Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. I , Nº 1, (2014)

Revista Del Programa De Matemáticas I (2014) 1–25

Los textos escolares y el error en matemáticas

Textbooks and mathematical errors

Walter O. Beyer K.[1]

[1]*Instituto Pedagógico de Caracas- Venezuela*
E-mail: nowarawb@gmail.com

Received / Recibido: 22/12/2013. Accepted / Aceptado: 15/04/2014

Resumen

El presente trabajo es un estudio acerca de los errores, malentendidos y obstáculos en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, enfatizando su presencia en los textos escolares. Sin entrar en una teorización profunda de las nociones de error y malentendido se definirán ambos, mostrando similitudes y diferencias entre ellos. Asimismo, se estudia el constructo obstáculo, poniendo atención a los obstáculos didácticos. Se presentan una serie de situaciones en las cuales aparecen errores, malentendidos y obstáculos. Se muestra la posibilidad de categorizar los errores, a cuyo fin se presentan varias clasificaciones. Se seleccionó un grupo de textos escolares usados en Venezuela y de ellos fue extraída una selección representativa de situaciones de aprendizaje, las cuales son analizadas a la luz de los elementos discutidos con anterioridad en el trabajo. Como resultado de la revisión de los textos se obtuvo un cúmulo de errores, fundamentalmente aquellos de tipo conceptual están presentes en ellos. En algunos temas, como el relacionado con las medidas, esto puede dar una explicación parcial de los deficientes resultados que muestran los estudiantes de ese país en este tema del currículum. Finalmente, se exponen algunas estrategias para enfrentar los errores y los malentendidos, alternativas que se distancian enormemente de la clásica penalización; así como se muestra también la posibilidad de construcción de situaciones didácticas partiendo de los errores, convirtiendo a éstos en una oportunidad para el aprendizaje.

Palabras claves: Errores en el aula, malentendidos, concepciones erróneas, obstáculos didácticos, errores en textos escolares.

Abstract

The present work is a study about errors, misunderstandings and obstacles in math's teaching and learning, emphasizing their presence in textbooks. Without going into a deep theorization of the notions of error and misunderstanding we define both, showing similarities and differences between them. Also, the construct obstacle is studied, paying attention to the didactical obstacles. A number of situations in which errors appear and misunderstandings and obstacles occur are presented. The possibility to categorize errors is shown, for which purpose several classifications are presented. A group of school textbooks used in Venezuela was selected and of them was extracted a representative selection of learning situations, which are analyzed in the light of the elements discussed above at that work. As a result of the revision of these texts a wealth of errors was obtained, fundamentally those of conceptual type are present in them. For some topics, such as the related to measures, this can give a partial explanation for the poor results that show students in the country on this curricular subject. Finally, some strategies are discussed to face the errors and misunderstandings, alternatives that are distanced greatly from classical penalty; and it also we show the possibility of construction of teaching situations starting from errors, turning them into an opportunity for learning.

Keywords: Errors in the classroom, misunderstandings, misconceptions, didactical obstacles, errors in textbooks

1. Introduction

Ya son un lugar común las constantes quejas en torno al bajo rendimiento en matemáticas por parte de los docentes, de los padres y aún de la sociedad en general. Pero, ¿Es acaso el bajo rendimiento, manifestado usualmente mediante las malas calificaciones de los alumnos, el único y el más acusante de los problemas que confronta la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuál es el nivel real de aquellos que aprueban la asignatura? ¿Manejan estos últimos realmente el aparato conceptual de la disciplina? ¿Cuáles son las fuentes de los errores y de las concepciones erróneas que manejan los estudiantes? ¿Cómo enfrentar estas situaciones?

Las respuestas posibles a estas y otras interrogantes son temas que han ocupado a los estudiosos de la problemática educativa, pueden ser diversas y aún admitir distintas interpretaciones; todo ello de acuerdo con las concepciones que de la educación, sobre la sociedad y acerca de la matemática tenga quien aborde los problemas antes planteados.

Una de las manifestaciones más palpables de los problemas que confronta una persona con su comprensión del conocimiento matemático tiene que ver con la aparición de lo que comúnmente se llaman errores. Estos se muestran o aparecen en diversos contextos: en las pruebas y exámenes; en los cuadernos de los alumnos; en estudios e investigaciones. Pero, en el aula los errores no están restringidos sólo a la actuación de los estudiantes: también los docentes los cometen y aún los libros de texto los tienen en abundancia. Podemos agregar que en los medios de comunicación masiva (TV, prensa, etc.) es altamente frecuente el encontrarnos con ellos. No escapan a ello los discursos de los políticos y aún las obras de los intelectuales.

Hay quienes se han propuesto recopilar errores presentes en el medio escolar, algunos con fines investigativos y otros con fines meramente divulgativos. En particular, varias obras escritas por docentes españoles se dedican a esto último. Así, Diez Jiménez (1970) recoge en su libro diversos errores a los cuales tuvo acceso mediante su labor docente. En otro libro del mismo tenor, Tapia Rodríguez (s/f), hay una nueva colección de errores producidos en la actividad escolar.

Por su lado, Claudi Alsina, destacado didacta de la matemática catalán, se decidió a recolectar una buena suma de errores matemáticos cometidos por individuos famosos de diferentes ámbitos, desde periodistas, pasando por políticos y hasta de reconocidos científicos, colección que dio lugar a su obra Asesinatos matemáticos (Alsina, 2010).

En el Prólogo de la obra (Alsina, 2010) se pregunta "¿Y quién comete estos errores?", a lo cual él se responde:

> Políticos, médicos, economistas, periodistas, técnicos, científicos, profesores, estudiantes, cocineros, ciudadanos de a pie... e incluso los propios matemáticos. Los disparates numéricos están presentes en todos los ámbitos de la vida, afectan a todos (como la gripe) sin distinción de clases... pues todos somos usuarios de las matemáticas.

Y para confirmar la afirmación anterior de Alsina veamos los siguientes casos.

El 7 de noviembre de 1940, en Tacoma (EE.UU.), el puente recién construido allí colapsó al poco tiempo de haber sido inaugurado debido a problemas en su diseño, a pesar de que su diseñador había sido Leon Moisseiff, un experto internacional en el tema. El puente colapsó debido a vibraciones inducidas por el viento: entró en resonancia, según se señala en muchos libros de física. Aunque, de acuerdo con el ingeniero Bertero (2002) "no fué, sin embargo, un caso de resonancia sino una consecuencia del fenómeno aeroelástico conocido posteriormente como flameo torsional"(p. 1). En todo caso hubo una falla en su diseño que ocasionó el desastre y tras la cual se encuentran las matemáticas.

Otro caso paradigmático lo constituye el hundimiento del RMS Titanic el 15 de abril de 1912, luego de colisionar con un iceberg. Este navío, calificado de ser imposible que alguna vez sufriera un percance que condujera a su hundimiento, sin embargo sucumbió en su primer viaje y todo parece apuntar a que hubo fallas en su diseño, lo cual causó a fin de cuentas el desastre con las lamentables pérdidas humanas. Nuevamente tras bambalinas están las matemáticas.

Más recientemente, el 23 de septiembre de 1999, la NASA sufrió la pérdida de la cápsula Mars Climate Orbiter, la cual debido a un error de navegación se estrelló en Marte. La causa indicada fue que un equipo usó unidades inglesas (e. g., pulgadas, pies y libras) mientras que otro equipo usó unidades métricas para una operación clave de la nave espacial con la consiguiente pérdida de varios millones de dólares invertidos en el proyecto.

2. El error en las aulas escolares: una primera aproximación

A pesar de lo antes señalado, pareciera ser que en las aulas de nuestros centros de estudios es en donde el error campea con su presencia. Allí, generalmente una vez cometido por el alumno es penalizado por el docente; mas cuando es cometido por el enseñante no es penalizado y muy rara vez es rectificado por éste.

En este trabajo miraremos ambas caras del asunto, pero enfatizaremos en los errores, malentendidos y obstáculos que genera el propio docente, bien sea en su clase o a través del material escrito, como es el caso de los libros.Para comenzar, de seguidas presentamos algunos errores cometidos por alumnos y recopilados por varios docentes, para luego abordar los errores que aparecen en los textos escolares.

Entre los errores que compiló Diez Jiménez (1970) están unos que aparecen bajo el subtítulo de Disparates anotados por otros compañeros; de éstos extraemos tres:

> "Medida de un ángulo.- Se mide con el kilómetro"(op. cit., p. 124). "Área del triángulo.- Es igual a la cuarta parte de la mitad de su lado por la semisuma de la raíz cuadrada de 3"(Ibíd.). "¿Qué es la hipotenusa? - Lo que está entre los dos paletos"(op. cit., p. 127).

Más adelante, en la misma obra y bajo un subtítulo similar, encontramos:

> "¿Qué es logaritmo? - logaritmo o silogismo es una hipérbola, pero menor"(op. cit., p. 139). "Ángulos opuestos por el vértice.- Son los que son iguales, pero desiguales"(Ibíd.).

El autor del texto del cual hemos tomado los extractos anteriores era profesor de ciencias naturales cuando hizo su recopilación. Al comienzo del libro, en el Prólogo a la primera edición, la cual data de 1965, presenta una catalogación de los errores encontrados, luego de realizar algunas reflexiones sobre la actividad docente basadas en su experiencia. Son de interés las palabras con que inicia el Prólogo de la edición consultada (la 3ª):

> Podría iniciar de un modo muy clásico este prólogo -comentario a la Antología del disparate- aludiendo a los sentimientos contrapuestos que en mí ha suscitado. Leído solo, o acompañado, la sarta de disparates se ensarta con las carcajadas del lector y de los oyentes. Cuando la risa cesa y la reflexión sobreviene, nos inunda la preocupación y hasta la tristeza, porque esos disparates provienen de exámenes y reválidas de nuestros alumnos presentes y futuros. (Diez Jiménez, 1970, p. 7)

Por su lado, en su libro Tapia Rodríguez (s/f) muestra expresiones similares a las anteriormente expuestas por Diez Jiménez (1970). A continuación se consideran algunas.

