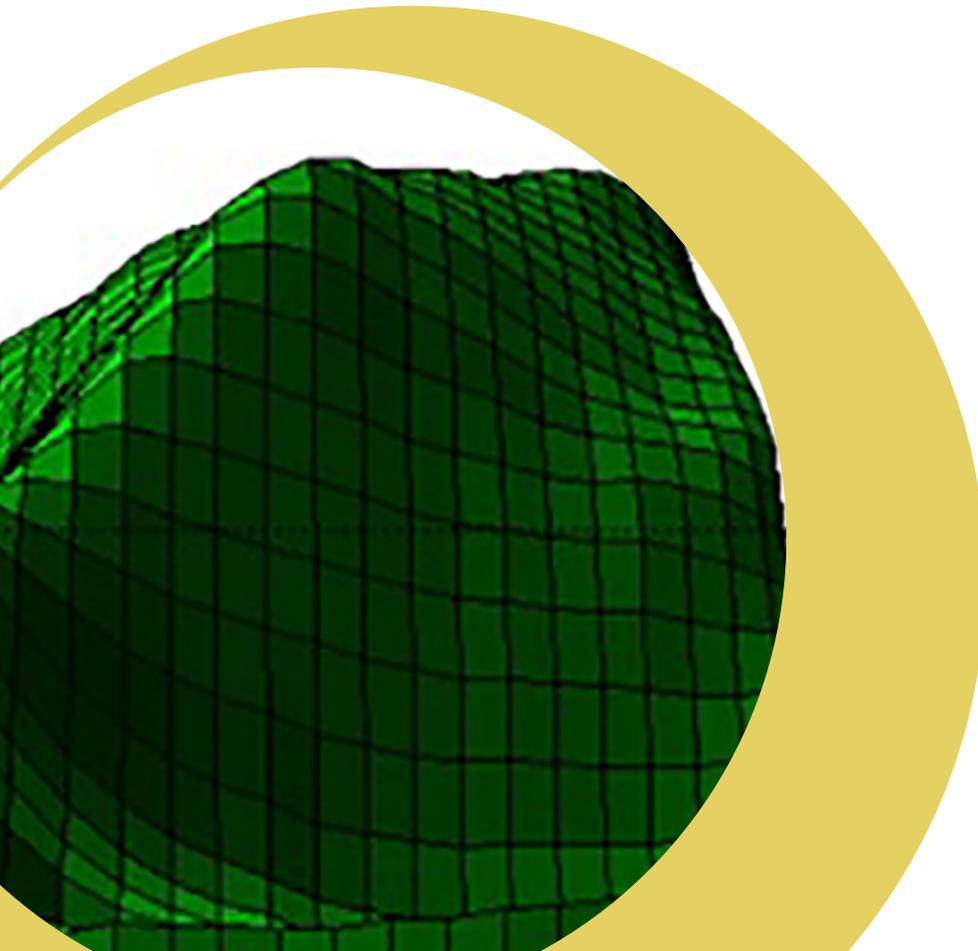


COLECCIÓN INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO PARA TODOS

Índices de capacidad univariados

Aplicaciones en el área productiva

ROBERTO JOSÉ HERRERA ACOSTA



COLECCIÓN INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO PARA TODOS

Índices de capacidad univariados

Aplicaciones en el área productiva

ROBERTO JOSÉ HERRERA ACOSTA



Sello Editorial
**UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO**

Herrera Acosta, Roberto José

Índices de capacidad univariados : aplicaciones en el área productiva / Roberto José Herrera Acosta. – 1 edición. – Puerto Colombia, Colombia: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2020.

Colección Investigación y desarrollo para todos

Ilustraciones. Incluye bibliografía

ISBN: 978-958-5173-25-5 (Digital descargable)

1. Análisis de capacidad del proceso. 2. índices de capacidad de procesos. 3. Estimación. 4. Tolerancias asimétricas. I. Autor. II. Título.

CDD: 620 H565



Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

www.unitlantico.edu.co
Kilómetro 7, Antigua Vía a Puerto Colombia.
Barranquilla, Colombia.

© 2020, Sello Editorial Universidad del Atlántico.
ISBN 978-958-5173-25-5

Coordinación editorial
Sonia Ethel Durán.

Asistencia editorial
Estefanía Calderón Potes.

Diseño y diagramación
Joaquín Camargo Valle.

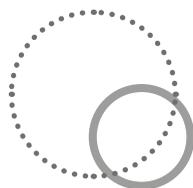
Revisión y corrección
Santiago Villamil Bonfante.

Impreso y hecho en Barranquilla, Colombia.
Ditar S.A. www.ditar.co
Kilómetro 7, Vía a Juan Mina.
Parque Industrial Clavería.

Printed and made in Barranquilla, Colombia.



Esta obra se publica bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-No Comercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0). Esta licencia permite la distribución, copia y exhibición por terceros de esta obra siempre que se mencione la autoría y procedencia, se realice con fines no comerciales y se mantenga esta nota. Se autoriza también la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas.



La presente colección es posible gracias a las siguientes autoridades académicas de la Universidad del Atlántico:

José Rodolfo Henao Gil

Rector

Leonardo Niebles Núñez

Vicerrector de Investigaciones, Extensión y Proyección Social

Danilo Hernández Rodríguez

Vicerrector de Docencia

Mariluz Stevenson

Vicerrectora Financiera

Josefa Cassiani Pérez

Secretaria General

Miguel Caro Candezano

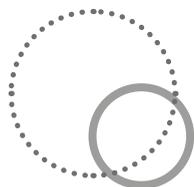
Jefe del Departamento de Investigaciones

