Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. I , N$^{\underline{o}}$ 1, (2014)

Revista Del Programa De Matemáticas I (2014) 31–39

# Una Caracterización de la $\gamma$-normalidad a través de cierta clase de funciones

# A Characterization of $\gamma$-normality through certain class of functions

Carlos Carpintero[1]

[1] *Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela*
*E-mail: carpintero.carlos@gmail.com*

Ennis Rosas[2]

[2] *Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela*
*E-mail: ennisrafael@gmail.com*

Jorge Robinson[3]

[3] *Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia*
*E-mail: jorge.is.robinson@gmail.com*

Yhonnatan Salazar[4]

[4] *Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela*
*E-mail: yhonnatansalazar@yahoo.es*

*Received / Recibido: 8/10/2013. Accepted / Aceptado: 11/03/2014*

**Resumen**

En este trabajo se considera una generalización del clásico concepto de normalidad, conocido como $\gamma$-normalidad [7], mediante la noción de operador asociado a una topología. También se extiende la noción clásica de función continua y se demuestra un resultado análogo al Lema de Urysohn que caracteriza los espacios $\gamma$-normales.

*Palabras claves:*
operador asociado; conjunto $\gamma$-abierto; espacio $\gamma$-normal
2010 *Mathematics Reviews* Primary 54A05. Secondary 54C08, 54D65.

**Abstract**

In this article we consider a generalization of the classic normality concept, called $\gamma$-normality [7], by using the notion of associated operator to a topology. Also we extend the classic notion of continuous function and prove an analogues to the Urysohn's Lemma which characterize the $\gamma$-normal spaces.

*Keywords:*
associated operator; $\gamma$-open set; $\gamma$-normal space
2010 *Mathematics Reviews* Primary 54A05. Secondary 54C08, 54D65.

## 1. Introduction

En 1963, Norman Levine comenzó el estudio de la generalización de conjuntos abiertos de un espacio topológico con la introducción de los conjuntos semi-abiertos. Su trabajo [12], fue fuente de inspiración no sólo para la generalización de la noción de conjunto abierto en otros contextos, sino que también sirvió de motivación o inicio para que muchos matemáticos abordaran la investigación de formas generalizadas de otras nociones de la topología general que se pueden expresar en términos de éstas, tales como las nociones de continuidad, compacidad, propiedades de separación, entre otras. Es así como se ha originado una extensa literatura respecto a estos temas, entre los que se tienen como referencia básica los trabajos de Abd El-Monsef et al. [1], Andrijević [5], Mashhour et al. [13] y Njastad [14], en los que se definen los conjuntos $\beta$-abiertos, $b$-abiertos, preabiertos y $\alpha$-abiertos, respectivamente. Posteriormente, S. Kasahara introduce en [11] la noción de operación u operador asociado a una topología $\tau$ sobre un conjunto $X$, la cual resultó una herramienta muy versátil, pues abrió mayores posibilidades y nuevos enfoques para el estudio de nuevas clases de conjuntos y propiedades generalizadas de separación, continuidad, compacidad y otras nociones clásicas de la topología general, presentadas ahora en un contexto más amplio. En este sentido, H. Ogata [15] define la noción de conjunto $\tau_\gamma$-abierto para un operador $\gamma$ asociado a una topología $\tau$ sobre $X$. En una forma similar Á. Császár también introduce en [10] y [9], para ciertas clases de operadores $\gamma : P(X) \to P(X)$, la noción de conjunto $\gamma$-abierto, que le permite definir y estudiar los espacios $\gamma$-compactos. Si bien en este contexto se han estudiado exhaustivamente tanto generalizaciones, como axiomas débiles de separación, recientemente han aparecido investigaciones relacionadas con la generalización de otras propiedades de separación como normalidad y regularidad, tal es el caso de B. Ahmad y S. Hussain, quienes introducen en [2], los espacios $\gamma^s$-normales, así como también los matemáticos C. Basu et al. [6] que presentaron y caracterizaron los espacios $\gamma$-$\beta$-normales, éstos como una generalización de los espacios $\beta$-normales introducidos anteriormente por S. Tahiliani en [16]. Otras formas generalizadas de normalidad son estudiadas en [3], [4], [8] y [17]. Todas las formas de normalidad citadas anteriormente son unificadas por C. Carpintero et al. en [7], usando la noción de $\gamma$-normalidad.