> "¿En qué consiste el Teorema de Pitágoras? En que los catetos saben sumar lo mismo que las hipotenusas"(Tapia Rodríguez, s/f, p. 37).
> "¿Cuáles son los números reales? Los que se pueden ver y tocar. [...] ¿Qué es un tetraedro? Cuatro triángulos equidistantes"(op. cit., p. 38).
> "¿Qué es la trigonometría? Es la parte de las matemáticas que sirve para medir los cuerpos tres veces"(op. cit., p. 39).
>
> "¿Cuáles son los números enteros? Los que no se fraccionan fácilmente"(op. cit., p. 41).

La muestra anterior de respuestas obtenida en España, pensamos, no sería muy distinta si hiciésemos en algún otro país una recopilación similar de las contestaciones proporcionadas por los estudiantes a preguntas semejantes a las que formularon los autores antes citados. Sirva la lista antes presentada como una motivación al tema que se pretende discutir aquí.

3. Los gazapos más allá de las aulas

En franco apoyo a lo expresado por Alsina (2010) podemos agregar algunas situaciones que hemos podido recopilar en diversos contextos. El primer caso se refiere al ámbito familiar en donde está involucrado un camión cisterna similar al que se muestra en la Figura (1)

Figura 1: Imagen de un camión con cisterna en forma (aproximada) de cilindro elíptico

Es el caso que se requirió conocer, con cierto nivel de exactitud, la capacidad de tal cisterna. Un ingeniero de cierta empresa, que había contratado el camión, insistía en calcular el volumen como si de un paralelepípedo se tratara: largo x ancho x altura. Este profesional desconocía absolutamente cómo calcular el volumen de un cilindro elíptico, para luego transformar esta cantidad en litros. Cometía en sus cálculos un error de alrededor del 21,5Un segundo caso, casi anecdótico, se refiere al tamaño de cierto caimán. El habitante de los llanos venezolanos es por tradición algo exagerado en muchas de sus apreciaciones, algunas vinculadas a mitos y creencias transmitidas oralmente. Así, existe en los llanos una conseja acerca de un caimán, que algunos sitúan en el río Apure y otros en el Arauca, según la cual dicho saurio tiene una enorme longevidad y una longitud desmesurada. Se le atribuye un largo de 10, 12 y hasta 30 metros. La primera referencia a este asunto se la escuchamos a un alumno nuestro que se formaba para ser profesor de matemáticas. La segunda oportunidad ello era parte de la conversación entre un señor mayor y un joven, siendo este último quien insistía en el monstruoso tamaño del animal. La tercera vez apareció la historia dentro de dos discursos políticos. Sin embargo, revisando los estudios biológicos se encuentra que, por ejemplo, el caimán del Orinoco llega a alcanzar una longitud máxima de 6-7 metros y esto en ejemplares muy longevos que es bastante difícil de encontrar por la caza indiscriminada a la que es sometida la especie.

Una nueva situación digna de ser referida aconteció el domingo 16 de octubre de 2011, en el programa televisivo Quién quiere ser millonario. A un concursante, con título de Licenciado en Administración, se le planteó la interrogante con las alternativas que se muestran en la Figura (2)

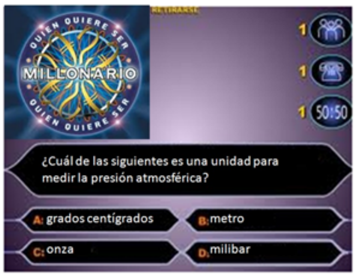

Figura 2: Pregunta y alternativas de respuesta en programa televisivo

El concursante no supo la respuesta y acudió al comodín vota la audiencia. La votación arrojó los siguientes resultados: 43 % seleccionó la alternativa A (grados centígrados); 11 % seleccionó las alternativas B o C (metro y onza); y el 46 % escogieron D (el milibar). Vale decir, el 54 % desconocía nuestro sistema de unidades de medida. Los casos presentados, conformados por situaciones no escolares, muestran a las claras un mal manejo de las matemáticas, muy asociado al analfabetismo numérico; pero también corroboran los resultados obtenidos en 1998 a través del Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (SINEA).

4. Errores, disparates, malentendidos y obstáculos: ¿Qué son?

Aunque no se centrará aquí la discusión en la teorización acerca de las distintas concepciones que sobre los errores han tenido educadores, filósofos, psicólogos y otros estudiosos, no obstante han de ser aclarados algunos puntos y es necesario hacer una ligera diferenciación entre errores y malentendidos.

Si se quisiera hacer un mínimo de análisis al tipo de respuestas erróneas, dadas por estudiantes, profesionales, políticos, etc., no basta simplemente catalogarlas todas como errores o como disparates o lograr un mecanismo clasificatorio de las mismas. Es necesario precisar un poco ciertos términos, amén de tratar de establecer su etiología, para en una subsiguiente etapa puedan considerarse los modos de enfrentar dichas circunstancias -cuando acontecen en el ámbito educativo- y cómo éstas pudiesen ser empleadas -en muchos casos- como punto de partida para establecer interesantes discusiones con los alumnos y diseñar apropiadas y novedosas situaciones de aprendizaje.

Gómez Alfonso (1995) expone que en la enseñanza tradicional, especialmente en la orientada por el conductismo, el error era algo sin interés para el acto educativo y que por lo tanto era ignorado; pero que los nuevos puntos de vista, especialmente aquellos de tipo constructivista le han dado relevancia, proponiendo que los errores deben ser analizados para diagnosticar las dificultades de los alumnos y poder remediarlas o pueden ser explotados para generar experiencias nuevas de enseñanza. Así, trabajos como el de Radatz (1979) van orientados en la primera dirección; mientras que investigaciones como la de Borasi (1986) se enfocan encaminadas hacia la segunda vía. El error puede ser apreciado desde distintas visiones: la filosófica, la psicológica, la didáctica, etc. Desde el punto de vista filosófico cabe incluso la pregunta: ¿Existe realmente el error?

Apelando al filósofo Ferrater Mora (1974) encontramos que de acuerdo con Zenón de Elea (490-430 a.C.), uno de los presocráticos,

> solamente puede hablarse del ser. Del no ser no puede enunciarse nada. Por lo tanto, el error es imposible. Una proposición que no sea verdadera no puede recibir el nombre de proposición; es, a lo sumo, un conjunto de signos carente de sentido [negrillas añadidas] (p. 139).

Otro punto de vista es el sostenido por Aristóteles. Así, para este pensador

> a veces nos equivocamos en la posición de los términos pero que también erramos en el juicio expresado sobre ellos. Como según

> Aristóteles nosotros vemos las cosas particulares por medio del conocimiento de lo general el error es posible sin excluir el conocimiento, pues el conocimiento se refiere a lo general, en tanto que el error alcanza lo particular [negrillas añadidas] (op. cit., pp. 139-140).

Tomemos como punto de partida la existencia del error aseverada en la manida frase *Errare humanum est*, colocada en el epígrafe del presente trabajo.

Vayamos primero a la definición de diccionario. Según el Larousse (1982) “error.es “equivocación”, y tiene como sinónimos: “descuido, inexactitud, errata, falta, lapsus, yerro, aberración.”Mientras que “malentendido.es un “equívoco, mala interpretación, mal entendimiento, incomprensión.”Por otra parte, un “disparate.es un “hecho o dicho disparatado [vale decir, contrario a la razón].”También significa “contrasentido y desatino”. Popularmente se usan los vocablos gazapo y pifia como sinónimos de error. A su vez, un obstáculo es un “impedimento”, siendo sinónimos “barrera”, “dique”, “freno”, “valla”, entre otros. Por su lado Vallota (1994) expresa que “hemos de reconocer que el error es un hecho. ¿Cómo se explica el error? ¿Cómo se justifica? ¿Cómo se lo distingue? ¿Cómo se lo evita, si es evitable? Estos son los temas que Descartes desarrolla en la Meditación IV”(p. 110).

Profundizando un poco más en la idea cartesiana sobre el error, Vallota (1994) señala que “La posibilidad de error se puede clarificar como un problema epistemológico-psicológico, ubicado en el plano humano”(p. 119). Agrega que dentro de la concepción cartesiana “el error es algo diferente a la ignorancia, el error es una privación. Privación es ausencia de algo, pero de algo que debería estar”(op. cit., p. 123). Asimismo, “pensar el error como privación significa no solamente que para superarlo hay que llenar un vacío, lo que sería eliminar la ignorancia, sino que hay que sustituir, corregir, rectificar”(op. cit., p. 124). Estas reflexiones de Vallota (1994), aunque expuestas en el campo de la filosofía tienen -si se asume este punto de vista cartesiano- enormes implicaciones para la didáctica.

En el campo educativo los errores están asociados básicamente con la obtención de respuestas incorrectas a una cuestión dada o a la aplicación de métodos inapropiados para la solución de un problema. No obstante, pudieran asociarse también a la comprensión incompleta o imprecisa de un concepto o noción matemática.

A los didactas les ha llamado poderosamente la atención la consistencia con que algunos estudiantes aplican ciertos procedimientos incorrectos, así como la regularidad en la aparición en diferentes poblaciones de ciertos errores. Algunas de estas regularidades son expuestas por Smith (1981). Un ejemplo del primer caso es el siguiente. Una alumna considera que la figura de la izquierda tiene 0 diagonales, mientras que la de la derecha (la cual es simplemente una rotación de la primera) posee 4. Esta alumna tiene una confusión entre el concepto de diagonal y el de línea oblicua. Sin embargo, ella consistentemente aplica su concepción errónea.

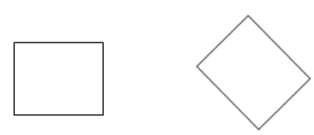

Figura 3: Un rectángulo y rotación del mismo un cierto ángulo

La situación descrita es una simplificación de un caso de estudio reportado por Pimm (1990). En lo que se refiere a errores que regularmente aparecen en poblaciones disímiles están los casos en que los alumnos escriben $(a+b)^2 = a2 + b2$, omitiendo el término $2ab$ en el desarrollo del cuadrado o colocan $Log(ab) = (Loga)(Logb)$, seleccionando una operación incorrecta en el lado derecho de la igualdad o escribir $sen(x+y) = sen(x) + sen(y)$. Forman parte de una familia de errores. Y son considerados por algunos como errores sistemáticos. Estos errores los denomina Maron (1979) la ley distributiva universal de los estudiantes.