Agradecimientos especiales

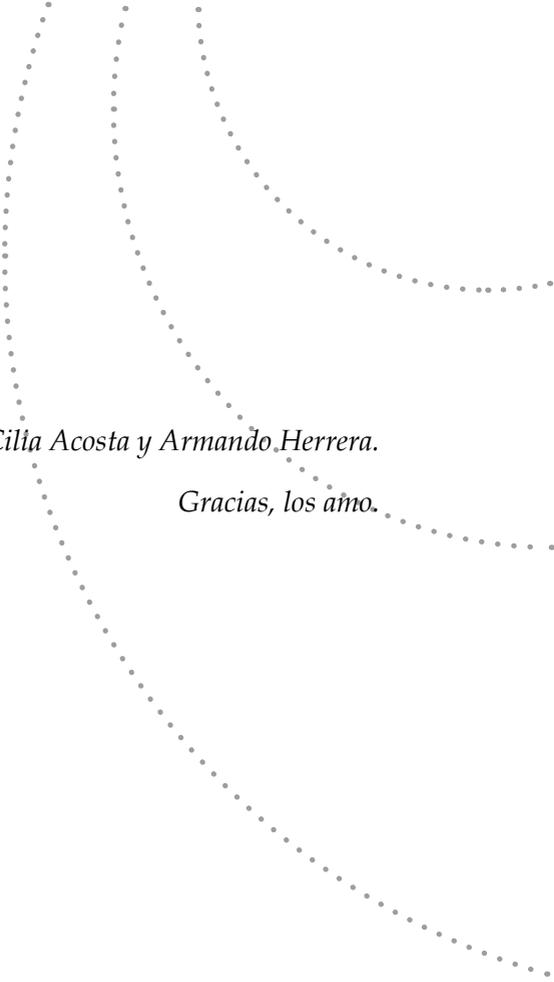
Facultad de Ingeniería

Decana Yussy Arteta Peña

2020

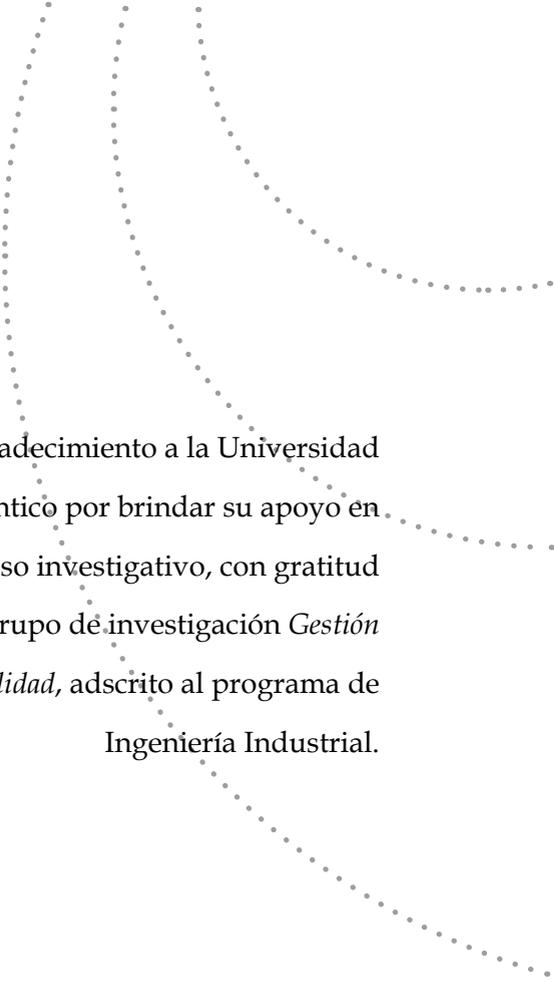


La colección ***Investigación y desarrollo para todos*** es una iniciativa liderada por la Vicerrectoría de Investigaciones, Extensión y Proyección Social de la Universidad del Atlántico, pensada como herramienta para la divulgación de la investigación y el conocimiento que se genera en el Caribe colombiano.

The page features three decorative dotted lines that curve from the top right towards the bottom left. The lines are composed of small, evenly spaced dots and create a sense of movement and depth.

A mis padres, Cilla Acosta y Armando Herrera.

Gracias, los años.



Nuestro agradecimiento a la Universidad
del Atlántico por brindar su apoyo en
el proceso investigativo, con gratitud
especial al grupo de investigación *Gestión
de la Calidad*, adscrito al programa de
Ingeniería Industrial.

Contenido

Prólogo	3
Introducción	4
1. Evolución de la medición de la capacidad de los procesos.....	6
1.1. Desarrollo de la evaluación de capacidad de los procesos	6
1.2. Importancia de los indicadores de capacidad	8
1.3. Los índices de capacidad en el monitoreo de la calidad de los procesos	8
2. Índices de capacidad univariados.....	10
2.1. Índices clásicos de capacidad de proceso	10
2.1.1. <i>Índice de capacidad univariado paramétrico.</i>	10
2.2. Estudio de caso: índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: pH	17
2.3. Estudio de caso: índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: humedad	23
2.4. Estudio de caso: índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: temperatura de motores	26
2.5. Intervalo de confianza de los índices de capacidad de procesos ...	33
2.6. Índice de capacidad univariado paramétrico con valor objetivo T ..	35

2.6. Estudio de caso: evaluación del índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: valoración37

3. Propuestas de indicadores de capacidad univariados paramétricos44

3.1. Indicador con variabilidad global para K desviaciones 44

3.2. Indicadores de capacidad de precisión..... 45

3.3. Indicador de capacidad variabilidad global estandarizado 46

3.4. Indicador de capacidad con medida de probabilidad de producto conforme 46

3.5. Estudio de caso: indicadores de capacidad univariados paramétricos con medida de probabilidad 47

3.6. Índice de capacidad comercial univariado paramétrico 48

4. Índice de capacidad univariado no paramétrico.....52

4.1. Indicador no paramétrico de Clements 52

4.2. Indicador de capacidad no paramétrico de Chen-Pern-Tong 54

4.3. Estudio de caso: evaluación del índice de capacidad univariado no paramétrico. 57

4.4. Índice de capacidad comercial univariado no paramétrico..... 58

4.5. Determinación del índice de capacidad comercial univariado no paramétrico..... 64

4.6. Indicadores de capacidad funcional univariados 69

4.7. Caso de estudio: evaluación del índice de capacidad univariado funcional 70

4.8. Profundidad funcional y detección de curvas atípicas por cuarto 90

4.9. Indicadores de capacidad del proceso de curado con límites de especificación discretos 95

5. Contraste mediante simulación de indicadores de capacidad univariados99

5.1. Procedimiento para calcular el índice de capacidad univariado ... 99

5.2. Simulación..... 100

5.3. Discusiones futuras..... 104

Referencias.....	106
-------------------------	------------

Glosario.....	111
----------------------	------------

ANEXO A. Programa de simulación en lenguaje R para indicadores de capacidad paramétricos	113
--	-----

ANEXO B. Programa de simulación en lenguaje R para indicadores de capacidad no paramétricos	115
---	-----

ANEXO C. Programa de simulación en lenguaje R para comparar indicadores de capacidad paramétricos	118
---	-----

ANEXO D. Programa de simulación en lenguaje R para comparar indicadores de capacidad no paramétricos.....	120
---	-----

Índice de tablas

Tabla 1. Determinación de los límites de control de las cartas de Shewhart R y S en fase I.	11
---	----

Tabla 2. Coeficientes de los límites de control de las cartas de Shewhart R y S en fase I.	12
--	----

Tabla 3. Información del pH en un proceso de fabricación de una bebida refrescante a base de frutas de limón.	18
---	----

Tabla 4. Especificaciones de la variable pH en la fabricación de una bebida refrescante a base de limón.	19
--	----

Tabla 5. Información de la humedad en la fabricación de hormigón. ...	24
--	----

Tabla 6. Especificaciones de la variable “temperatura de motores”	28
---	----

Tabla 7. Información de verificación, ajustes en el centramiento de la temperatura de motores en la empresa metalmecánica.	31
--	----

Tabla 8. Información codificada del contenido de sacarosa en la producción de cerveza.	37
--	----

Tabla 9. Especificaciones de la variable codificada del contenido de sacarosa en la producción de cerveza.	39
--	----