En este trabajo se continúa el estudio de los espacios $\gamma$-normales introducidos en [7]. Se extiende la noción clásica de función continua y en base a los resultados obtenidos en [7], se muestra un resultado análogo al Lema de Urysohn que permite obtener otra caracterización alternativa para los espacios $\gamma$-normales.

## 2. Conjuntos $\gamma$-Abiertos y Espacios $\gamma$-normales

En esta sección se introduce y estudia la noción de conjunto $\gamma$-abierto en el sentido de A. Császár, en un espacio topológico $(X, \tau)$, dotado de una aplicación $\gamma : P(X) \to P(X)$. Se presentan además, ciertas nociones de clausura e interior de un conjunto y algunas propiedades básicas de éstas. Finaliza esta sección con la introducción de los espacios $\gamma$-normales y algunas caracterizaciones.

**Definición 2.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Un operador asociado a la topología $\tau$ sobre $X$ es una aplicación $\gamma : P(X) \to P(X)$ tal que $U \subseteq \gamma(U)$, para todo $U \in \tau$.

**Definición 2.2.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ un operador asociado a $\tau$. Se dice que $\gamma$ es monótono, si dados $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$ se cumple que $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$.

**Observación 2.3.** Dadas dos aplicaciones $\gamma, \gamma' : P(X) \to P(X)$. Se define $\gamma \preceq \gamma'$, si $\gamma(A) \subseteq \gamma'(A)$ para todo $A \subseteq X$. En particular, si $\gamma$ y $\gamma'$ son operadores asociados a una topología $\tau$ sobre $X$, la relación $\gamma \preceq \gamma'$ define un orden parcial sobre la colección de todos los operadores asociados a una misma topología $\tau$ sobre $X$. También pueden determinarse otros operadores asociados a partir de $\gamma$ y $\gamma'$, a través de las operaciones conjuntistas básicas de unión e intersección. Es así como resultan:

$$\begin{aligned}(\gamma \vee \gamma')(A) &= \gamma(A) \cup \gamma'(A) \quad \forall A \subseteq X;\\ (\gamma \wedge \gamma')(A) &= \gamma(A) \cap \gamma'(A) \quad \forall A \subseteq X,\end{aligned}$$

o mediante la composición

$$(\gamma \circ \gamma')(A) = \gamma(\gamma'(A)) \quad \forall A \subseteq X.$$

En lo sucesivo, se denotará $\gamma\gamma'$ en lugar de $\gamma \circ \gamma'$.

De manera natural, sobre un espacio topológico $(X, \tau)$, siempre se cuenta con los operadores clausura $cl : P(X) \to P(X)$ e interior $int : P(X) \to P(X)$ asociados a $\tau$. El siguiente ejemplo ilustra como se obtienen otros operadores asociados a $\tau$, mediante las operaciones anteriormente descritas.

**Ejemplo 2.4.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$, definido por:

(1) $\gamma(A) = A$, para todo subconjunto $A \subseteq X$;

(2) $\gamma(A) = cl(A)$, para todo $A \subseteq X$;

(3) $\gamma(A) = int(A)$, para todo $A \subseteq X$;

(4) $\gamma(A) = clint(A) = cl(int(A))$, para todo $A \subseteq X$;

(5) $\gamma(A) = intcl(A) = int(cl(A))$, para todo $A \subseteq X$;

(6) $\gamma(A) = intclint(A) = int(cl(int(A)))$, para todo $A \subseteq X$;

(7) $\gamma(A) = clintcl(A) = cl(int(cl(A)))$, para todo $A \subseteq X$;

(8) $\gamma(A) = (clint \vee intcl)(A) = cl(int(A)) \cup int(cl(A))$, para todo $A \subseteq X$.

Note que en cada uno de los casos anteriores $\gamma$ es un operador monótono asociado a $\tau$. En los siguientes ejemplos, se muestran otras formas de obtener operadores asociados a una topología, y además se exhibe la existencia de operadores asociados que no son monótonos.