Estas situaciones son producto de diversos factores, entre los cuales están el excesivo uso (¿abuso?) de la linealidad, la descontextualización con la que se enseñan las funciones (logarítmicas, trigonométricas,...), la falta de significado matemático de la simbología empleada, por sólo citar los más resaltantes. Sobre el tema de los errores Brousseau (1994) expresa que:

> La epistemología genética ha ofrecido en ese sentido los argumentos más serios y más cercanos al conocimiento, pero otros trabajos son necesarios para utilizar sus aportes. Frecuentemente, los errores del alumno son interpretados por el docente como una incapacidad para razonar en general o, al menos como un error de lógica: en un contrato didáctico amplio, el docente se hace cargo de las representaciones, del sentido de los conocimientos. Pero, en condiciones más estrictas, simplemente es llevado a señalar dónde la respuesta del alumno se contradice con los saberes anteriores, evitando con cuidado todo diagnóstico sobre las causas del error. Éste, reducido a su aspecto más formal, tiende a convertirse ya sea en un "error de lógica "su razonamiento es incorrecto o en la ignorancia de un teorema o de una definición. (pp. 84-85)

Notamos aquí que el papel del error en el aula forma parte intrínseca del contrato didáctico. Contrariamente a algunas de las ideas antes expuestas los didactas adscritos a la corriente denominada Didáctica Fundamental, Brousseau entre ellos, han partido de la noción de obstáculo de Bachelard y la han incorporado al campo de la didáctica. También aquí notamos la génesis de una idea didáctica partiendo del campo filosófico. Si se adopta como herramienta de análisis el modelar el sistema didáctico mediante los constructos aportados por la Didáctica Fundamental, hay que apelar a la noción de obstáculo en lugar de considerar la idea de error tal como es tomada por otras corrientes de la Educación. Un tratamiento profundo de esta noción se encuentra en Astolfi (1999). Aquí sólo presentamos algunas ideas de carácter general acerca de dicha noción.

Siguiendo a Godino (1991) tenemos que

> un "obstáculo" es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar concepciones y para ayudarles en conseguirlo (p. 134).

Continúa diciendo Godino (op. cit.): "observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores pueden ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución [negrillas añadidas]"(p. 135). La Didáctica Fundamental postula la existencia de diversos obstáculos:

- Ontogenéticos: son debidos a las características del desarrollo del niño.
- Didácticos: resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.
- Epistemológicos: intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Se puede evidenciar por medio de un análisis histórico que tal tipo de obstáculo debe ser considerado como parte del significado del concepto.

La idea de obstáculo epistemológico es tomada del filósofo Gastón Bachelard, quien en su obra La formación del espíritu científico plantea esta noción como la explicación para la aparición inevitable de algunos errores.

5. El caso de un verdadero disparate (en un texto escolar)

A título de ejemplo, y como preámbulo para una discusión más detallada en el presente trabajo de las incorrecciones en las obras escolares, mostramos a continuación la digitalización de dos páginas de un manual escolar (Rodríguez, 1987, pp. 133 y 135). Se trata de un texto para el 4ºGrado de Educación Básica. El tema tratado "Medidas de longitud" (Capítulo 17).

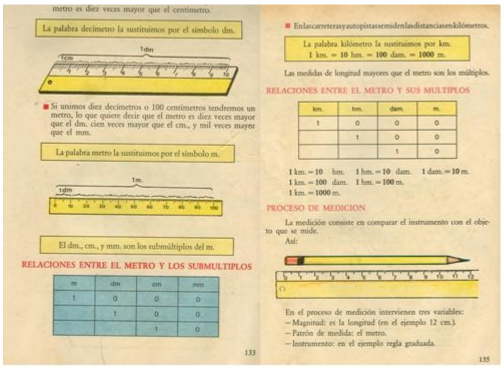

Figura 4: Dos páginas de un texto escolar de Rodríguez (1987)

Como se puede apreciar en la Figura 4, en la parte inferior de la página 133 se coloca un cuadro de equivalencias ("Relaciones entre el metro y los submúltiplos"), según el cual, en la fila 1 se lee que a 1 metro le corresponden 0 decímetros, 0 centímetros y 0 milímetros: a todas luces un absurdo. Si leemos las siguientes filas no obtenemos mejor resultado. En la página 135, nuevamente aparece un cuadro. Esta vez para las "Relaciones del metro y sus múltiplos". Aquí, si leemos en la primera fila se tiene que 1 kilómetro son cero hectómetros; equivale a cero decámetros y a cero metros. Las siguientes filas siguen el mismo patrón. ¿Qué pensar al respecto? De manera optimista pudiera creerse que se trata de un error tipográfico. ¡Pero no! En el resto de los cuadros que se presentan, incluso para otras unidades de medida en capítulos subsiguientes -como las de peso- se sigue haciendo exactamente lo mismo. Pero, en la página 134, en sus primeras líneas, se señala que:

$$1m. = 10dm.$$
$$1dm. = 10cm.$$
$$1cm. = 10mm.$$
$$1m. = 100cm.$$
$$1dm. = 100mm.$$
$$1m. = 1000mm.$$

(op. cit., p. 134)

Algo similar puede apreciarse en la página 135, justo debajo de la tabla. Es decir, en la tabla (p. 133) se lee que 1 metro son 0 decímetros, 0 centímetros y 0 milímetros; y de seguidas nos dicen que 1 metro es igual a 10 decímetros; igual a 100 centímetros y a 1000 milímetros.

¿Alguna semejanza con el alumno español que responde que los ángulos opuestos por el vértice "son los que son iguales, pero desiguales"? Evidentemente ninguna. **¡Un disparate, pero dentro de un libro de texto!** Para colmo de males, en la página 138 se propone la siguiente actividad:

6 Completa:

	dm.	cm.	mm.
3 m.			
18 m			
37 m.			
50 m.			

Es inmediato preguntarse: ¿Qué alumno podría bajo estas circunstancias tener una comprensión de este tema? ¿Qué puede hacer un docente si un alumno llena la tabla propuesta en la Actividad con puros ceros? El estudio de los aspectos vinculaos a la medida es uno en los que se manifiesta a las claras la forma atropellada en que se enseñan muchos tópicos matemáticos. Y es por ello que muchos ejemplos aquí presentados tienen que ver con esta temática; y, además, en estudios realizados (como el del SINEA) resalta por el bajo nivel de logro. A pesar del discurso teórico que podemos encontrar en los documentos curriculares, bien sea de tipo cognitivista o bien sea de tipo constructivista o ecléctico, el método de enseñanza empleado tradicionalmente en este tópico se reduce a seguir un procedimiento mecánico, muchas veces representado mediante una escalera, por la que se asciende o desciende, y de acuerdo al caso se divide o multiplica.

6. Las representaciones prototípicas y los malentendidos

De seguidas se le dará un poco más de precisión a la noción de malentendido para que queden indicadas de manera clara sus diferencias con respecto a la noción de error, y a la vez las interrelaciones entre ambas. Una fuente notable de malentendidos -desde nuestra óptica- lo constituyen las gráficas y algunos otros tipos de representaciones que Beyer (2006) denomina prototípicas. También coincidimos con Adda (1987) quien señala que la fuerte imbricación entre significante y significado es una fuente de errores los cuales "nacen de malentendidos entre el maestro y el alumno provocados por los efectos parásitos de la comunicación didáctica en la enseñanza de las ás" (p. 1). Un ejemplo de lo afirmado por Adda (1987) lo encontramos en un alumno que entendía "máximo como un divisor" en lugar de "máximo común divisor". Esta situación me fue reportada por la Dra. Lelis Páez (comunicación personal, marzo de 1994). En otra oportunidad otro profesor nos hizo similar comentario de otro alumno que le ocurrió exactamente esto mismo. Es decir, la confusión no es infrecuente. El hecho se debía a una dicción deficiente del docente, aunado esto a que el mismo mencionaba la expresión en forma oral pero no la colocaba en forma escrita. Pasemos a estudiar un poco las representaciones prototípicas, los posibles malentendidos que pueden surgir como consecuencia de ellas y sus potenciales efectos. Así, por ejemplo, en la Figura 5 que mostramos a continuación aparecen dos triángulos.

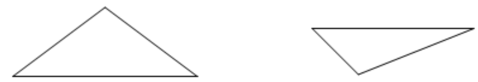

Figura 5: Dos representaciones de triángulos en distintas posiciones

Una representación como la del lado izquierdo es la que se muestra usualmente en los textos escolares. Muy infrecuente es la aparición de la representación del lado derecho en los libros de estudio de los alumnos. La del lado izquierdo es la representación prototípica. ¿Qué problemas puede generar (¿genera?) la representación prototípica de los triángulos? En primer lugar, puede fijar (¿fija?) en el alumno la idea equivocada (un malentendido) de que siempre los triángulos se apoyan en una de sus bases y que ésta está situada de manera horizontal. Esto hace que para muchos alumnos la representación del lado derecho no corresponda a un triángulo. El alumno va interiorizando, de manera equivocada, que una propiedad intrínseca de los triángulos es estar en esa posición y no en otra como la del lado derecho. En segundo lugar, en la generalidad de los casos los autores de textos escolares optan por colocar o bien triángulos rectángulos, o bien triángulos isósceles y hasta equiláteros. Nuevamente se agregan características que corresponden a triángulos particulares como si fuesen parte integrante de la noción general de triángulo. En tercer término, los triángulos se representan en la inmensa mayoría de los casos sin relleno. Entonces, ¿cuál es el sentido de la noción de área para tal figura? ¿Por qué sí diferenciamos la circunferencia del círculo rellenando este último y por qué no hacemos lo mismo entre el borde del triángulo y la región encerrada por ese borde? Por si se abriga alguna duda de que esto ocurre, mostramos a continuación varios extractos de textos suficientemente representativos de las observaciones antes formuladas. Comencemos con un extracto sobre el tema Teorema de Pitágoras tomado de Amelii y Lemmo (1994, p. 234), autores cuyos libros han tenido un uso relativamente extendido.