Tabla 10. Resumen de resultados de las propuestas de indicadores univariados de las especificaciones de las variables cantidad de sacarosa del medicamento Levocetirizina.	68
--	----

Tabla 11. Sumas de errores, cuadrados de suavización de temperatura de puerta.	72
--	----

Tabla 12. Media cuadrática de B-splines, cuarto 1 y cuarto 2 - temperatura de puerta.....	72
Tabla 13. Media cuadrática de B-splines, cuarto 3 y cuarto 4 - temperatura de puerta.....	73
Tabla 14. Media cuadrática de B-splines, cuarto 5 y cuarto 6 - temperatura de puerta.....	74
Tabla 15. Media cuadrática de B-splines, cuarto 7 y cuarto 8 - temperatura de puerta.....	75
Tabla 16. Media cuadrática de B-splines, cuarto 9 y cuarto 10 - temperatura de puerta.....	76
Tabla 17. Media, varianza y desviación estándar del cuarto 1 y cuarto 2	78
Tabla 18. Media, varianza, desviación estándar funcional, cuarto 5 y cuarto 6 - temperatura de puerta.....	80
Tabla 19. Media, varianza y desviación estándar funcional, cuarto 9 y cuarto 10 - temperatura de puerta.....	82
Tabla 20. Profundidades de las curvas (depth), curvas atípicas (outpoint) y curva mediana (medcurve) de la puerta del cuarto 1.....	91
Tabla 21. Profundidades de las curvas (depth), curvas atípicas (outpoint) y curva mediana (medcurve) de la puerta del cuarto 10.....	92
Tabla 22. Ecuaciones polinómicas grado 3 de los límites de especificación.	96
Tabla 23. Índices de capacidad de la temperatura de la puerta del cuarto de curado con límites de especificaciones lineales de temperatura.....	98
Tabla 24. Simulación de los índices de capacidad clásicos en contraste con el índice de capacidad comercial, seleccionando el límite de especificación inferior como productos con calidad comercial	101
Tabla 25. Simulación de los intervalos de confianza para el índice de capacidad clásico, en contraste con el índice de capacidad comercial, seleccionando el límite de especificación inferior, como productos con calidad comercial.	102

Índice de gráficas

Gráfica 1. Carta de control R para la variable pH, con inestabilidad estadística.	20
Gráfica 2. Carta de control R para la variable pH, con estabilidad estadística.....	21
Gráfica 3. Índice de capacidad de la característica humedad. Comportamiento sin transformación.	26
Gráfica 4. Carta de control de rango móvil MR para la variable temperatura, con estabilidad estadística.	29
Gráfica 5. Índice de capacidad óptimo o a corto plazo. Temperatura de los motores.....	30
Gráfica 6. Índice de capacidad una vez realizado el ajuste operativo del proceso para modificar el centramiento de la temperatura de los motores.....	32
Gráfica 7. Carta de control de S para la variable contenido de sacarosa, con causas no aleatorias.	40
Gráfica 8. Carta de control de X para la variable contenido de sacarosa, con causas no aleatorias	40
Gráfica 9. Carta de control de S para la variable contenido de sacarosa, estabilizada estadísticamente.	41
Gráfica 10. Carta de control de X para la variable contenido de sacarosa, estabilizada estadísticamente.	41
Gráfica 11. Índice de capacidad del contenido de sacarosa de la fabricación de cerveza.	42
Gráfica 12. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en una distribución empírica.	58
Gráfica 13. Comportamiento del pH.....	63
Gráfica 14. Comportamiento de contenido de sacarosa.....	64
Gráfica 15. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Gamma generalizada.	65
Gráfica 16. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución log-normal.	66
Gráfica 17. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Weibull.	67
Gráfica 18. Segunda derivada de las temperaturas de puerta.	71

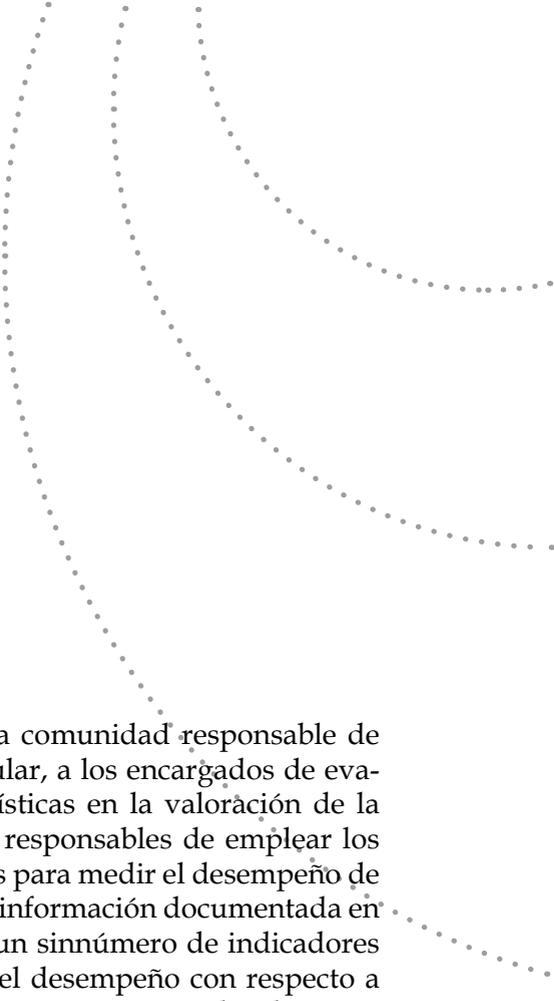
Gráfica 19. Ajuste B-splines, mes de mayo, cuarto 1 - temperatura de puerta.....	73
Gráfica 20. Ajuste residual B-splines, mes de mayo, cuarto 6 - temperatura de puerta.	75
Gráfica 21. Ajustes de curvas, mes de marzo, cuarto 8 - temperatura de puerta.	76
Gráfica 22. Ajuste residual B-splines, mes de mayo, cuarto 9 - temperatura de puerta	77
Gráfica 23. B-splines y estadística descriptiva del cuarto 1 - temperatura de puerta	79
Gráfica 24. B-splines y estadística descriptiva del cuarto 6 - temperatura de puerta	81
Gráfica 25. B-splines y estadística descriptiva del cuarto 10 - temperatura de puerta	83
Gráfica 26. Medias funcionales de las temperaturas de puerta	84
Gráfica 27. Varianza funcional temperaturas de puerta	84
Gráfica 28. Desviación funcional de temperatura de puerta.....	85
Gráfica 29. Análisis de estadística descriptiva funcional de la temperatura de puerta de cuarto de curado. Autoría propia.....	86
Gráfica 30. Superficie de varianza funcional - temperaturas de puerta.....	87
Gráfica 31. Covarianza 3D de los cuartos de temperatura de puerta ..	87
Gráfica 32. Covarianza 3D de los cuartos de temperatura de puerta ..	88
Gráfica 33. Primer componente principal funcional, 53.5% de variabilidad en los cuartos de temperatura de puerta	89
Gráfica 34. Segundo componente principal funcional, 28.3% de variabilidad de los cuartos de temperatura de la puerta.	90
Gráfica 35. Curvas atípicas B-splines, cuarto 1- temperatura de puerta.....	91
Gráfica 36. Curvas atípicas B-splines cuarto 10 - temperatura de puerta.....	92
Gráfica 37. Curvas atípicas B-splines cuarto 11 - temperatura de puerta.....	93
Gráfica 38. Percentiles funcionales cuarto 1 - temperatura de puerta .	94
Gráfica 39. Percentiles funcionales cuarto 8 - temperaturas de puerta	95