**Ejemplo 2.5.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Considere la aplicación $\gamma : P(X) \to P(X)$, definida por $\gamma(A) = f^{-1}(f(A))$ para todo $A \subseteq X$. Observe que $\gamma$ es un operador monótono cualquiera sea la función $f$. Mientras que $\gamma$ es el operador identidad sobre $P(X)$, si $f$ es inyectiva.

**Ejemplo 2.6.** Considere $\mathbb{R}$ con la topología usual y $\gamma : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ la aplicación definida por $\gamma(U) = \mathbb{R} - \partial(U)$, donde $\partial(U)$ denota la frontera topológica de $U$. Considere $A = \{1\}$ y $B = \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces $A \subseteq B$, pero $\gamma(A)$ no está contenido en $\gamma(B)$, pues $\gamma(A) = \mathbb{R} - \{1\}$ y $\gamma(B) = \mathbb{R} - \{0\}$. Por lo tanto, $\gamma$ no es monótono.

En lo sucesivo, se considera un espacio topológico $(X, \tau)$, junto con una aplicación $\gamma : P(X) \to P(X)$ que satisface:

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \gamma(A) \subseteq \gamma(B), \tag{1}$$

$$\gamma(\emptyset) = \emptyset,\ \gamma(X) = X, \tag{2}$$

$$G \cap \gamma(A) \quad \subseteq \quad \gamma(G \cap A); \forall G \in \tau, A \subseteq X \tag{3}$$

**Observación 2.7.** Según las condiciones (2) y (3), resulta

$$G = G \cap X = G \cap \gamma(X) \subseteq \gamma(G \cap X) = \gamma(G).$$

Así $G \subseteq \gamma(G)$, para todo abierto $G$, en consecuencia $\gamma : P(X) \to P(X)$ es un operador asociado a $\tau$ en el sentido de la Definición 2.1. Además por la condición (1), $\gamma$ es monótono. Note también que toda aplicación $\gamma : P(X) \to P(X)$ que satisfaga (1), (2) y (3) es tal que $\gamma \preceq cl$. En efecto,

$$(X - cl(A)) \cap \gamma(A) \subseteq \gamma((X - cl(A)) \cap A) = \gamma(\emptyset) = \emptyset.$$

Para la clase de aplicaciones antes descritas, Á. Császár [9] introduce la siguiente noción.

**Definición 2.8.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice $\gamma$-abierto, si $A \subseteq \gamma(A)$. El complemento de un conjunto $\gamma$-abierto, se dice $\gamma$-cerrado.

**Observación 2.9.** Todo conjunto abierto es un conjunto $\gamma$-abierto, pues de la Observación 2.7, $G \subseteq \gamma(G)$ para todo abierto $G$. En consecuencia, la colección de los conjuntos $\gamma$-abiertos contiene, no sólo a la clase de los conjuntos abiertos, si no también a la clase de los conjuntos $\tau_\gamma$-abiertos estudiados en [15].

Seguidamente, se enuncian una serie de propiedades básicas de los conjuntos $\gamma$-abiertos (resp. $\gamma$-cerrados).

**Teorema 2.10.** [7, Lema 3.1]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). La unión (resp. intersección) arbitraria de conjuntos $\gamma$-abiertos (resp. $\gamma$-cerrados) es un conjunto $\gamma$-abierto (resp. $\gamma$-cerrado).

Los operadores descritos en el Ejemplo 2.4, satisfacen las condiciones (1), (2) y (3). En el siguiente ejemplo, se muestra que existen operadores asociados que son monótonos, pero que no satisfacen la condición (3).

**Ejemplo 2.11.** Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina $\gamma$ como sigue $\gamma(A) = f^{-1}(f(A))$, para todo $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq f^{-1}(f(A)) = \gamma(A)$. Así, $\gamma$ es un operador asociado a la topología $\tau$. Observe que $\gamma$ satisface las condiciones (1) y (2), pero no la condición (3). Pues si se considera $U = (0, 2)$ y $A = [3, 4]$, entonces se tiene que $U \cap f^{-1}(f(A)) = (0, 2)$ y $f^{-1}(f(U \cap A)) = \emptyset$.