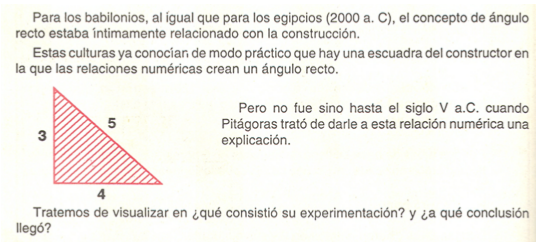

Figura 6: Extracto de Amelii y Lemmo (1994), p. 234

Como se puede observar, el triángulo mostrado posee una base horizontal, aunque en este caso se rellena no es lo usual en este texto. Sin embargo, ya en la siguiente página (y salvo en un anexo de ésta, en todas las páginas siguientes) los triángulos aparecen con la línea base horizontal, pero sin relleno. Justamente, este texto escolar usa casi exclusivamente representaciones prototípicas para los triángulos. Veamos otro ejemplo de lo que presentan Ameli y Lemmo (op. cit., p. 235):

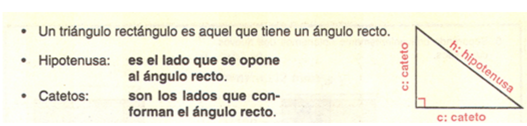

Figura 7: Extracto de Amelii y Lemmo (1994), p. 235

Pasemos a otro texto, el de Flores de Tovar y otros (1988, pp. 146 y 148).

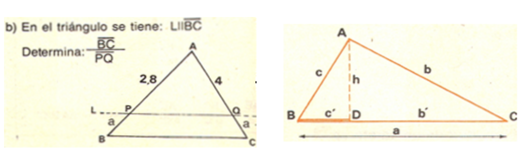

Figura 8: Extracto de Flores de Tovar y otros (1988), pp. 146 y 148

Nuevamente, como en el caso del texto precitado, prevalecen las representaciones prototípicas, tanto en la posición del triángulo como en la ausencia de relleno. Aunque en descargo de estos autores ellos presentan algunos (muy pocos) triángulos en posición no prototípica, pero sin relleno. Una situación similar se presenta en ás superiores con la noción de asíntota. La representación prototípica adoptada por los libros corresponde generalmente a la consideración de representaciones gráficas de hipérbolas, caso en el cual la recta y la curva de la cual ésta es asíntota nunca se cortan. Pero, esto no es parte de la noción de asíntota. Para comprobarlo basta el siguiente ejemplo.

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

La representación gráfica de la función y su respectiva asíntota horizontal se muestran a continuación:

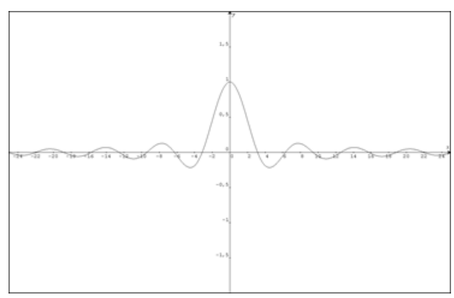

Figura 9: Representación gráfica de una función cuya asíntota la corta infinitas veces

Como puede observarse, no sólo la curva y su asíntota se cortan, ¡sino que lo hacen infinitas veces! Puede apreciarse en las situaciones antes planteadas que, estrictamente hablando, no existe en ellas un error matemático como tal. Así, cuando un autor de texto está trabajando el tema de triángulos y los representa en forma prototípica no existe ninguna incorrección á propiamente dicha; pero, sí está generando en el alumno un patrón de representación que éste interpreta equivocadamente como el patrón general de representación de dichos objetos: he ahí el malentendido. Y de allí al error, hay sólo un paso. Análogamente ocurre con la situación planteada referida a las asíntotas: las representaciones prototípicas generan en muchos casos malentendidos, y éstos dan frecuentemente paso al error. Otro caso de mal entendido se genera con el cero. Algunos autores de texto y algunos docentes lo incluyen en el conjunto de los números naturales; mientras que otros lo excluyen, todo ello sin explicación alguna. El problema se genera cuando un alumno en un año escolar se le enseña de una de estas maneras y en el siguiente de otra.

7. Cuando es el docente el que se equivoca: ¿Quién repara el error?

Una profesora en servicio, formada como docente en ás y con postgrado en su especialidad, a la cual tuvimos la oportunidad de observarle su clase, para demostrar que la función definida por $f(x) = 2x$ es creciente razonaba así:

$$-1 < 0 \Rightarrow 2(-1) = -2 < 2(0) = 0$$
$$1 < 2 \Rightarrow 2(1) = 2 < 2(2) = 4$$
$$2 < 3 \Rightarrow 2(2) = 4 < 2(3) = 6$$

Entonces, como cuando $x < y$, se tiene $f(x) < f(y)$, la función es creciente.
En guías elaboradas por la misma docente ella reincide en este procedimiento. Si bien es cierto que la función trabajada es creciente, la demostración que se pretende hacer de ello no es tal. Sólo ha verificado para unos pocos casos que si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.

La situación planteada guarda un interés particular, por cuanto una de las competencias importantes dentro del campo de la á consiste en ser capaz de realizar demostraciones. Pero, por otra parte, un precepto básico en las demostraciones es que los casos particulares de validez de una proposición á no son suficientes para garantizar la validez de ésta en general, y ello obliga a la realización de una prueba con cierto nivel de formalidad, la cual es variable de acuerdo con el nivel educativo en el cual se esté. La docente muestra que la propiedad que se quiere demostrar es válida para los casos expuestos: ergo lo realizado por ella no es una demostración, sino una verificación de algunos casos.

Como la docente hace pasar esta verificación como si fuese una demostración, estamos ante la presencia de un grave error metodológico. Los alumnos tendrán una idea errónea de lo que es una demostración, la cual se verá potenciada ante experiencias similares con otros docentes y con libros de texto que hagan lo mismo. Lamentable y difícilmente este error es reparado alguna vez, más aún cuando los alumnos son rara vez expuestos a la experiencia de tener que demostrar como consecuencia de los procedimientos memorísticos y algorítmicos a los cuales son sometidos casi todo el tiempo.

8. Algunos resultados reportados por el estudio del SINEA

En general, el común de la población tiene escasas nociones acerca de las medidas, y en las pruebas aplicadas por el SINEA fue justamente este tópico el que salió peor librado. En SINEA (1998a) se reporta, en las Conclusiones, que

> en relación con el tópico de Medida, en ambas pruebas, los alumnos se encuentran también en el nivel de No Logro. El análisis de las respuestas pone en evidencia que no han adquirido los conocimientos, ni disponen de las herramientas mínimas para establecer relaciones entre múltiplos y submúltiplos, de cada una de las unidades de medida contempladas en los programas oficiales (p. 148).

Esto es lo que se obtuvo al realizar el estudio para la Primera Etapa de la Escuela Básica (Primeros tres años de escolaridad). Si vamos al segundo corte, en 6^{o}Grado que marca el final de la Segunda Etapa, los resultados no son más alentadores. Se señala en SINEA (1998b) que "en los tópicos Medida y Organización y Representación de Datos, el mayor porcentaje en todos los Estados se ubicó en el nivel de No Logro." (p. 29) Se agrega que

> en relación con el tópico de Medida, los alumnos se encuentran también en el nivel de No Logro. El análisis de las respuestas pone en evidencia que no han adquirido los conocimientos, ni disponen de las herramientas mínimas para establecer relaciones entre múltiplos y submúltiplos, de cada una de las unidades de medida contempladas en los programas oficiales (p. 139).

Es decir, se arriba exactamente a la misma conclusión que en el informe anterior; y esto ¡para alumnos con tres años más de escolaridad! En conclusión: los alumnos en su gran mayoría son incapaces de resolver problemas sencillos de conversión. Tomemos dos ejemplos de cada uno de los informes del SINEA antes citados.

1. "Rosa compró dos metros de tela roja y medio metro de tela azul, ¿cuántos medios metros de tela compró?" (SINEA, 1998a, p. 103)

2. "Luis recorre 29 kilómetros para ir al trabajo. ¿Cuántos metros recorre Luis?" (SINEA, 1998a, p. 104)

3. "La hacienda del abuelo de Ana mide 2 hectáreas y media. ¿Cuánto mide la hacienda en metros cuadrados?" (SINEA, 1998b, p. 131)

4. "¿Cuántos metros hay de la Escuela a la casa de Pedro, si la distancia es de 12,3 km?" (SINEA, 1998b, p.132).

Entre las dificultades detectadas se señalan: Para la pregunta 1) "la equivalencia entre metro y medio metro" (SINEA, 1998a, p. 103). Para la pregunta 2), "desconocen la relación entre el kilómetro y el metro. Desconocen que un kilómetro es mayor que un metro" (op. cit., p. 104). Para la pregunta 3) "la aplicación de la equivalencia entre hectárea y metro cuadrado." (SINEA, 1998b, p. 131) Para la pregunta 4) "el manejo de la equivalencia entre el metro y el kilómetro" (op. cit., p. 132). Como puede apreciarse las dificultades señaladas para la correcta solución de los problemas propuestos son esencialmente las mismas. Si nos ubicamos cuantitativamente, los resultados para dichas preguntas son:

PREGUNTA	% DE RESPUESTAS CORRECTAS	% DE RESPUESTAS INCORRECTAS
1	32,2	67,8
2	44,7	55,3
3	30,8	69,2
4	29,7	70,3

Fuente: SINEA (1998a, 1998b)

Es destacable que, desde el punto de vista cuantitativo, los resultados del segundo informe sean peores que los del primero. Creemos que los datos son elocuentes con respecto a lo que se está planteando. Adicionalmente al reporte del SINEA hay varios interesantes estudios realizados por educadores matemáticos venezolanos como los de Solís de Cabello (1982), Cardelle Elawar y Ruiz Bolívar (1983), Páez (1986), Andonegui (1992) que aportan al análisis de esta temática.