Gráfica 40. Percentiles funcionales con límites de especificación superior e inferior de temperatura, cuarto 1.....	96
Gráfica 41. Percentiles funcionales con límites de especificación superior e inferior de temperatura, cuarto 8.....	97
Gráfica 42. Comparación de los índices de capacidad paramétricos para una muestra simulada de $n=1000$, k réplicas=30000	103
Gráfica 43. Comparación de los índices de capacidad no paramétricos para muestra simulada de $n=1000$, k réplicas=30000	104

Apéndice

Tabla de parámetros

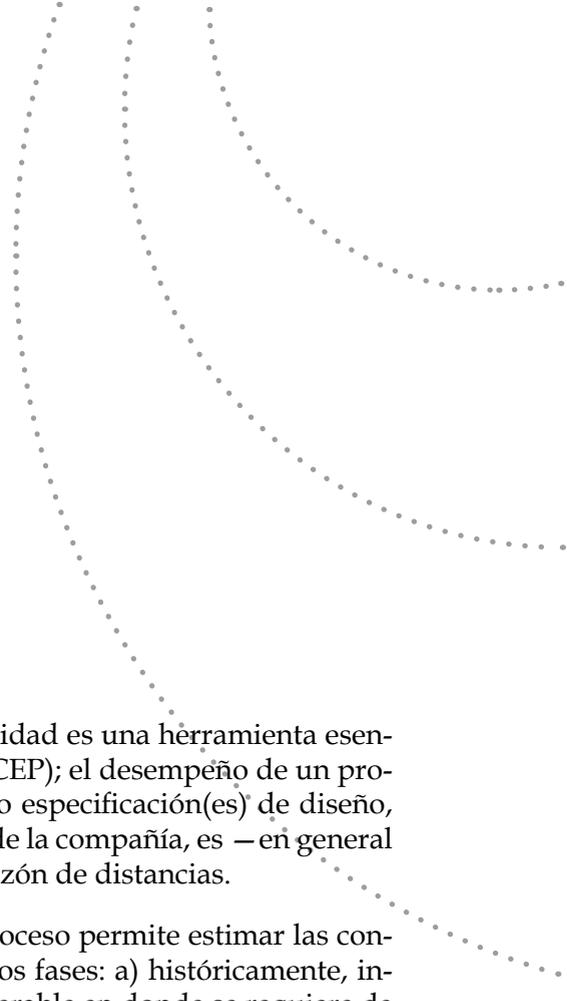
Signos	Descripción
USL	Límite de especificación superior
LSL	Límite de especificación inferior
C_p	Índice de capacidad óptimo o a corto plazo
P_p	Índice de capacidad variabilidad total o a largo plazo
σ_{op}	Desviación estándar óptima obtenida en fase I de cartas de control dentro del subgrupo
σ_{ent}	Desviación estándar entre los subgrupos
S	Desviación estándar global de la información omitiendo la estabilidad estadística del proceso
C_{p(q)}	Índice de capacidad no paramétrica
C_{pCRk(a, b)}	Índice de capacidad comercial
T	Valor objetivo
C_{pNCR}	Índice de capacidad comercial no paramétrico
w	Peso o asignación evaluada mediante medida de probabilidad del límite de especificación que se denomina calidad comercial
φ	Función acumula de la distribución normal estándar
UCL	Límite superior de control
LCL	Límite inferior de control



Prólogo

Este texto tiene como objeto presentar a la comunidad responsable de la calidad en las organizaciones; en particular, a los encargados de evaluar esta calidad aplicando técnicas estadísticas en la valoración de la calidad de los productos o servicios y los responsables de emplear los diversos indicadores univariados utilizados para medir el desempeño de la característica de calidad de interés. De la información documentada en los registros de calidad se puede sustraer un sinnúmero de indicadores con la intención de evaluar generalmente el desempeño con respecto a unas especificaciones preestablecidas. Así, en este texto se abordan nuevas propuestas de indicadores de capacidad univariados paramétricos, como también de índices no paramétricos. El presente documento pretende incentivar al lector interesado en el mejoramiento continuo y en la aplicación de estos nuevos conceptos, ajustando cada propuesta a las condiciones reales en el proceso.

Roberto José Herrera Acosta



Introducción

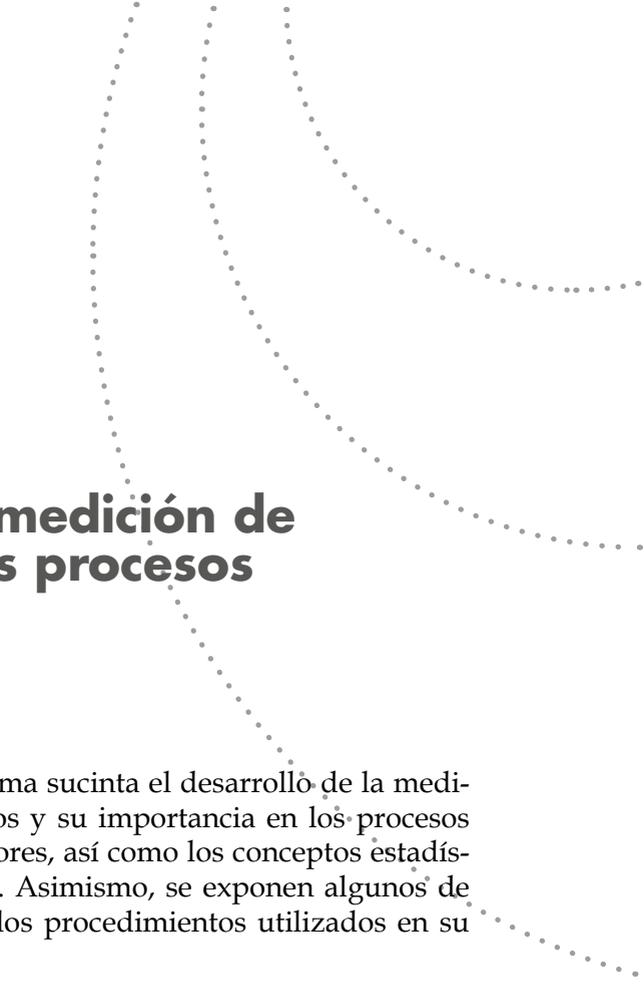
La evaluación de los indicadores de capacidad es una herramienta esencial en el control estadístico de procesos (CEP); el desempeño de un producto con respecto a una(s) tolerancia(s) o especificación(es) de diseño, tasada por el departamento de ingeniería de la compañía, es – en general y dentro del contexto univariado – una razón de distancias.