Para las nociones de conjuntos $\gamma$-abiertos y conjuntos $\gamma$-cerrados, Á. Császár introduce las definiciones del $\gamma$-interior y la $\gamma$-clausura de un conjunto como siguen.

**Definición 2.12.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). El $\gamma$-interior de $A$, denotado por $int^\gamma(A)$, es la unión de todos los conjuntos $\gamma$-abiertos contenidos en $A$. Es decir,

$$int^\gamma(A) = \bigcup\{U : U \text{ es } \gamma\text{-}abierto \text{ y } U \subseteq A\}.$$

La $\gamma$-clausura de $A$, denotada por $cl^\gamma(A)$, es la intersección de todos los conjuntos $\gamma$-cerrados que contienen a $A$. Es decir,

$$cl^\gamma(A) = \bigcap\{F : F \text{ es } \gamma\text{-}cerrado \text{ y } A \subseteq F\}.$$

**Observación 2.13.** Como consecuencia del Teorema 2.10, se obtiene que el $\gamma$-interior de un conjunto $A$ es un conjunto $\gamma$-abierto y la $\gamma$-clausura de $A$ es un conjunto $\gamma$-cerrado.

Seguidamente se muestran algunas propiedades básicas del $\gamma$-interior y la $\gamma$-clausura.

**Teorema 2.14.** [7, Teorema 3.1]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Para cualquier par de subconjuntos $A$ y $B$ de $X$, se satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $A$ es $\gamma$-abierto si y sólo si $A = int^\gamma(A)$.

(2) Si $A \subseteq B$, entonces $int^\gamma(A) \subseteq int^\gamma(B)$.

(3) $int^\gamma(A) \cup int^\gamma(B) \subseteq int^\gamma(A \cup B)$.

(4) $int^\gamma(A \cap B) \subseteq int^\gamma(A) \cap int^\gamma(B)$.

(5) $int(A) \subseteq int^{\gamma}(A)$.

**Teorema 2.15.** [7, Teorema 3.4]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Para cualquier par de subconjuntos $A$ y $B$ de $X$, se satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $A$ es $\gamma$-cerrado si y sólo si $A = cl^{\gamma}(A)$.

(2) Si $A \subseteq B$, entonces $cl^{\gamma}(A) \subseteq cl^{\gamma}(B)$.

(3) $cl^{\gamma}(A \cap B) \subseteq cl^{\gamma}(A) \cap cl^{\gamma}(B)$.

(4) $cl^{\gamma}(A) \cup cl^{\gamma}(B) \subseteq cl^{\gamma}(A \cup B)$.

(5) $cl^{\gamma}(A) \subseteq cl(A)$

**Teorema 2.16.** [7, Teorema 3.2]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in cl^{\gamma}(A)$ si y sólo si $U \cap A \neq \emptyset$, para cada conjunto $\gamma$-abierto $U$ de $X$ que contiene a $x$.

**Teorema 2.17.** [7, Teorema 3.3]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Para cualquier subconjunto $A$ de $X$, se tiene que $X - cl^{\gamma}(A) = int^{\gamma}(X - A)$.

Obviamente de las leyes de De Morgan, sigue que

$$cl^{\gamma}(X - A) = X - int^{\gamma}(A)$$

$$\Updownarrow$$

$$int^{\gamma}(X - A) = X - cl^{\gamma}(A)$$

**Teorema 2.18.** [7, Lema 4.2]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Si $U \in \tau$ y $A$ es un conjunto $\gamma$-abierto, entonces $U \cap A$ es un conjunto $\gamma$-abierto.

A continuación se introducen los espacios $\gamma$-normales.

**Definición 2.19.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Se dice que $X$ es un espacio $\gamma$-normal si para cada par de subconjuntos $\gamma$-cerrados y disjuntos $A$ y $B$ de $X$, existen conjuntos $\gamma$-abiertos y disjuntos $U$ y $V$ de $X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Es importante destacar que conforme a lo indicado en [7, Observación 3.4], la definición anterior unifica las formas de normalidad estudiadas en [6], [2], [3], [4], [8], [16] y [17]. En el siguiente teorema se caracterizan los espacios $\gamma$-normales.