9. Errores y malentendidos (revisitados): Una precisión necesaria

Ya en las páginas precedentes se han hecho diversos señalamientos en torno a las incorrecciones que pueden ser encontrados en el uso de las matemáticas en ámbitos muy diversos que abarcan desde el ciudadano común hasta llegar a individuos formados en áreas científico-tecnológicas. Esto conduce irremisiblemente a formularse las siguientes interrogantes: ¿Cuándo ocurre un error en matemáticas? ¿Cuándo ocurre un malentendido? ¿Por qué ocurre el error? ¿Qué importancia le podemos atribuir a los errores? Como ha podido apreciarse, dentro del universo de las incorrecciones existe una gama bastante extensa. ésta va desde el caso en el cual un alumno escribe 4-7 = 3, omitiendo el signo menos en la respuesta y proporcionando, por ende, un resultado incorrecto; hasta la aparición de expresiones como 3x = 6 = x = 2 en donde la persona emplea de manera incorrecta el segundo signo de igualdad, sustituyendo con él la implicación que debería ligar la expresión 3x = 6 con la expresión x = 2, luego de realizada la operación de dividir ambos lados de la primera igualdad por 3. En este ejemplo se nota una pérdida total de sentido para el signo de igualdad, así como de la propiedad transitiva que posee esta relación. Este tipo de situación la hemos visto repetidas veces: en un comercial de TV de una cadena de ropa; en un juego didáctico presentado en un congreso educativo en la Universidad Central de Venezuela en 2012 y reiteradamente en un antiguo libro de Aritmética Comercial (Iradi, 1874).

En la situación en la cual falta el signo menos precediendo al número 3 la respuesta incorrecta podría haber sido originada por un simple "descuido" (por una distracción o por cansancio) de la persona al resolver la operación; pero, también podría ser el no haber aprendido la suma de números enteros o un conocimiento deficiente de ésta. Con la sola observación de la respuesta escrita en el papel o en la pizarra no se puede discriminar si se trata de un desconocimiento del procedimiento o esto es producto de una omisión involuntaria. La segunda situación presentada ocurre con mucha frecuencia. A todas luces estamos ante un error. Este es un caso en el cual el error no es de fácil erradicación, más aún por la circunstancia de que el resultado obtenido al final (x = 2) es la solución de la ecuación dada inicialmente.

Las dos situaciones antes planteadas permiten hacer ver que el docente debe tomar actitudes diversas ante los resultados, procedimientos y/o demostraciones erróneas proporcionadas por los estudiantes. Además, es necesario hacer una primera distinción entre las fallas de tipo operativo y aquellas cuyo origen está en una pobre adquisición de conceptos y propiedades. Ambas, en principio, son cualitativamente distintas. Así, por ejemplo, retomando la situación reportada por Pimm (1990), ésta se corresponde con una confusión entre dos conceptos matemáticos: el de diagonal y el de línea oblicua. Es importante destacar aquí que la niña en cuestión era absolutamente consistente en sus respuestas al emplear la noción que ella suponía era la de diagonal, lo cual fue determinado por el investigador que reporta el caso. Este tipo de errores se suscita como consecuencia de un modelo de enseñanza-aprendizaje pobre, de tipo memorístico y centrado en lo operativo, con poca atención hacia lo conceptual. No se discuten a fondo los conceptos, discusión que debería estar acompañada de ejemplos y contraejemplos para una mejor comprensión de los alumnos.

Las anteriores situaciones conforman ejemplos de lo que en el presente trabajo está catalogado como error. Por otro lado, retomado la situación reportada por Páez (comunicación personal, marzo de 1994), ésta es un caso típico de lo que catalogamos (siguiendo a Adda, 1987) como un malentendido. Por una o diversas causas posibles (mala dicción del profesor, exceso de ruido, distracción del estudiante, mala audición del alumno, o alguna combinación de las anteriores) el alumno entiende que el docente dice "máximo como un divisor" en lugar de "máximo común divisor". El elemento trascendente tiene que ver con la predominancia del lenguaje oral por sobre el escrito en nuestros salones de clase, por lo cual el alumno a lo mejor nunca había visto escrita la expresión "máximo común divisor". Por ejemplo, en Beyer (2003, 2006) se analiza con más detalle esta situación. Esto último nos indica que también debemos distinguir entre las categorías error y malentendido.

Pero, un asunto más de fondo es el que trata con la etiología del error; vale decir el estudio de las causas que los originan. Esto conduce indefectiblemente a realizar investigaciones profundas cuyos resultados permitan subsanar los errores y a la vez profundizar en el conocimiento matemático de nuestros alumnos. Ello a su vez conduce a atribuirle a los errores una importancia didáctica que, entre otras cosas, conduzca a diseñar interesantes y novedosas situaciones de aprendizaje para los estudiantes. Por supuesto que la ocurrencia del error y su etiología pueden ser analizadas de diversas maneras, dependiendo del lente teórico que se emplee para ello. Sin embargo, un primer paso para su estudio es establecer una taxonomía de los mismos.

10. Algunos comentarios acerca de la clasificación de errores

¿Tendrán todos los errores las mismas características o es posible categorizarlos? Al respecto podemos señalar que existen muchas clasificaciones posibles para categorizar los errores. Ya se ha señalado al inicio de este artículo que Diez Jiménez (1970) realiza un procedimiento empírico, no muy técnico, para catalogar los errores que recopila. Una categorización interesante, desde la óptica de la Teoría del Procesamiento de la Información, es la que nos presenta Radatz (1979, p. 168). Las categorías que nos proporciona este autor son las siguientes:

- Errores debidos a dificultades del lenguaje.
- Errores debidos a dificultades en obtener información espacial.
- Errores debidos a la deficiente maestría con herramientas, hechos y conceptos los cuales son pre-requisito para un conocimiento dado.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

El autor pudo detectar en innumerables ocasiones en cursos de probabilidad y estadística las dificultades que presentaban los alumnos con expresiones típicas de esta área de las matemáticas como "al menos", "a lo sumo", en problemas con enunciado verbal. Corresponden estos, pues, a la categoría Errores debidos a dificultades del lenguaje. De la misma índole son aquellos que ocurren por mala interpretación de la simbología como es el caso del mal uso de los cuantificadores por falta de comprensión de los mismos. Otra clasificación es la propuesta por Movshovitz-Hadar y otros (1987). Las categorías que proponen son:

- Datos mal usados.
- Lenguaje mal interpretado.
- Inferencia lógicamente inválida.
- Teorema o definición distorsionada.
- Solución no verificada.
- Error técnico.

Así, por ejemplo, si un alumno al resolver un problema sobre rectángulos en el cual no se indique el tipo de rectángulo y asuma sin ninguna base que éste es de una clase particular (rectángulo, equilátero, isósceles, etc.) cae en el caso de Datos mal utilizados; mientras que el caso de la niña que confunde diagonal con línea oblicua corresponde, de acuerdo con esta clasificación, a una definición distorsionada.

En opinión de Rico (1995) esta última categorización se funda más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Por su lado, Gómez Alfonso (1995) centra más la atención en clasificar los procedimientos erróneos que los propios errores que cometen los alumnos al realizar cálculos mentales, lo cual le conduce a considerar:

- Extrapolaciones: consiste esto en extraer pasos de un método válidos dentro de un contexto e insertarlos dentro de otro método en el cual no funcionan.
- Generalizaciones: Extensiones de métodos completos a situaciones para las cuales no funcionan.
- Centramientos: Interferencias que le ocurren al resolutor en un paso o resultado intermedio y que desvían el proceso del camino correcto.

Si nos enfocamos por la visión de la Didáctica Fundamental habría que considerar la idea de obstáculo con sus tres tipos: ontogenéticos, didácticos y epistemológicos, a los cuales ya aludimos con anterioridad en el presente escrito.

11. La presencia del error en los textos escolares de matemáticas

Si examinamos los textos escolares de matemáticas es posible que nos encontremos muchas sorpresas. Una de ellas es hallar en muchos de ellos un buen número de errores, algunos de los cuales incluso son de tipo conceptual. Muchos más son los malentendidos; y mayor aún son las deficiencias didácticas presentes en una buena cantidad de textos en uso en las aulas venezolanas. A continuación se mostrará una selección de algunos de ellos.

CASO 1:

Consideremos en primer término la conocida Aritmética de Baldor. En la sección numerada 579 (Baldor, 1940, p. 495; Baldor, 1955, p. 536; Baldor, s/f, p. 436) al resolver un problema sobre densidades se escribe como respuesta: $\frac{4{,}74Kgs}{0{,}79Kgs} = 6ls.$, capacidad de la vasija.

Se comete, pues, un error en la manipulación de las unidades de medida. Como puede apreciarse, si se dividieran dos cantidades expresadas en la misma unidad de medida, la cantidad resultante sería adimensional. El error radica en este caso que ya desde el inicio de la solución se escribía la densidad sin unidades ("Siendo la densidad del alcohol 0,79") y luego se magnifica el error al hacer la división antes señalada.

En la sección Ejercicio 272 el enunciado 36 reza así: "¿Qué velocidad es mayor, 50 millas por hora u 80 Kms. por hora?" (Baldor, 1940, pp. 507 y 740; Baldor, 1955, p. 551; Baldor, s/f, p. 447) En ambas ediciones se da por respuesta "50 mill." Lo cual es incorrecto ya que la milla no es una unidad de velocidad.

Un hecho que llama poderosamente la atención es que estos errores han permanecido en el tiempo a través de las diversas ediciones de la obra como ha podido constatarse revisando tres ediciones de la misma.

CASO 2:

Tomemos un libro de fines de la década de los 50. Aunque, en general, la obra tiene pocos errores no está exenta de ellos. En el libro se plantea la siguiente situación:

"Un barco recorre 8 millas y 8 nudos y otro 6 millas y 14 nudos. ¿Cuál es la distancia recorrida entre los dos?" (Pascual Rodríguez, 1957, p. 26).

La incorrección está en el mal empleo de las unidades por cuanto un nudo es una unidad de velocidad (representa una milla náutica por hora, vale decir 1852 metros por hora), mientras que la milla es una unidad de distancia. Esto convierte al problema en irresoluble.