En términos generales, la capacidad de proceso permite estimar las condiciones de calidad del producto desde dos fases: a) históricamente, información recabada por un tiempo considerable en donde se requiere de antemano una estabilidad estadística de la característica de calidad; este indicador evaluado en estas circunstancias es denominado a corto plazo u óptimo. Si este indicador es evaluado en cuanto a su estabilización, es denominado a largo plazo o variabilidad global; b) la estimación del indicador se realiza en línea, es decir, en cuanto a su información reciente de la característica de calidad y tiene como objeto evaluar el desempeño dado en algunas correcciones de operación con la intención de optimizar las condiciones de calidad de esta característica; es de resaltar que el fundamento de esta operación es contrastar el indicador estimado de los datos históricos con el indicador obtenido en el monitoreo en línea.

En las últimas dos décadas se ha establecido una estandarización en el dimensionamiento geométrico de los productos y sus especificaciones, mediante normas internacionales proporcionando una terminología y metodología adecuadas para describir las características del producto con respecto a la zona de especificaciones (Drake, 2016; Pan & Li, 2014; Zeiss / Applied Geometrics Inc, 2003).

Actualmente, en la literatura de control estadístico de la calidad, se han presentado propuestas de indicadores de capacidad de tipo multivariante, con el objeto de proporcionar una medida del rendimiento del proceso que permita evaluar el ajuste con respecto a unas especificaciones de diseño del producto. Inicialmente, estas propuestas se enfocaron en el monitoreo de una característica de calidad a la vez, es decir, un enfoque netamente univariado. Estos indicadores univariados han sido modificados por nuevas propuestas más sensibles; gracias al desarrollo tecnológico de los programas estadísticos, se ha facilitado la medición por muy compleja, en términos matemáticos, que sea la propuesta. Las expectativas de calidad pertinente a las necesidades de los clientes son otro de los factores fuertemente relacionados con el surgimiento de nuevas propuestas univariadas; tal es el caso de los índices C_p y C_{pk} (Kane, 1986; Hsiang & Taguchi, 1995). Posteriormente, Chan, L. K., Cheng, S.W. & Spring, F.A. (1998a) y Pearn, W.L., Kotz, S. & Johnson, N.L. (1992) presentan modificaciones de estos índices utilizando valores objetivos. Por otro lado, Choi & Owen (1990) muestran índices univariados, C_{pm} y C_{pmk} , basados en límites de tolerancia equidistantes de un valor nominal. Finalmente, Boyles (1994) propone un indicador de capacidad cuyos límites de tolerancia son asimétricos.

Estos indicadores univariados parten del supuesto de normalidad e independencia de las variables monitoreadas. Si dicha hipótesis no se cumple, estos indicadores no son fiables (Chan, Cheng & Spiring, 1988a; Gunter, 1989). Somerville & Montgomery (1996), Chen & Pearn (1997), Zwick (1995), Schneider Pruett & Lagrange (1995) y Pearn & Chen (1995) presentaron índices de capacidad en los cuales no se cumple el criterio de normalidad. En el documento se presentan los indicadores de capacidad univariantes aplicados a información seleccionada, en donde el supuesto de normalidad es rechazado en las pruebas de bondad de ajuste.



1. Evolución de la medición de la capacidad de los procesos

En este capítulo se presentan en forma sucinta el desarrollo de la medición de la capacidad de los procesos y su importancia en los procesos de manufactura, los principales autores, así como los conceptos estadísticos básicos para su interpretación. Asimismo, se exponen algunos de los inconvenientes presentados en los procedimientos utilizados en su evaluación.

1.1. Desarrollo de la evaluación de capacidad de los procesos

Guevara & Vargas (2015) definen el monitoreo de un proceso de producción como un sistema constituido por una serie de etapas influenciadas por varios factores generadores de una variación general. Esta variación, desde el punto de vista del control de calidad de procesos, es generada por las siguientes categorías: materia prima, máquina, método, mano de obra, medio ambiente y medición. Este sistema debe ser controlado y evaluado desde la ingeniería.

Este control se realiza de dos maneras: 1) utilizando herramientas matemáticas de procesos como los balances de materia y energía, que permiten obtener condiciones ideales de las variables o factores involucradas; 2) desde la perspectiva de la gestión de la calidad, a través de un monitoreo de las variables que es realizado mediante técnica estadísticas. En esta última se encuentra la capacidad de proceso **CP**, que monitorea el

desempeño con respecto a unas especificaciones de forma sistemática, es decir, evalúa el rendimiento con respecto a unas tolerancias dadas en el proceso, basado este último en las condiciones de diseño del producto o las exigidas por el cliente, si es el caso.

Tradicionalmente, la teoría del control estadístico indica que un proceso es capaz cuando el porcentaje de elementos no conformes disminuye en forma considerable tomando el valor referente de 0.0027 como medida de probabilidad máxima de no cumplimiento. Este criterio se hace más sensible en la metodología *Six Sigma*, en la cual los valores se modifican a un referente de calidad más riguroso; en esta metodología un no cumplimiento ocurre cuando se presentan como mínimo cuatro (4) partes de unidades no conformes por cada millón de unidades fabricadas.

Pignatiello & Ramberg (1993) presentan los supuestos básicos para evaluar la capacidad de un proceso desde la perspectiva univariada:

- a) El supuesto de normalidad, en donde el comportamiento de la variable monitoreada se distribuye normal $N(\mu, \sigma^2)$.
- b) Independencia entre las observaciones monitoreadas, donde X_1, \dots, X_n son dependientes si para cualquier sucesión de subíndices (i_1, \dots, i_h) , $h \leq k$, se tiene que $P(i_h \cap i_k) = P(i_h)P(k)$.
- c) El proceso debe encontrarse en estabilidad estadística, es decir, se debe cumplir la no existencia de causas especiales en el comportamiento de la variable o variables monitoreadas.
- d) En el monitoreo de las características de calidad, las muestras seleccionadas deben reflejar las condiciones reales del proceso, es decir, deben ser representativas.

Existen inconvenientes en el procedimiento de monitoreo y evaluación de la capacidad de cumplimiento de las características de calidad de un producto. Entre estos se encuentra:

- a) El supuesto de normalidad de las características evaluadas, algunas veces difícil de cumplir.
- b) La multicolinealidad de la característica de calidad es generalmente frecuente, es decir, el supuesto de independencia muchas veces no se cumple.

- c) Es difícil obtener un indicador de capacidad fiable cuando la materia prima utilizada para elaborar los productos es de tipo granel. Debido a sus condiciones fisicoquímicas, estos elementos infortunadamente poseen una gran variabilidad, lo cual obstaculiza de esta manera la estimación de valores de indicadores consistentes con la realidad del proceso.

