizado, $S(n,k)$ los números de Stirling de segundo orden, $G_n(x)$ el n-ésimo polinomio de Genocchi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$ y $H_n(x)$ el n-ésimo polinomio de Jacobi, Laguerre y Hermite respectivamente. En la presente sección damos algunos resultados conocidos, necesarios para nuestro estudio, los cuales pueden consultarse en [3, 4, 5], entre otros.

Definición **2.1.** Los polinomios de Euler $E_n(x)$ están definidos por la siguiente función generatriz:

$$\frac{2}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \ (|t| < \pi). \tag{1}$$

Definición **2.2.** Los polinomios de Euler generalizados $E_n^{\alpha}(x)$ de orden $\alpha \in \mathbb{Z}$ están definidos por las siguiente función generatriz:

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}, \ (|t| < \pi). \tag{2}$$

Observación 2.1. Para $\alpha = 1$ tenemos $E_n^{(1)}(x) = E_n(x)$.

Definición **2.3.** Los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$ de orden $\alpha \in \mathbb{N}$ son definidos mediante la siguiente función generatriz:

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{3}$$

$(|t| < \pi$ cuando $\lambda = 1; |t| < |\log(-\lambda)|$, donde $\lambda \neq 1)$.

Definición **2.4.** Los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ son definidos mediante la siguiente función generatriz:

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{4}$$

$(|t| < |\log(-\lambda)|)$.

Observación 2.2. Los polinomios de Apostol-Euler $E_{n,\lambda}(x) = E_{n,\lambda}^{(1)}(x)$ y polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_n^{(\alpha)}(x) = E_{n,1}^{(\alpha)}(x)$.

Definición **2.5.** Los polinomios de Euler generalizados $E_n^{[m-1,\alpha]}(x)$, $m \in \mathbb{N}$ están definidos en un entorno de $t = 0$, mediante la función generatriz:

$$\left(\frac{2^m}{e^t + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!}}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{[m-1,\alpha]}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{5}$$

Observación 2.3. Si tomamos $m = 1$, en (5) obtenemos (2).

Definición **2.6.** Para parámetros arbitrarios reales o complejos λ y los números $m, \alpha \in \mathbb{N}$, los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ están definidos en un entorno de $t = 0$, mediante la función generatriz:

$$\left(\frac{2^m}{\lambda e^t + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!}}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{6}$$

Observación 2.4. Si hacemos $m = 1$, en (6) obtenemos (3).

Definición **2.7.** Para números $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, los polinomios de Euler generalizados $E_n^{[m-1,\alpha]}(x)$, están definidos en un entorno de $t = 0$, mediante la función generatriz:

$$\left(\frac{2^m}{e^t + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!}}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{[m-1,\alpha]}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{7}$$

OBSERVACIÓN 2.5. Si tomamos $m = 1$, en (7) obtenemos (2).

DEFINICIÓN **2.8.** Los polinomios de Genocchi $G_n(x)$ son usualmente definidos a través de la siguiente función generatriz:

$$\frac{2te^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}, (|t| < \pi). \quad (8)$$

LEMA 1. Los polinomios de Genocchi $G_n(x)$ verifican la siguiente relación:

$$x^m = \frac{1}{2(m+1)} \times \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k+1} G_{k+1}(x) + G_{m+1}(x)\right]. \quad (9)$$

DEFINICIÓN **2.9.** Los números de Stirling de segundo orden $S(n,k)$ están definidos por las siguientes funciones generalizadas:

$$\prod_{n=1}^{k}(1-nt)^{-1} = \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)t^{n-k}, \quad (10)$$

$$(e^t+1)^k = k!\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{t^n}{n!}, \quad (11)$$

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(t)_k, \quad (12)$$

con $(|t| < k^{-1})$, $(t)_k = t(t-1)\cdots(t-k+1)$. $S(n,k)$ denota el número de formas de particionar un conjunto de n elementos en k subconjuntos no vacíos.

LEMA 2. Los números de Stirling $S(n,k)$ verifican la siguiente relación:

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{x}{k} k!S(m,k). \quad (13)$$

DEFINICIÓN **2.10.** Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ se definen a través de la siguiente expresión:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(-2)^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \times \frac{d^n}{(dx)^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}], \quad (14)$$

con $x \in (-1,1)$.