**Teorema 2.20.** [7, Teorema 5.10]. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) $X$ es un espacio $\gamma$-normal.

(2) Para cada subconjunto $\gamma$-cerrado $A$ de $X$ y cada subconjunto $\gamma$-abierto $U$ de $X$ tal que $A \subseteq U$, existe un subconjunto $\gamma$-abierto $V$ tal que $A \subseteq V \subseteq cl^{\gamma}(V) \subseteq U$.

(3) Si $A$ y $B$ son subconjuntos $\gamma$-cerrados disjuntos de $X$, existe un subconjunto $\gamma$-abierto $V$ de $X$ tal que $A \subseteq V$ y $cl^{\gamma}(V) \cap B = \emptyset$.

Todo espacio normal es un espacio $\gamma$-normal, pero no todo espacio $\gamma$-normal es un espacio normal. Como se exhibe en el ejemplo que sigue.

**Ejemplo 2.21.** Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Considere el operador $\gamma : P(X) \to P(X)$ definido por $\gamma(A) = cl(A)$. Entonces, $X$ es un espacio $\gamma$-normal pero no es normal.

## 3. $\gamma$-Normalidad bajo Funciones $\gamma$-Continuas

En esta sección se introduce la clase de funciones $\gamma$-continuas y se presenta una caracterización de la $\gamma$-normalidad a través de esta clase de funciones.

**Definición 3.1.** Sean $(X, \tau)$, $(Y, \sigma)$ dos espacios topológicos y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Una función $f : X \to Y$ se dice que es $\gamma$-continua si $f^{-1}(V)$ es un conjunto $\gamma$-abierto para cualquier $V \in \sigma$.

**Observación 3.2.** De acuerdo a la Observación 2.9, se tiene que toda función continua es una función $\gamma$-continua. En el siguiente ejemplo se demuestra que el recíproco no siempre es cierto.

**Ejemplo 3.3.** Considere $\mathbb{R}$ con la topología usual y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \infty), \\ -1, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Defina $\gamma : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ como $\gamma(A) = cl(A)$. Es fácil ver que $f$ es una función $\gamma$-continua pero no es una función continua.

En el siguiente teorema se caracteriza las funciones $\gamma$-continuas.

**Teorema 3.4.** Sean $(X, \tau)$, $(Y, \sigma)$ espacios topológicos y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) $f : X \to Y$ es una función $\gamma$-continua.

(2) Si $x \in X$ y $V$ es un conjunto abierto que contiene a $f(x)$, entonces existe un conjunto $\gamma$-abierto $U$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$ Sean $x \in X$ y $V$ un conjunto abierto que contiene a $f(x)$. Como $f$ es una función $\gamma$-continua, entonces $U = f^{-1}(V)$ es un conjunto $\gamma$-abierto tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Sean $x \in X$ y $V$ un conjunto abierto tal que $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $V$ es un conjunto abierto y contiene a $f(x)$, por hipótesis, existe un conjunto $\gamma$-abierto $U$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Así $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$, en consecuencia $x \in int^{\gamma}(f^{-1}(V))$. Luego $f^{-1}(V) = int^{\gamma}(f^{-1}(V))$. Por el Teorema 2.14, sigue que $f^{-1}(V)$ es un conjunto $\gamma$-abierto.

El siguiente resultado constituye el aporte principal de este trabajo, en el se extiende el clásico Lema de Uryshom, así como también se proporciona una nueva caracterización para los espacios $\gamma$-normales.