1.2. Importancia de los indicadores de capacidad

Generalmente, el ingeniero o el profesional responsable del control de calidad pretende evaluar la eficiencia y eficacia de los productos mediante indicadores de gestión comúnmente conocidos como índices de capacidad del proceso **CEP**. La valoración se realiza, para el caso univariado, seleccionando cada una de las características de calidad en forma independiente, asumiendo variables normalmente distribuidas.

En la fabricación del producto intervienen innumerables factores asociados a las características de calidad monitoreadas. Es necesario utilizar herramientas en el área del control estadístico apropiadas a las realidades actuales de los procesos que permitan un análisis eficiente del mismo y proporcionen, además, un estimado medible de cumplimiento de ciertos requisitos, generalmente contenidos en un intervalo de tolerancia o límites de especificaciones. En el campo del control estadístico, la metodología aplicada para evaluar el rendimiento o desempeño del proceso es conocida como capacidad y es evaluada mediante un indicador adimensional denominado índice de capacidad de proceso **ICP**. Los índices de capacidad son una de las herramientas más conocidas en el control de proceso.

1.3. Los índices de capacidad en el monitoreo de la calidad de los procesos

En los últimos años, la globalización ha impactado fuertemente los mercados mundiales, formando consumidores flexibles en cuanto a sus requerimientos de calidad exigidos en los productos. Por tanto, es indispensable contar con empresas preocupadas por el cumplimiento de las especificaciones de diseño y/o las necesidades demandadas por parte de los clientes, empresas que ofrezcan productos robustos con el objetivo de fidelizarlos y de lograr un éxito económico, financiero y mantener la

sostenibilidad económica en el mercado. Las compañías desean, con el propósito de mejorar los procesos productivos, no solo procedimientos de control estadístico para ofrecer productos con alta calidad, sino también que estos sean competitivos en el mercado.

Autores como Shewhart (1939), Ishikawa (1997), Taguchi (1986) y Deming (1989) entre otros, coinciden en la necesidad de usar técnicas estadísticas en los procesos productivos para medir el grado de cumplimiento de los requisitos de calidad. El área que permite realizar esta comprobación es el Control Estadístico del Proceso (**CEP**).

Los índices de capacidad han sido utilizados en la industria manufacturera para proporcionar medidas numéricas evaluadoras del desempeño o rendimiento de los procesos (Pearn & Wu, 2006). Este desempeño se evalúa desde el concepto univariado, seleccionando una característica de calidad a la vez. Estas propuestas han sido investigadas con suficiencia en el campo paramétrico, como también las técnicas no paramétricas surgidas con gran impulso en los últimos treinta años. Pearn *et al.* (1992) plantearon el índice de capacidad de proceso C_{pmk} con valor objetivo, aprovechando las ventajas de los índices clásicos anteriores C_{pk} (Kane, 1986) y aquellos C_{pm} planteados por Chan, Cheng & Spiring (1988b). Se considera, posiblemente, como el de mayor utilidad hasta el momento en los procesos con especificaciones de tipo unilateral. Por otro lado, Chen & Hsu (1995) muestran un estimador C_{pmk} asintóticamente insesgado, como también un indicador convergente a una distribución normal $N \sim (\mu, \sigma^2)$, en condiciones generales.

2. Índices de capacidad univariados

En este capítulo se presentan las formulaciones clásicas de índices de capacidad, propuestas en los textos del control estadístico de proceso. El objetivo central del mismo consiste en realizar una relación de longitudes entre la docencia de las especificaciones con respecto a la desviación del proceso, como también presentar propuestas de indicadores en donde la medición se realiza tomando las medidas de la probabilidad de cumplir con las especificaciones de diseño. Además, se presenta la importancia de obtener en algunos de los indicadores la posibilidad de estabilizar estadísticamente la característica de calidad monitoreada, generalmente aplicando las cartas de control, con el objetivo de obtener los parámetros de esta. Además, es importante resaltar que estos indicadores son estimados al estabilizar estadísticamente la característica de calidad; estabilización obtenida generalmente aplicando cartas de control, fase I, con el objeto de obtener los parámetros de esta.

2.1. Índices clásicos de capacidad de proceso

2.1.1. Índice de capacidad univariado paramétrico.

Kane (1986) presenta los índices de capacidad univariados, donde la característica de calidad X es evaluada asumiendo una distribución normal e independiente, como una razón de dos intervalos: los límites de especificaciones y la medida de dispersión obtenida por diferencia entre intervalos de confianza con un nivel de significancia $\alpha = 0.027$, mediante la siguiente formulación:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{\mu + 3\sigma_{op} - (\mu - 3\sigma_{op})}$$

entonces,

$$C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma_{op}} \quad (1)$$

Donde **USL** es el límite de especificación superior, **LSL** es límite de especificación inferior y σ_{op} es la desviación estándar estimada en el proceso durante la fase I, de las cartas de control por variables.

Este indicador actualmente es conocido como **índice de capacidad a corto plazo**; este texto lo denominará índice óptimo de capacidad. Los límites de control en la fase I para las cartas R y S de Shewhart se presentan en la **Tabla 1**.

Tabla 1. Determinación de los límites de control de las cartas de Shewhart R y S en fase I.

Límites de control fase I	Cartas de control R	Cartas de control S
UCL	$D_3 \bar{R}$	$B_4 \bar{S}$
LCL	$D_2 \bar{R}$	$B_3 \bar{S}$
Estimación de la desviación estándar σ_{op}	$\sigma_{op} = E[\bar{R}] / d_2 (2)$	$\sigma_{op} = E[\bar{S}] / c_4 (2)$
Estimación del promedio	$\mu = E[\bar{X}]$	$\mu = E[\bar{X}]$

donde d_2 y c_4 son constantes que se encuentran sujetas al tamaño del subgrupo, como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Coeficientes de los límites de control de las cartas de Shewhart R y S en fase I.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D₄	3.267	2.575	2.282	2.115	2.004	1.924	1.864	1.816	1.777
D₃	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000	0.076	0.136	0.184	0.223
d₂	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078
B₄	3.267	2.568	2.266	2.089	1.970	1.882	1.815	1.761	1.716
B₃	0.000	0.000	0.000	0.000	0.030	0.118	0.185	0.239	0.284
c₄	0.798	0.886	0.921	0.940	0.952	0.959	0.965	0.969	0.973

La desviación estándar estimada dentro del subgrupo en este texto se denominará desviación óptima σ_{op} , se espera que entre los subgrupos exista la mínima variabilidad. Aunque en el monitoreo entre subgrupos haya una diferencia permisible, es necesario evaluar la variabilidad total s . Esta variabilidad total, que algunos textos denominan como **a largo plazo** y calculada en todas las fases de control, se fundamenta en la información sin depuración que exige la fase I de control, es decir, consistente en estabilizar estadísticamente el proceso. Este proceso presupone que el valor de la variabilidad óptima dentro del subgrupo debe ser inferior a la variabilidad a largo plazo. Esto induce a asumir una descomposición de la variabilidad en los siguientes elementos:

$$E[s] = \sigma_{opt}E[s] = \sigma_{opt} + \sigma_{ent} \sigma_{ent} \quad (2)$$

Según algunas de las normas de calidad que actualmente se presentan en varias áreas de producción, este indicador de calidad no evalúa la variabilidad entre los subgrupos. El indicador adecuado para este inconveniente es el denominado **índice de capacidad a largo plazo**, definición establecida debido a la estimación de la desviación proveniente entre los subgrupos, es decir, el valor de la desviación global s .