LEMA 3. Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ verifican la siguiente relación:

$$x^m = m!\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m+\alpha}{m-k} \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{m+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x). \quad (15)$$

DEFINICIÓN **2.11.** Los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ son definidos a través de la siguiente expresión:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n!x^\alpha}\frac{d^n}{(dx)^n}[e^{-x}x^{n+\alpha}]. \quad (16)$$

LEMA 4. Los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ verifican la siguiente relación:

$$x^m = m!\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m+\alpha}{m-k} L_k^{\alpha}(x). \quad (17)$$

DEFINICIÓN **2.12.** Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ son usualmente definidos a través de la siguiente función generatriz:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \quad (18)$$

y pueden ser generados mediante la fórmula:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{(dx)^n}[e^{-x^2}]. \quad (19)$$

LEMA 5. Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ verifican la siguiente relación:

$$(2x)^m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k}\frac{(2k)!}{k!} H_{m-2k}(x). \quad (20)$$

Los siguientes teoremas establecen relaciones entre la base canónica de los polinomios y la extensión de los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ (ver [2]).

TEOREMA 1. Los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\beta]}(y), \quad (21)$$

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)x^{n-j}. \quad (22)$$

TEOREMA 2. Los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ satisfacen la siguiente relación:

$$2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_{k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)E_{k,\lambda}^{(-1)}(0) = \lambda E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+1) + E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x). \quad (23)$$

3. Algunas Fórmulas De Conexión De Los Polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$

En esta sección estudiaremos algunas conexiones existentes entre los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ y otras familias de polinomios como los de Genocchi, Jacobi, Laguerre y Hermite, además estudiaremos la relación de los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ con los números de Stirling de segundo orden. Para llevar a cabo todo lo anterior seguimos las mismas ideas utilizadas en la demostración del Teorema 1, además usamos las siguientes propiedades básicas de las sumatorias:

$$\sum_{j=0}^{n} A_{n-j}B_n = \sum_{j=0}^{n} A_j B_{n-j}, \tag{24}$$

$$\sum_{j=0}^{n-k} A_j = \sum_{j=k}^{n} A_{n-j}, \tag{25}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right), \tag{26}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} a_{jk}. \tag{27}$$

TEOREMA 3. Los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ y los polinomios de Genocchi $G_{n,\lambda}(x)$ definidos en (8) verifican la siguiente relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \times \left(A^{(\alpha,\lambda)}(x,n,k) + B^{(\alpha,\lambda)}(x,n,k)\right) G_{k+1}(x), \tag{28}$$

con

$$A^{(\alpha,\lambda)}(x,n,k) = \binom{n}{k} E_{n-k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y),$$
$$B^{(\alpha,\lambda)}(x,n,k) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y).$$

Demostración. Por sustitución de (9) en el miembro de la derecha de (22), tenemos

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-j+1)} \times \left[\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) + G_{n-j+1}(x)\right]$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-j+1)}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-j+1)} G_{n-j+1}(x)$$

usando (26) se sigue que

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-j+1)}\binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-j+1)} G_{n-j+1}(x)$$

aplicando (27) en la primera suma y cambiando j por k tenemos

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-j+1)}\binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_{k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(n-k+1)} G_{n-k+1}(x)$$

ahora, usando (25) en la primera suma y (24) en la segunda suma, se sigue que

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{n-j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(j+1)}\binom{j+1}{k+1} G_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} E_{n-k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\frac{1}{2(k+1)} G_{k+1}(x)$$

finalmente amplificando por $\binom{j}{k}$ en la primera suma, desarrollando los combinatorios y factorizando $G_{k+1}(x)$ finalizamos la prueba. □

TEOREMA 4. Los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ y los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ definidos por (14) satisfacen la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{j=k}^{n} j!\binom{j+\alpha}{j-k}\binom{n}{j} \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{j+1}} E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\mu]}(y) P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x). \tag{29}$$

Demostración. Por sustitución de (15) en el miembro de la derecha de (22), tenemos

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)(n-j)!\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k} \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{n-j+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

aplicando (26), se sigue que

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)(n-j)!(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k} \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{n-j+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

usando (27) tenemos

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)(n-j)!(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k} \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{n-j+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

nuevamente por uso de (26), aplicando después (25) y ordenando los combinatorios finalzamos la prueba. □

TEOREMA 5. Los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ y los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ definidos por (16) satisfacen la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{j=k}^{n}j!\binom{n}{j}\binom{j+\alpha}{j-k}E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\mu]}(y)L_k^{(\alpha)}(x). \quad (30)$$

Demostración. Si hacemos $m=n-j$ en (17), tenemos:

$$x^{n-j}=(n-j)!\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}L_k^{\alpha}(x). \quad (31)$$

Ahora, al sustituir (31) en el miembro de la derecha de (22) se sigue que:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)(n-j)!\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}L_k^{\alpha}(x)$$

por aplicación de (26), obtenemos

$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{j}E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)(n-j)!(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}L_k^{\alpha}(x)$$

usando (27), tenemos

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)(n-j)!(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}L_k^{\alpha}(x).$$