CASO 3:

Tomemos por ejemplo un libro muy empleado en la educación venezolana, el de Mendiola (1982). En dicha obra, escrita para la Educación Media (Ciclo Básico), se encuentra la siguiente definición:

"FUNCIóN INYECTIVA A elementos diferentes del dominio le corresponden imágenes diferentes en el rango.

$$Rango(f) \subset B \quad (op.cit, p, 144).$$

Aquí B representa el conjunto de llegada. Si se analiza la definición proporcionada, se nota que la afirmación Rgo f B no es un equivalente simbólico de lo dicho en palabras en las líneas precedentes. Además, la inclusión del rango en el conjunto de llegada B siempre ocurre, es una propiedad que cumplen todas las funciones, y no una propiedad diferenciadora entre una función arbitraria y una que sea inyectiva. En consecuencia, la definición dada en el texto es errónea. Así, por ejemplo, la función definida por f(x)=sen(x), considerada de R en R cumple con lo señalado en el recuadro, pero evidentemente no es inyectiva.

En otra de sus obras (Mendiola, 1991) se reitera la misma situación: ¿Qué puede decirse? Si empleamos la categorización de Movshovitz-Hadar y otros (1987) estamos en presencia de la categoría *Teorema o definición distorsionada.*

CASO 4:

A continuación copiamos textualmente el siguiente desarrollo, tomado de un texto elaborado por Rincón y Gómez (1994):

$$\boxed{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}x3 = \frac{3x3}{4x3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{3}x4 = \frac{2x4}{3x4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{9}{12}+\frac{8}{12} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$$

Figura 10: Extracto de la página 129 de Rincón y Gómez

¿Qué podemos detectar aquí? ¿Qué consecuencias didácticas puede acarrear esta situación? Observamos que la actividad planteada es una suma de fracciones con distinto denominador. Los autores realizan un proceso mediante el cual se pretende amplificar ambas fracciones y reducirlas a un común denominador. Sin embargo, dicho proceso está plagado de errores: mal uso de la igualdad, noción equivocada de cómo se amplifica una fracción confundiéndolo con la multiplicación de una fracción por un número entero.

Justamente son los mismos errores que con alta frecuencia cometen los estudiantes; pero, ¡esta vez están plasmados en el libro de texto! Analicemos con más detalle la situación:

Los autores escriben:

$$\frac{3}{4} * 3 = \frac{3*3}{4*3}$$

Esta igualdad no es cierta por cuanto

$$\frac{3}{4} * 3$$

significa multiplicar la fracción por tres lo cual daría como resultado

$$\frac{9}{4}$$

mientras, el lado derecho corresponde a una amplificación de la fracción, obteniéndose la fracción

$$\frac{9}{12}$$

equivalente a la original. El mismo error se reitera al tratar de amplificar el segundo sumando de la adición planteada. Asimismo, los autores escriben:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} * 3$$

Luego, al escribir lo que citamos en la línea de arriba, el signo de igualdad está mal empleado ya que el resultado del lado izquierdo evidentemente no es igual al del lado derecho. Es sumamente común encontrar este mal empleo del signo igual en muchos estudiantes, cuando éstos al realizar operaciones sobre una expresión, transformándola, utilizan el signo $=$ como un conector en lugar del signo $\Rightarrow$ que simboliza "implica que" o "se deduce que".

CASO 5:

En esta oportunidad tomamos un texto para la Tercera Etapa de Educación Básica. Se trata de una obra de Amelii y Lemmo (2003) para 7^{o}Grado el cual está plagado de situaciones erróneas. En aras de la brevedad de la presentación lo haremos mediante una tabla.

Extracto de la obra	Página(s)	Comentario
Luego de mostrar una imagen de una recta numérica sobre la cual se han marcado los números enteros, los autores escriben: "$Z_{-}^{*} < 0 < Z_{+}^{*}$"	21	Evidentemente esto es un exabrupto. En los extremos de la desigualdad aparecen conjuntos, y para éstos la relación < no tiene sentido; además se les compara con un número.
"Toda potencia elevada al exponente **cero (0)** es igual a la unidad: $a^0=1 \quad a \in Z$".	29	No se señala que la base debe ser distinta de 0. El error está tanto en lo expresado en palabras como en la expresión simbólica.
"Cuando decimos que **b** es **divisible** entre **a** o simplemente que **b** es **divisor** de **a**, estamos afirmando que **b** **divide** a **a** **exactamente**."	33	Tenemos aquí un baturrillo. Esta frase es un verdadero sinsentido. No puede calificarse de otra manera que como un disparate.
"Una fracción de denominador cero no existe: $\frac{n}{0} = \nexists$"	41	Se emplea el simbolismo de manera equivocada. Hay un mal uso del cuantificador existencial y de la igualdad. Nuevamente un disparate.
Se quiere comprobar que dos fracciones son equivalentes y se escribe: "$\frac{1}{2} X \frac{8}{16} = 1.16 = 8.2$"	45	Mal uso de la igualdad.

Fuente: Amelii y Lemmo (2003)

Puede apreciarse, con la selección de extractos de la obra, los cuales no recogen sino una pequeña parte de los errores y malentendidos presentes en ella, que éstos muestran a las claras las profundas deficiencias conceptuales que son transmitidas a los alumnos; el desconocimiento en el uso correcto del lenguaje matemático; así como que el alumno quede con la percepción de que la matemática está compuesta por un conjunto de afirmaciones, reglas y propiedades autocontradictorias e incoherentes.

CASO 6:

Consideremos otro libro el cual ha sido ampliamente usado por el profesorado venezolano. Se trata de una obra de Brett y Suárez (2002) para el 9^{o}Grado de Educación Básica (actual 3^{o}de Educación Media, de acuerdo con la última reforma). El libro, de manera similar a otros analizados tiene un sinnúmero de errores conceptuales y de cálculo; malos usos de la nomenclatura del sistema internacional de medidas y del lenguaje matemático; profusión de ambig$'$uedades y de explicaciones confusas, por sólo citar algunas de las falencias y errores de dicho texto. Al trabajar con los números reales encontramos lo siguiente:

Caso (b): Adición de dos números racionales. Dados los números racionales $5/3$; $1/4$, hallar la suma.
$5/3 + 1/4 = (20 + 3)/12 = 1,666...; 1/4 = 0,25$
$1,6 + 0,2 = 1,8$ con aproximación a las décimas.
$1,66 + 0,25 = 1,91$ con aproximación a las centésimas.
$1,666 + 0,250 = 1,916$ con aproximación a las milésimas.
Sin aproximar $5/3 + 1/4 = (20 + 3)/12 = 23/12$ (es el valor real) En conclusión... La adición de dos irracionales es un racional. (Brett y Suárez, 2002, p. 24)

Como puede apreciarse, en la tercera línea del extracto hay un error de cálculo ya que 23/12 no es igual a 1,666... El resultado de esta operación es: 1,91666... Pero, obviando dicho error de cálculo, lo más grave es la afirmación que le sigue. La cual se resalta en negrillas dentro de un recuadro con fondo para hacerla lo más visible posible y con una mano señalándola. Podríamos darle a los autores el beneficio de la duda y suponer que allí hubo simplemente un error de transcripción y lo que se quería decir es que el conjunto de los números racionales es cerrado para la adición. Sin embargo, esto se desvanece al observar lo que sigue en dicha página y que transcribimos a continuación.

Caso (c): Adición de dos irracionales. Dados los irracionales $\sqrt{3}$; $\sqrt{8}$, hallar la suma. $\sqrt{3} = 1,732$; $\sqrt{8} = 2,828$
$1,7 + 2,8 = 4,5$ con aproximación a las décimas.
$1,73 + 2,82 = 4,55$ con aproximación a las centésimas.
$1,732 + 2,828 = 4,560$ con aproximación a las milésimas.

En conclusión... La adición de dos irracionales es otro irracional.(Brett y Suárez, 2002, p. 24)

Si analizamos esta segunda parte encontramos un mal empleo de la igualdad al señalar que cada una de las raíces dadas es igual a lo que se escribe en el lado derecho, desdiciendo de lo que se intenta hacer debajo, ya que se trata sólo de una aproximación y así debiera estar indicado empleando el símbolo de aproximadamente igual y no el de igualdad.

Por otra parte, en ambos extractos se pretende llegar a conclusiónes generales a partir de meras verificaciones de unos casos particulares: craso error. Por último, se coloca como conclusión que los números irracionales forman un conjunto cerrado para la adición, lo cual es absolutamente falso, para lo cual basta adicionar cualquier irracional con su opuesto (que también es irracional) lo cual da cero que es un número racional. En otra parte del texto, se indica: “el dominio de la función pertenece al conjunto de los números reales”. Hay aquí un mal empleo del lenguaje matemático y una falla conceptual al confundir la relación de pertenencia con la de inclusión.

CASO 7:

Consideremos a continuación una situación planteada en un texto para el 6ºGrado (Salazar, Navarro y López, 2000). En la obra en cuestión se proporciona, en la página 165, una información acerca de la preferencia de ciertas frutas por parte de los alumnos y se pide construir un diagrama de barras y uno de líneas para dicha situación. Seguidamente se presenta la tabla que mostramos a continuación:

Frutas	Frecuencia
Mango	12
Piña	6
Lechosa	18
Cambur	12
Total	48

Fuente: Salazar, Navarro y López, 2000, p. 165

En la respuesta proporcionada encontramos las siguientes gráficas:

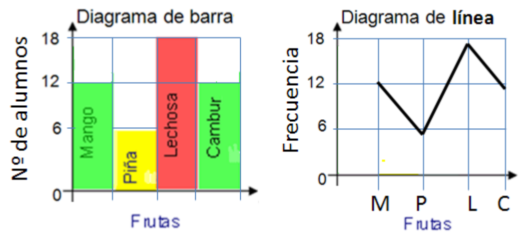

Figura 11: Diagramas mostrados en Salazar, Navarro y López, 2000, p.165

Puede apreciarse aquí que los autores confunden un diagrama de barras con un histograma, objetos que conceptualmente son distintos, colocando los nombres de las frutas sobre un continuum, cuando esta variable es simplemente una etiqueta (variable nominal). La anterior confusión conduce al segundo error: tratar de construir un diagrama de líneas lo cual no tiene sentido en la situación dada ya que ni siquiera existe un ordenamiento entre las categorías (frutas): éstas pudieran colocarse en cualquier posición por lo que tendríamos 4! posibilidades para ello.