**Teorema 3.5.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga las condiciones (1), (2) y (3). Entonces $X$ es un espacio $\gamma$-normal si y sólo si para cada par de subconjuntos $\gamma$-cerrados y disjuntos $A, B$ de $X$, existe una función $\gamma$-continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Demostración

(Suficiencia) Suponga que $(X, \tau)$ es un espacio $\gamma$-normal. Sean $A$ y $B$ conjuntos $\gamma$-cerrados y disjuntos en $X$. Se construirá una familia $\{U_r : r \in D\}$ de conjuntos $\gamma$-abiertos, con $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}\}$, tal que:

$$A \subseteq U_r \text{ y } cl^{\gamma}(U_r) \cap B = \emptyset, \text{ para todo } r \in D \tag{4}$$

y

$$cl^{\gamma}(U_r) \subseteq U_s \text{ siempre que } r, s \in D \text{ y } r < s. \tag{5}$$

Puesto que $X$ es un espacio $\gamma$-normal, por el Teorema 2.20, existe un $\gamma$-abierto $V$ de $X$ tal que $A \subseteq V$ y $cl^{\gamma}(V) \cap B = \emptyset$. Note que para $n = 1$, $D = \{\frac{1}{2}\}$. Si se considera $V = U_{\frac{1}{2}}$, obviamente $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ y $cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{2}}) \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $U_r$, para $r = \frac{1}{2}$ satisface las condiciones (4) y (5).

Ahora para $n = 2$, $D = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Puesto que $U_{\frac{1}{2}} = V$, se tiene que definir $U_r$, para $r = \frac{1}{4}$ y $r = \frac{3}{4}$. Como $U_{\frac{1}{2}}$ es $\gamma$-abierto y $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$, entonces $A$ y $X - U_{\frac{1}{2}}$ son conjuntos $\gamma$-cerrados disjuntos en $X$. Como $X$ es $\gamma$-normal, según el Teorema 2.20, existe un conjunto $\gamma$-abierto $V'$ tal que

$$A \subseteq V' \qquad \text{y} \qquad cl^{\gamma}(V') \cap (X - U_{\frac{1}{2}}) = \emptyset.$$

Tomando $V' = U_{\frac{1}{4}}$, entonces

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \qquad \text{y} \qquad cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{4}}) \subseteq U_{\frac{1}{2}}.$$

Además, de la última inclusión se tiene

$$cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{4}}) \cap B \subseteq U_{\frac{1}{2}} \cap B \subseteq cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{2}}) \cap B = \emptyset,$$

es decir, $cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{4}}) \cap B = \emptyset$. Por otro lado, como $cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{2}})$ y $B$ son $\gamma$-cerrados disjuntos. En consecuencia, existe un conjunto $\gamma$-abierto $V''$ tal que

$$cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{2}}) \subseteq V'' \qquad \text{y} \qquad cl^{\gamma}(V'') \cap B = \emptyset.$$

Tomando $V'' = U_{\frac{3}{4}}$, entonces

$$cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{2}}) \subseteq U_{\frac{3}{4}} \qquad \text{y} \qquad cl^{\gamma}(U_{\frac{3}{4}}) \cap B = \emptyset.$$

De esto y de lo anterior se tiene que

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{4}}) \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq cl^{\gamma}(U_{\frac{1}{2}}) \subseteq U_{\frac{3}{4}}.$$

Es decir, en el caso $n = 2$ las condiciones (4) y (5) también valen. Procediendo por inducción matemática se deduce que las condiciones (4) y (5) valen para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Sea $f : X \to [0, 1]$, definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \notin \bigcup_{r \in D} U_r, \\ \text{ínf}\{r \in D : x \in U_r\} & , \text{si } x \in \bigcup_{r \in D} U_r. \end{cases}$$

Observe que si $x \in B$, usando la condición $cl^{\gamma}(U_r) \cap B = \emptyset$, entonces $x \notin cl^{\gamma}(U_r) \supseteq U_r$, es decir, $x \notin U_r$, para todo $r \in D$. Por lo tanto, $x \notin \bigcup_{r \in D} U_r$. Usando esto y la definición de $f$, obtenemos que $f(x) = 1$. Es decir, $f(B) = \{1\}$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Como $A \subseteq U_r$ para $r \in D$, sigue que $x \in \bigcup_{r \in D} U_r$ y entonces

$$0 \leq f(x) = \text{ínf}\{r \in D : x \in U_r\} \leq \frac{1}{2^n},$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $f(x) = 0$. Por lo tanto, $f(A) = \{0\}$.