Es conveniente realizar las estimaciones de indicadores de capacidad una vez se realice un monitoreo mediante cartas de control con el propósito

de encontrar la desviación “real”, considerada en este caso óptima porque siempre se obtendrá un valor menor que el indicador de capacidad con la desviación global del proceso, a largo plazo.

Es justo destacar que los indicadores de capacidad P_p y P_{pk} son discutibles en su utilidad en el control estadístico de procesos CEP. Estos indicadores **a largo plazo** tienen una receptibilidad en el sector automotriz, específicamente ajustado a las normas de calidad QS 9000 o TS 16949.

En este caso debe presentarse un indicador que permita evaluar el comportamiento de la desviación global con el fin de medir el comportamiento a lo largo de todo el proceso; este índice de capacidad es denominado **índice de capacidad a largo plazo o índice de variabilidad total**,

$$P_p = \frac{USL - LSL}{6s} P_p = \frac{USL - LSL}{6s} \quad (3)$$

donde la desviación estándar sin corrección al sesgo es estimada mediante $s = \left[\frac{\sum (x_i - \hat{\mu})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}}$ obtenida de toda la muestra. Por otra parte, cuando existen correcciones al sesgo la estimación de la desviación

$$s = \left[\frac{\sum (x_i - \hat{\mu})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}} / c_4(n_j) \quad (4)$$

Esta afirmación implica que es necesario construir los indicadores de capacidad clásicos C_p cuando el proceso se encuentra estable estadísticamente, evidenciado en la fase I de control; estas medidas estarán sujetas al tamaño del subgrupo seleccionado.

En un monitoreo a corto plazo, la ecuación (1) es aplicada con eficiencia en procesos en donde la media μ coincide con el valor medio de las especificaciones o de la tolerancia, pero cuando existe un descentramiento de esta medida el índice de capacidad C_p no es un buen estimador del rendimiento del proceso. Este inconveniente se logra minimizar utilizando la

propuesta de Kane, la cual presenta dos indicadores C_{pu} y C_{pl} y computa el descentramiento superior e inferior respectivamente (Kane, 1986):

$$C_{pk} = \min \left\{ C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma_{opt}}; C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma_{opt}} \right\} \quad (5)$$

En el caso de la evaluación del **indicador de capacidad con variabilidad total o a largo plazo**, las expresiones son las siguientes:

$$P_{pk} = \min \left\{ P_{pu} = \frac{USL - \hat{\mu}}{3s}; P_{pl} = \frac{\hat{\mu} - LSL}{3s} \right\} \quad (6)$$

En este indicador de capacidad en la fase II o de control, al igual que los índices de capacidad clásicos, debe construirse basado en los índices estadísticos. Es claro que los indicadores de capacidad óptimo o a corto plazo C_{pk} , como el indicador de la variabilidad total o a largo plazo P_{pk} son sensibles a las modificaciones del centramiento del proceso en las fases de control.

Este texto sugiere que estos indicadores de capacidad, tanto el óptimo C_p como el de la variabilidad total P_p , en la fase II de control deben someterse a evaluación en razón de las desviaciones estimadas en los subgrupos que se someten a control, dentro del subgrupo y entre los subgrupos, con el propósito de realizar un contraste entre los valores de los índices de capacidad óptimo y de la variabilidad total, obtenidos en la fase I o fase de estabilización C_{pk} y P_{pk} con respecto a los indicadores óptimos y de variabilidad en la fase II \hat{C}_{pk} y \hat{P}_{pk} .

Los indicadores de capacidad \hat{C}_{pk} y \hat{P}_{pk} son presentados en las expresiones que se presentan a continuación:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{op}} \quad (7)$$

Y para la medida de centramiento o localización:

$$\hat{C}_{pk} = \min \left\{ \hat{C}_{pu} = \frac{USL - \bar{X}}{3\hat{\sigma}_{op}}; \hat{C}_{pl} = \frac{\bar{X} - LSL}{3\hat{\sigma}_{op}} \right\} \quad (8)$$

donde $\hat{\sigma}_{op} = \bar{R}_{fase II} / d_2$ estima la desviación estándar en la fase de control con el propósito de compararla con la obtenida, basados en los parámetros obtenidos en la fase I.

Para la estimación en fase II del **indicador de capacidad con variabilidad total**, la expresión es la idéntica a la expresada en las ecuaciones (3) y (5), la diferencia es que la desviación global s es calculada con base en la información seleccionada para someterse a control,

$$\hat{p}_p = \frac{USL - LSL}{6s} \quad (9)$$

el desplazamiento del proceso o centramiento

$$\hat{P}_{pk} = \min \left\{ \hat{P}_{pu} = \frac{USL - \bar{X}}{3s}; \hat{P}_{pl} = \frac{\bar{X} - LSL}{3s} \right\} \quad (10)$$

Es de suma importancia indicar que esta es una metodología propuesta, debido a que aún existe una discusión acerca de la utilidad de los indicadores de variabilidad total P_p , esta parte de realizar las estimaciones.

La estimación de los indicadores cuando se presentan en la información réplicas de observaciones o subgrupos. Las estimaciones de las desviaciones se expresan de la siguiente forma.

Caso del rango promedio:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^k \left(\frac{f_j R_j}{d_2(n_j)} \right)}{\sum_{j=1}^k f_j} \quad (11)$$

$$\text{donde } f_j = \frac{d_2^2(n_j)}{d_3^2(n_j)}$$

Caso desviación promedio con corrección de sesgo:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^k \left(\frac{f_j s_j}{c_4(n_j)} \right)}{\sum_{j=1}^k h_j} \quad (12)$$

$$\text{donde } h_j = \frac{c_4^2(n_j)}{1 - c_4^2(n_j)}$$

Caso desviación promedio con corrección de sesgo:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j s_j}{\sum_{j=1}^k n_j} \quad (13)$$

Un índice de capacidad C_p puede expresarse en función del índice de capacidad de localización, a través de la siguiente expresión:

$$C_p = \frac{1}{2} (C_{pu} + C_{pl}) \quad (14)$$

Este indicador de capacidad que mide el desplazamiento con respecto al centramiento puede expresarse de la siguiente forma:

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\} = \frac{[a - |\mu - b|]}{3\sigma} = \frac{[d - |2\mu - m|]}{6\sigma} \quad (15)$$

donde $d = (USL - LSL)$, $m = (USL + LSL)$, $a = (USL - LSL)/2$,
 $b = (USL + LSL)/2$