12. Los errores como fuente para el diseño de actividades didácticas

¿Cuál debe ser nuestra actitud ante los errores? ¿Tienen alguna utilidad didáctica? La respuesta a estas interrogantes juega un papel de gran importancia en la actividad docente y es un buen indicador del estilo y de las concepciones que maneja el profesor.

La escuela tradicional opta por la penalización. Pero ¿a quién se penaliza? En general, la penalización recae sobre el alumno; y como hemos mostrado a través de las líneas anteriores, éste es tal vez uno de los menos responsables de tal situación. La presencia del error debemos asumirla como algo consubstancial al hecho educativo. Pero, ello no implica asumir una actitud pasiva ante su presencia, sino todo lo contrario. Por un lado, ha de investigarse el fenómeno para determinar los posibles factores de su producción, así como desarrollar estrategias que permitan subsanarlo. Por otro lado, el error y también los malentendidos al ser estudiados pueden dar pistas importantes o ser generadores de ideas que permitan el diseño de actividades didácticas, son una importante oportunidad para aprender. En la literatura didáctica podemos encontrar un buen número de situaciones erróneas exploradas didácticamente.

Así, por ejemplo, Borasi (1986) en un pequeño pero interesante escrito nos conduce a explorar situaciones como las siguientes:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4} \qquad \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}$$

Figura 12: Dos simplificaciones erróneas que conducen a resultados ciertos

En ambos casos se ha cancelado, por un automatismo de escritura adquirido, un dígito del numerador con el mismo dígito que aparece en el denominador, desconociendo que la concatenación de las cifras no indica un producto. Lo curioso es que los resultados en ambos casos son los correctos. Podríamos interrogarnos acerca de cuántos números de dos cifras (distintas) menores que 100 cumplen tal propiedad. El desarrollo de esta actividad conlleva a estudiar con profundidad el sistema de numeración posicional, amén de tener que resolver ecuaciones con soluciones enteras.

Trabajo similar realiza Allen (1970) al explorar dos soluciones incorrectas dadas por alumnos. Retomemos de seguidas el caso de la alumna que tenía la confusión entre diagonal y línea oblicua el cual hemos citado anteriormente. Nuevamente existe aquí la oportunidad para efectuar un trabajo didáctico profundo, más allá de clarificar los conceptos para algún alumno que sufra una confusión semejante a la chica del caso reportado. Así, por ejemplo, una pregunta que puede surgir es cuántas diagonales tiene una figura dada. ¿Existirá una fórmula o mecanismo para contar el número Dn de diagonales de un polígono dado el número de lados?

Esta pregunta conduce a la combinatoria. Supongamos que nuestro polígono tiene n lados. Como cada diagonal queda definida por dos vértices, hemos de calcular las combinaciones de n elementos tomados dos a dos: Cn, 2. Pero, al hacer esto estamos incluyendo los lados del polígono que también están determinados por un par de vértices. Hemos pues de calcular el número Cn, 2 y luego restarle n (el número de lados). Obtenemos que el número de diagonales viene dado por:

$$D_n = C_{n,2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n\frac{n(n-3)}{2}$$

Podemos seguir en esta dirección y preguntarnos en cuántas regiones queda dividido nuestro polígono si trazamos todas las diagonales. ¿Habrá una fórmula general para ello? ¿Influirá el hecho de que nuestro polígono sea regular? ¿Habrá casos en los cuales se intersequen tres diagonales? ¿Podemos evitar esto? ¿Cuáles son las condiciones para que ocurra esto último? Y así, un sinfín de preguntas cuyas respuestas además de acrecentar el conocimiento matemático permite también adquirir otras destrezas como la resolución de problemas y las competencias para hacer demostraciones.

13. Un disparate interesante

Volvamos a la muestra de situaciones compiladas por Diez Jiménez (1970). Si bien es cierto que algunas respuestas son un contrasentido, como la que señala que los ángulos opuestos por el vértice “son los que son iguales, pero desiguales”, ya que algo no puede ser simultáneamente igual y desigual; en otros casos ha de realizarse un examen más detallado antes de calificarlas como un mero disparate. Por ejemplo, si consideramos la respuesta dada a la pregunta de qué es un tetraedro, aunque ésta es incorrecta, ya que ésta no es la definición de tetraedro, porque no lo caracteriza; pero, no obstante un tetraedro cumple con esas condiciones por cuanto presenta cuatro triángulos (cada una de sus caras lo es) y la distancia entre éstos es cero, vale decir son equidistantes. En consecuencia, la afirmación de que hay cuatro triángulos equidistantes en el tetraedro no es un disparate.

A primeras luces es pertinente preguntarse si en un plano o en el espacio se podría crear una disposición de cuatro triángulos equidistantes y que tal construcción no sea un tetraedro. Para poder estudiar la situación planteada es necesario, en primer término, tener clara la noción de distancia entre dos conjuntos. Partamos del plano y construyamos una primera configuración con tres triángulos equidistantes con distancia mayor que cero. Para ello consideramos un triángulo equilátero T de lados de longitud d. Consideremos además otros tres triángulos (supongámoslos equiláteros y congruentes) T_1, T_2 y T_3, los cuales adosamos al triángulo T (ver Figura (13)).

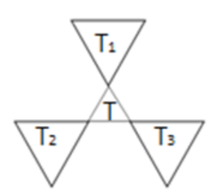

Figura 13: Configuración con tres triángulos equidistantes (a distancia d)

Sea T_4 un triángulo congruente con los anteriores. ¿Existirá en el plano una configuración tal que el nuevo triángulo sea equidistante a los tres anteriores? El problema planteado es cómo agregar un cuarto triángulo que sea equidistante a los tres anteriores.

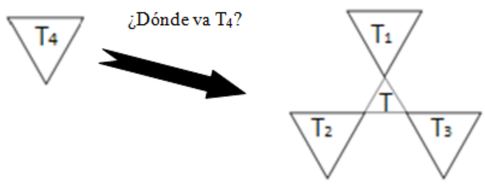

Figura 14: Interpretación de la construcción deseada

Si el triángulo T_4 se ubicará en el mismo plano en el cual está la figura antes construida no sería posible resolver el problema. Sin embargo, nada nos compele a restringirnos al plano. A continuación daremos la idea general de una construcción de cuatro triángulos equidistantes que conforman una configuración en el espacio de tres dimensiones y en la cual la distancia no es nula. Consideremos un tetraedro regular de aristas de longitud d. Podemos entonces suponer que T es una de sus caras. Supongamos que dicho tetraedro se apoya en la cara T y hagamos con T una construcción como la mostrada en la Figura (13).

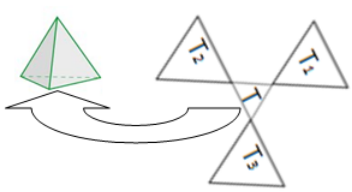

Figura 15: Configuración base para la construcción

Coloquemos ahora T_4 de forma que uno de sus vértices coincida con el vértice superior del tetraedro (aquel que está fuera del plano que contiene al triángulo T), de forma que los lados del triángulo queden sobre las prolongaciones de dos aristas del tetraedro incidentes en dicho vértice (ver Figura (16)).

Una vez realizado el procedimiento anterior podemos desprendernos del tetraedro y prescindir del triángulo T los cuales hemos empleado como herramientas auxiliares y así hemos logrado una configuración espacial conformada por cuatro triángulos equidistantes (separados por una distancia no nula). Aunque la configuración encontrada no es un tetraedro, curiosamente, nos hemos apoyado para su construcción en un tetraedro.

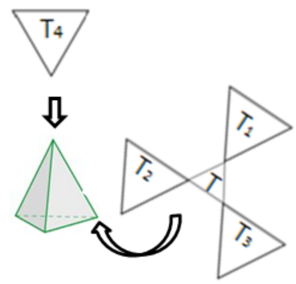

Figura 16: Esquema para construir la configuración

Retomemos el problema en el plano. Cambiemos las condiciones: supongamos que el cuarto triángulo no es congruente con los tres anteriores. Podemos ahora considerar la construcción que se muestra en la Figura (17).

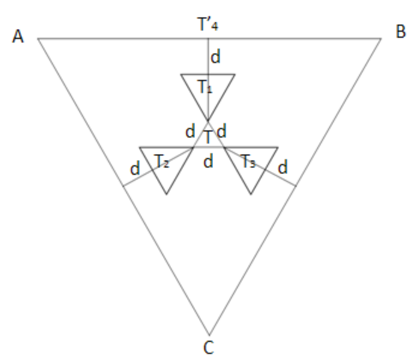

Figura 17: Configuración de cuatro triángulos equidistantes en el plano

Podemos ahora formularnos la interrogante: ¿Habrá alguna otra configuración de cuatro triángulos equidistantes? Como puede apreciarse, a partir de la respuesta equivocada del alumno hemos construido una actividad matemática. Mediante actividades como ésta entran en juego, entre otras cosas, el papel de las definiciones en matemática, así como también el de la demostración.

Hemos hecho la anterior construcción con bastante informalidad. Necesitaríamos probar, entre otras cosas, que efectivamente los cuatro triángulos de esa configuración son equidistantes.

14. Algunas conclusiones

En primer lugar hay que señalar que el muestrario de errores presentado es suficientemente elocuente, y además bastante preocupante, de la situación que hemos discutido en este escrito.

En diferentes estudios, realizados en Venezuela, podemos encontrar inventarios de situaciones similares y algunas otras que no se han presentado aquí en lo que respecta a los errores cometidos por los alumnos. Por ejemplo, en Beyer (1994, 1999, 2003, 2006), Serrano (2004, 2005a, 2005b); como también en estudios hechos en otras latitudes, como en Mancera (1998). La comparación entre diversos estos y otros estudios permite aseverar que existe una amplia gama de errores los cuales aparecen con alta frecuencia y en diversidad de países. Si revisamos las situaciones planteadas en el presente trabajo ellas son bastante disímiles; pero, a pesar de ello tienen algo en común: hay incorrecciones matemáticas presentes en todas y cada una de ellas y además todas tienen que ver con la incomprensión matemática del alumno.