Además, $f$ satisface las siguientes condiciones:

$$x \in cl^{\gamma}(U_r) \Rightarrow f(x) \leq r \tag{6}$$

y

$$x \notin U_s \Rightarrow f(x) \geq s. \tag{7}$$

En el primer caso, observe que es imposible que $x \in cl^{\gamma}(U_r)$ y $f(x) > r$. Puesto que $D$ es denso en $[0, 1]$, $(r, f(x)) \subseteq [0, 1] = \overline{D}$ y existe así $s \in D$ tal que $r < s < f(x)$. Ahora usando la condición (5), $cl^{\gamma}(U_r) \subseteq U_s$. Como $x \in cl^{\gamma}(U_r)$, entonces $x \in U_s$, para $s \in D$. Por lo tanto $x \in \bigcup_{t \in D} U_t$ y entonces

$$f(x) = \text{ínf}\{t \in D : x \in U_t\} \leq s.$$

De aquí se obtiene que $f(x) \leq s$, pero esto contradice el hecho de que $f(x) > s$.

En el segundo caso, $f(x) \neq 1$, porque $f(x) = 1$ implicaría $1 \leq s \in D$. Entonces

$$f(x) = \text{ínf}\{r \in D : x \in U_r\} < s,$$

usando la propiedad de aproximación al ínfimo existe $t \in \{r \in D : x \in U_r\}$ tal que $f(x) < t \leq s$. Luego, por la condición (5), se obtiene que $cl^{\gamma}(U_t) \subseteq U_s$. Ya que $x \in U_t \subseteq cl^{\gamma}(U_t)$, entonces se concluye que $x \in U_s$, pero esto contradice el hecho de que $x \notin U_s$.

Finalmente se prueba que $f : X \to [0,1]$ es una función $\gamma$-continua. Para tal fin se consideran los casos siguientes:

Caso 1. $f$ es $\gamma$-continua en el caso que $f(x) \in (a,1]$, con $0 \leq a < 1$: bajo estas condiciones, existe $r \in D$ tal que $a < r < f(x) \leq 1$. De esto se obtiene que $f(x)$ no es menor o igual a $r$. Usando la condición (6), $x \notin cl^{\gamma}(U_r)$. Sea $V = X - cl^{\gamma}(U_r)$, entonces $V$ es un conjunto $\gamma$-abierto que contiene a $x$. También $f(V) \subseteq (a,1]$, pués dado $y \in V = X - cl^{\gamma}(U_r)$, implica que $y \notin U_r$. Usando la condición (7), se obtiene que

$$a < r \leq f(y) \leq 1.$$

Caso 2. $f$ es $\gamma$-continua en el caso que $f(x) \in [0,b)$, con $0 \leq b < 1$: bajo estas condiciones, existe $s \in D$ tal que $0 \leq f(x) < s < b$. Así, $f(x)$ no es mayor o igual a $s$. Usando la condición (7), $x \in U_s$. Entonces $V = U_s$ es un conjunto $\gamma$-abierto que contiene a $x$ y además $f(V) \subseteq [0,b)$, pues si $y \in U_s$ implica $y \in cl^{\gamma}(U_s)$. Usando la condición (6), se obtiene que

$$0 \leq f(y) \leq s < b.$$

Caso 3. $f$ es $\gamma$-continua en el caso que $f(x) \in (a,b)$, con $0 \leq a < b \leq 1$: bajo estas condiciones, existe $r, s \in D$ tal que $a < r < f(x) < s < b$. Luego, usando las condiciones (6) y (7), se tiene que $x \in int(U_s)$ y $x \notin cl^{\gamma}(U_r)$. Por lo tanto, en virtud del Teorema 2.18, se tiene que

$$V = int(U_s) - cl^{\gamma}(U_r) = int(U_s) \cap (X - cl^{\gamma}(U_r)),$$

es un conjunto $\gamma$-abierto que contiene a $x$ y además $f(V) \subseteq (a,b)$, pues si $y \in V$, entonces $y \in U_s \subseteq cl^{\gamma}(U_s)$ y $y \notin cl^{\gamma}(U_r) \supseteq U_r$. Usando las condiciones (6) y (7), se tiene que

$$a < r \leq f(y) \leq s < b.$$

De los casos anteriores y usando el Teorema 3.4, se llega a la conclusión de que $f : X \to [0,1]$ es una función $\gamma$-continua.