Finalmente al aplicar nuevamente (26) y luego (25) concluimos la prueba. □

TEOREMA 6. Los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x)$ y los polinomios de Hermite $H_n(x)$ definidos por (18) verifican la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x+y)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{[(n-j)/2]}2^{n-j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{2k}$$
$$\times\frac{(2k)!}{k!}E_{j,\lambda}^{[m-1,\mu]}(y)H_{n-j-2k}(x). \quad (32)$$

Demostración. Consideramos la expresión (20), despejamos x^m y hacemos $m=n-j$ tenemos:

$$x^{n-j}=\sum_{k=0}^{[n-j/2]}2^{-(n-j)}\binom{n-j}{2k}\frac{(2k)!}{k!}H_{n-j-2k}(x), \quad (33)$$

luego al sustituir (33) en el miembro de la derecha de (22) y haciendo uso de (26) concluimos la prueba. □

TEOREMA 7. Los polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ y los números de Stirling $S(n,k)$ de segundo orden definidos en (12) satisfacen la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}k!\binom{x}{k}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)S(j,k) \quad (34)$$

Demostración. Al sustituir (13) en el miembro de la derecha de (22), tenemos

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\sum_{k=0}^{n-j}\binom{x}{k}k!S(n-j,k)$$

por (26), se sigue que

$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{j}E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\binom{x}{k}k!S(n-j,k)$$

ahora por (27), entonces

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y)\binom{x}{k}k!S(n-j,k).$$

Finalmente usando de nuevo (26) y luego (25) finalizamos la prueba. □

OBSERVACIÓN 3.1. Si hacemos $m=1$ en (28), (34), (29), (30) y (32), entonces obtenemos los resultados correspondientes de los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$.

OBSERVACIÓN 3.2. Si hacemos $m=1$, $\lambda=1$ en (28), (34), (29), (30) y (32), entonces obtenemos los resultados correspondientes de los polinomios de Euler generalizados $E_n^{(\alpha)}(x)$.

Referencias

[1] Apostol, T: *On the Lerch Zeta function*. Pacific J. Math.**1**, 161-167 (1951)

[2] Chen, S, Cai, Y, Luo, Q: *An extension of generalized Apostol-Euler polynomials*. **2013:61**, Chen et al. Advances in Difference Equations (2013)

[3] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Trascendental Functions*. **Vol 1** (1953)

[4] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Trascendental Functions*. **Vol 2** (1953)

[5] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Trascendental Functions*. **Vol 3** (1953)

[6] Kurt, B: *A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the 2D-Bernoulli polynomials $B_n^2(x,y)$*. Appl. Math. **233**, 3005-3017 (2010)

[7] Luck, Y: *The Special Functions and their Approximations.* (1969)

[8] Luo, Q-M, Srivastava, HM: *Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. J. Math. Anal. Appl.***308**, 290-302 (2005)

[9] Luo, Q-M: *Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions*. Taiwan, J. Math.**10**(4), 917-925 (2006)

[10] Luo, Q-M, Srivastava, HM: *Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials* Comput. Math. Appl.**51**, 631-642(2006)

[11] Luo, Q-M: *Some generalizations of the Apostol-Genocchi and Stirling numbers of the second kind*. Appl. Math. Comput. **217**, 5702-5728 (2011)

[12] Luo, Q-M: *Extension for the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations*. Osaka J. Math.**48**, 291-309 (2011)

[13] Natalini, P, Bernardini, A: *A generalization of the Bernoulli polynomials.* J. Appl. Math.)**3**, 155-163 (2003)

[14] Rainville, ED: *Special Functions*. Macmillan Company, New York (1960); Reprinted by Chelsea publishing Company, Bronx (1971)

[15] Srivastava, HM, Choi, J: *Series Associated with the Zeta and Related Functions.* Kluwer Academic, Dordrecht (2001)

[16] Srivastava, HM, Kurt, B, Simsek, Y: *Corrigendum to some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions. Integral Transforms Spec. Funct.* **23**, 939-940 (2009)

[17] Szego, G: *Orthogonal Polynomials.* American Math. Soc. Providence, Rhode Island. (1939)

[18] Tremblay, R, Gaboury, S, Fugére, B-J: *A new class of generalized Apostol-Bernoulli polynomials and some analogues of the Srivastava. Pintér addition theorem* Appl. Math. Lett. **24**, 1888-1893 (2011)

[19] Wang, W, Jia, C, Wang, T: *Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials.* Comput. Math. Appl. **55**, 1322-1332 (2008)

Para citar este artículo: Hernández P. et all, 2014, ”Sobre una Extensión de los Polinomios de Apostol-Euler Generalizados”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en: http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.