La masificación de la producción editorial ha ido aparejada con un enorme incremento de los errores en los libros producidos. La revisión de obras escolares de diferentes épocas ha permitido detectar que a medida en que los libros son más recientes se ha ido incrementando el número de errores presentes en ellos así como la gravedad de los mismos. Más aún, ha podido apreciarse la aparición y proliferación de verdaderos disparates.

Más allá de las incorrecciones matemáticas, buena parte de las obras adolecen de calidad didáctica, notándose que ellas no se incorporan los grandes avances producidos en la investigación en Educación Matemática. El análisis de aspectos importantes para la formación matemática de los alumnos da como resultado el que en la presentación de muchos tópicos hay abundante presencia de obstáculos didácticos.

En muchos de los objetos matemáticos estudiados en los libros hay gran presencia de representaciones prototípicas. En buena parte de las empresas editoriales ha habido poco interés por la calidad académica de sus productos, notándose que en diversas ediciones -las cuales se anuncian como revisadas- persisten la mayoría de los errores encontrados en las ediciones anteriores de las mismas. Se nota, pues, poco cuido y escaso esmero en la revisión de las obras por parte de quienes supuestamente se han ocupado de ello dando además la impresión de que no se trata de expertos en contenidos y en los aspectos didácticos. Puede afirmarse que para las empresas editoriales y para buena parte de los autores privan sólo el aspecto mercantilista de la producción en franco desmedro de los aspectos educativos.

El estudio de las obras escolares ha permitido determinar la escasa formación matemática y didáctica de buena parte de los autores, con el agravante de que en muchos casos un autor o equipo de éstos produce obras para todos los grados y años de la enseñanza, desde primaria hasta la educación media y, una vez agotada la edición, básicamente se procede a hacer reimpresiones de las mismas, manteniéndose las mismas mucho tiempo en el mercado.

Ha existido mucha lenidad en lo que concierne a la revisión de las obras por parte de los organismos competentes del Estado venezolano a los fines de permitir el uso de los libros de texto en el sistema educativo del país. Más aún, en un momento dado incluso dejaron de hacerse las revisiones correspondientes. A lo antes señalado hay que agregar que tampoco la comunidad académica (matemáticos, educadores matemáticos, científicos, etc.) ni los gremios profesorales han tomado cartas en el asunto, dejando pasar una serie de situaciones reñidas con la calidad de la educación que el país se merece.

Otro elemento importante es el que tiene que ver con la concepción que los docentes tienen del error. Se ha mantenido a través del tiempo la visión tradicional de penalizar el error tanto en la formación de los futuros docentes como en la praxis de aula una vez que se aborda el campo profesional. A futuro es necesario despenalizar el error y convertirlo en una oportunidad de aprendizaje para el estudiante y en una fuente generadora de actividades didácticas para el profesor.

Puede señalarse que hay muchas técnicas las cuales coadyuvan al trabajo fructífero en la corrección de errores. Entre éstas cabe mencionar: el uso efectivo de contraejemplos; el enfatizar el reconocimiento de patrones abstractos por parte de los alumnos; la realización de trabajo individual con algunos estudiantes; el estímulo a que los estudiantes discutan entre ellos las soluciones que obtienen así como los pasos en los procedimientos de obtención de dichas soluciones; el énfasis en la comprensión de los conceptos; educar el sentido crítico de los alumnos.

Ha de agregarse que el tema de los errores es uno de esos tópicos que debiera ser abordado por los docentes de aula como tema de investigación.

Como ha podido apreciarse a lo largo de esta exposición, no cualquier libro de texto es necesariamente bueno como elemento de apoyo para el docente en su labor didáctica. éstos deben ser escogidos por el docente de acuerdo con ciertos criterios y asumiendo una postura crítica ante ellos.

Referencias

[1] Adda, J. Erreurs provoquees par les representations. CIEAEM 39. Publication Université de Sherbrooke (Canada). Documento miemografiado, 6 p.

[2] Allen, M. C. (1970). Two incorrect solutions explored correctly. The Mathematcs Teacher, 53(3), 257-258.

[3] Alsina, C. (2010). Asesinatos matemáticos. España: Ariel.

[4] Amelli, Mª. R. y Lemmo, J. (1994). Arco Iris Básico. Matemática 9. Caracas: Librería Editorial Salesiana, S. A.

[5] Amelli, Mª. R. y Lemmo, J. (2003). Arco Iris Básico. Matemática 7. Caracas: Librería Editorial Salesiana, S. A.

[6] Andonegui, M. (1992). Aportes a un marco teórico para el análisis de errores en el aprendizaje de la matemática. Ponencia presentada en el II Encuentro de Profesores de Matemática de las Regiones Nor-Oriental, Insular y Guayana. Maturín.

[7] Astolfi, J. P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Sevilla, España: Díada Editora.

[8] Baldor, A. (1940). Aritmética Teórico-Práctica. La Habana: Cultural.

[9] Baldor, A. (1955). Aritmética Teórico-Práctica. La Habana: Cultural.

[10] Baldor, A. (s/f). Aritmética Teórico-Práctica. La Habana: Cultural.

[11] Bertero, R. (2002). El colapso del puente de Tacoma. Revista de la Asociación de Ingenieros Estructurales, 10(25). Disponible en: http://materias.fi.uba.ar/6418/download/Colapso

[12] Beyer, W. (1994). El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula. Trabajo de Grado de Maestría (no publicado), Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

[13] Beyer, W. (1999). El significado en matemática: Un problema didáctico. Enseñanza de la Matemática, 8(1), 3-13.

[14] Beyer, W. (2003). Didáctica de la Matemática. Mérida: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

[15] Beyer, W. (2006). El Laberinto del Significado: La Comunicación en el Aula de Matemáticas. En: D. Mora y Serrano, W. (Eds.).

[16] Lenguaje, comunicación y significado en educación matemática (pp. 61-157). La Paz: GIDEM.

[17] Borasi, R. (1986). Algebraic explorations of the error . Mathematics Teacher, 79(4), 247-248.

[18] Brett C., E. y Suárez, W. (2002). Actividades de Matemática 9no. Caracas: Distribuidora Escolar.

[19] Brousseau, G (1994). Los diferentes roles del maestro. En: Parra, Cecilia y Saiz, Irma (Comps.). Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones. (Cap. IV, pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós.

[20] Cardelle Elawar, M. y Ruiz Bolívar, C. (1983). El error como fuente de aprendizaje en el mejoramiento de la habilidad matemática en alumnos de Sexto Grado de Educación Primaria. Ponencia presentada en el 2ºEncuentro Nacional de Profesores de Didáctica de la Matemática de Institutos de Educación Superior. (Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC). Caracas.

[21] Diez Jiménez, L. (1970). Antología del disparate. Contestaciones disparatadas en exámenes y reválidas. Madrid: STVDIVM. Ferrater Mora, J. (1974). Diccionario de filosofía abreviado. Buenos Aires: Sudamericana.

[22] Flores de Tovar, O. y otros. (1988). Matemáticas 9. Caracas: TEDUCA y Santillana, S.A.

[23] Gómez Alfonso, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. Enseñanza de las Ciencias, 13(3), 313-325.

[24] Iradi, R. (1874). Aritmética comercial de reglas breves para todos los cálculos que se efectúen con los números. Caracas: Rojas Hermanos.

[25] Mancera, E. (1998). Errar es un placer: el uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[26] Godino, J. D. (1991) Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En: Gutiérrez Rodríguez, ángel (Ed.) área de Conocimiento Didáctica de la Matemática. (Cap. 3, pp. 105-148). Madrid: Editorial Síntesis.

[27] Maron, M. (1979). The student's universal distributive law. MathematicsTteacher, 72(1), 46-47.

[28] Mendiola, E. (1982). Matemáticas. 3er Año (Ciclo Básico). Caracas: Editorial Biósfera.

[29] Mendiola, E. (1991). Matemática. 4ºAño (1er Año de Ciencias). Caracas: Editorial Biósfera.

[30] Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 18(1), 3-14.

[31] Páez, L. (1986). Etiología del error en la matemática escolar. Ponencia presentada en el V Encuentro sobre Enseñanza de la Matemática. (Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC). Caracas.

[32] Pascual Rodríguez, O. (1957). Matemáticas para 5ºy 6ºgrados. Caracas: Ediciones CO-BO.

[33] Pequeño Larousse Ilustrado. (1982). París: Ediciones Larousse.

[34] Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-Ediciones Morata.

[35] Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 10(3), 163-172.

[36] Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En: J. Kilpatrick; P. Gómez, y L. Rico (1995). Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes; Resolución de problemas; Evaluación; Historia. (pp. 69-108). Bogotá: "Una Empresa Docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

[37] Rincón, L. E. y Gómez, D. (1994). Horizontes, Educación Básica, 5ºGrado. Caracas: Ediciones ENEVA.

[38] Rodríguez, R. (1987). Matemática. 4ºGrado Escuela Básica. Caracas: Editorial Larense.

[39] Salazar, L.; Navarro, C. y López, I. (2000). Matemática 6º. Caracas: Santillana.

[40] Serrano, W. (2004). Elementos de álgebra. Unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez". Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

[41] Serrano, W. (2005a). El significado de objetos en el aula de matemáticas. Revista de Pedagogía, XXVI(75), 131-164.

[42] Serrano, W. (2005b). Juegos de lenguaje en educación matemática. Trabajo de Ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez".

[43] SINEA. (1998a). Informe para el Docente. 3º. Caracas: Ministerio de Educación.

[44] SINEA. (1998b). Informe para el Docente. 6º. Caracas: Ministerio de Educación.

[45] Solís de Cabello, M. (1982). Detección y papel del error en la enseñanza de la matemática. Trabajo de Grado de Maestría (no publicado), Instituto Universitario Pedagógico de Caracas.

[46] Smith, B. D. (1981). Misguided mathematical maxim-makers. The Two-year College Mathematics Journal, 12(5), 309-316.

[47] Tapia Rodríguez, J. (s/f). Barbaridades y disparates en clase. Barcelona, España: Edicomunicación, S. A.

[48] Vallota, A. (1994). La cuarta meditación (Primera parte). Revista Venezolana de Filosofía, 30, 109-129.

Para citar este artículo: Walter O. Beyer K. 2014, ”Los textos escolares y el error en matemáticas”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.