(Necesidad) Observe que $[0,1/2)$ y $(1/2,1]$ son abiertos disjuntos en $[0,1]$. Puesto que $f$ es una función $\gamma$-continua, $U = f^{-1}([0,1/2))$ y $V = f^{-1}((1/2,1])$ son $\gamma$-abiertos en $X$. Observe, por hipótesis, dado $x \in A, f(x) = 0 \in [0,1/2)$ en consecuencia $x \in f^{-1}([0,1/2)) = U$, por lo tanto $A \subseteq U$. En una forma similar $B \subseteq V$. Se deduce que $X$ es un espacio $\gamma$-normal.

Como una inmediata consecuencia del resultado anterior se obtiene el siguiente,

**Corolario 3.6.** Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico y $\gamma : P(X) \to P(X)$ una aplicación que satisfaga las condiciones (1), (2) y (3). Entonces $X$ es un espacio $\gamma$-normal si y sólo si para cada par de subconjuntos $\gamma$-cerrados y disjuntos $A, B$ de $X$, existe una función $\gamma$-continua $f : X \to [a,b]$ tal que $f(A) = \{a\}$ y $f(B) = \{b\}$.

## Referencias

[1] Abd. El-Monsef M. E., El-Deeb S. N. y Mahmood R. A., *β-open sets and β-continuous mappings*, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ, 12 (1966), 77-90.

[2] Ahmad B. y Hussain S., *$\gamma_0$-compact, $\gamma^s$-regular and $\gamma^s$-normal spaces*, Canadian Jr. Pure Appl. Sci. 2 (2) (2008), 459-462.

[3] Ahmad B. y Hussain S., *γ-regular and γ-normal spaces*, Math. Today, 22 (1) (2006), 37-44.

[4] Ahmad B. y Hussain S., *$\gamma^*$-regular, $\gamma$-locally compact and $\gamma$-normal spaces*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 46 (2) (2008), 293-302.

[5] Andrijević D., *On b-open sets*, Mat. Vesnik, 48 (1996), 59-64.

[6] Basu C. K., Uzzal B. M. y Ghosh M. K., *A class of functions and separations axioms with respect to an operation*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 38 (2) (2009).

[7] Carpintero C., Hussain S., Rosas E., Salazar Y y Ramírez N., *$\gamma$-regularity and $\gamma$-normality via extended notions of $\gamma$-open sets due to Császár*, Creat. Math. Inform., 2 (21)(2012), 143-150.

[8] Carpintero C., Rosas E., Sanabria J., Salazar Y. y Ramírez N., *On weakly $\gamma$-normal spaces*, Tecnociencia, 2 (1)(2011), 37-41.

[9] Császár Á., *$\gamma$-compact spaces*, Acta Math. Hungar., 87 (1-2)(2000), 99-107.

[10] Császár Á., *Generalized open sets*, Acta Math. Hungar., 75(1997), 65-87.

[11] Kasahara S., *Operator-compact spaces*. Math. Japon., (1979), 97-105.

[12] Levine N., *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 36-41.

[13] Mashhour A. S, Abd. El-Monsef M. E. y El-Deeb S. N., *On precontinuous and weak precontinuous mappings*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53 (1982), 47-53.

[14] Njastad O., *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. 15 (1965), 961-970.

[15] Ogata H., *Operations on topological spaces and associated topology*, Math. Japon., 36 (1) (1991), 175-184.

[16] Tahiliani S., *Generalized $\beta$-closed functions*, Bull. Cal. Math. Soc., 98 (4) (2006), 367-376.

[17] Vadivel A.; Vijayalakshmi R. y Krishnaswamy D., *B-generalized regular and B-generalized normal spaces*, Inter. Math. Forum, 5(54)(2010),2699-2706.

Para citar este artículo: Carpintero C. et all, 2014, Üna Caracterización de la $\gamma$-normalidad a través de cierta clase de funciones”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en: http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.