Programa en lenguaje R para determinar el índice de capacidad con valor objetivo T simulación

INDICE DE CAPACIDAD

n<-1000

miu<-67.5

delta<-0.20

sigma<-1.8

LES<-70

LEI<-65

T<-67

xi<-rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)

CP<-((LES-LEI)/(6*(sd(xi))))

CPU<-((LES-mean(xi))/(3*(sd(xi))))

CPM<-((LES-LEI)/(6*sqrt((sd(xi)^2+(T-mean(xi))^2))))

CPCR1<-(((LES-LEI)/(6*(sd(xi))))+w*abs((mean(xi)-LEI)/(3*(sd(xi)))))

CPCR1

INTERVALO DE CONFIANZA CP

chs<-qchisq(p, n, lower.tail = T)

chi<-qchisq(1-p, n, lower.tail = T)

ICCPLS<-(CP*sqrt(chs/(n-1)))

ICCPLI<-(CP*sqrt(chi/(n-1)))

ICCPLI

ICCPLS

2.2. Estudio de caso: índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: pH

Los especialistas han señalado que el ácido del limón proviene principalmente de su compuesto de ácido cítrico. Así mismo, contiene gran cantidad de ácido ascórbico, el cual es esencial para la regeneración y oxigenación de las células corporales. Los estudios han determinado que el limón y sus concentraciones de ácido ascórbico y cítrico disminuyen la

acidez en la sangre, pues sorprendentemente, al ingresar al organismo, este lo procesa como un elemento alcalinizante, por lo que puede ayudar a equilibrar el **potencial de hidrógeno** pH del cuerpo. La Tabla 3 presenta una muestra de valores de pH en una bebida refrescante a base de la fruta del limón.

Tabla 3. Información del pH en un proceso de fabricación de una bebida refrescante a base de frutas de limón.

Subgrupo	pH	
	X ₁	X ₂
1	2.51	2.58
2	2.63	2.72
3	2.74	2.74
4	2.82	2.76
5	2.75	2.75
6	2.78	2.78
7	2.79	2.79
8	2.79	2.80
9	2.81	2.81
10	2.81	2.82
11	2.83	2.83
12	2.84	2.85
13	2.86	2.86
14	2.86	2.87
15	2.88	2.88
16	2.90	2.92
17	2.93	2.98
18	3.15	3.22
19	3.20	3.25
20	3.15	3.05
21	2.95	2.93
22	2.92	2.90
23	2.88	2.81
24	2.72	2.65

Fuente: Empresa de alimentos en la ciudad de Barranquilla.

Tabla 4. Especificaciones de la variable pH en la fabricación de una bebida refrescante a base de limón.

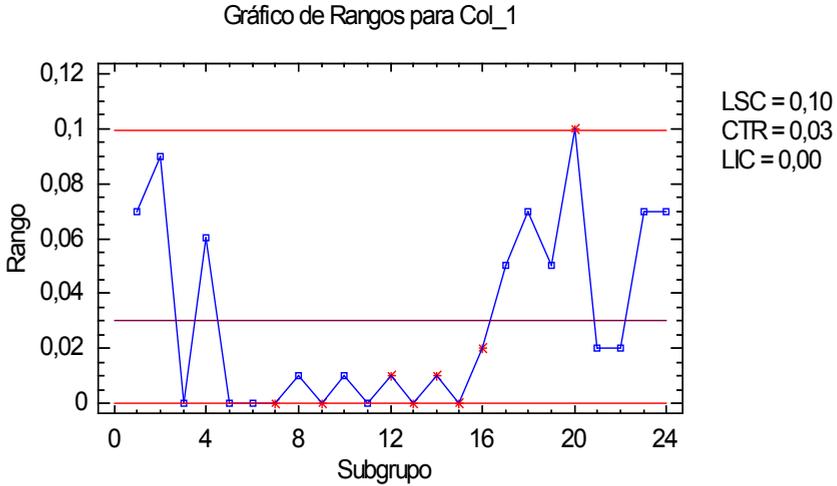
Variable	Criterio de aceptación	Unidades
pH		Potencial de hidrógeno
USL	3.5	
LSL	2.5	

Fuente: Empresa de alimentos en la ciudad de Barranquilla.

A continuación, se evalúan los índices de capacidad univariado paramétrico de la característica de calidad pH, con el propósito de estimar el índice de capacidad univariado.

Contrastando el supuesto de normalidad de la información de esta característica de calidad, se ejecutó la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov para esta variable (Smirnov, 1960). El supuesto de normalidad no se rechazó para las variables pH con un p-valor de 0.26. Los parámetros del proceso se estiman mediante un monitoreo en el tiempo de esta variable aplicando las cartas de control Shewhart para la medida de variabilidad, carta R, como puede verse en la **Gráfica 1**. Estos límites de control iniciales se determinan mediante las ecuaciones presentadas en la **Tabla 1**, de la siguiente forma: límite superior $UCL = 0.09938$, $Cl = 0.03041$, el límite inferior de control $LCL = 0.00$ y el coeficiente de control $d_2 = 1.128$ asociado al tamaño del subgrupo $n = 2$ (Ver **Tabla 4**).

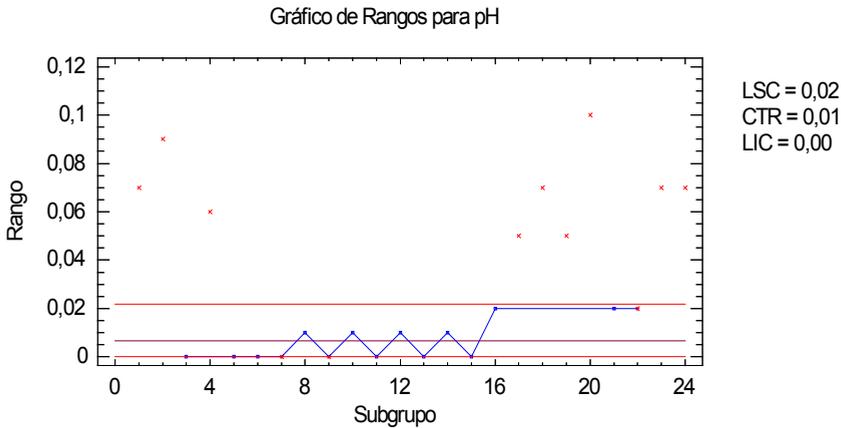
Gráfica 1. Carta de control R para la variable pH, con inestabilidad estadística.



Estabilizada la carta de control R, los límites de control en la fase I son los siguientes: límite superior $UCL = 0.0217819$, $Cl = 0.0066$ y el límite inferior de control $LCL = 0.00$; el coeficiente de control $d_2 = 1.128$ asociado al tamaño del subgrupo $n = 2$, tal y como se observa en la **Tabla 4**¹.

1 En este caso de estudio no se presenta la carta de medida de localización. El lector puede evidenciar que el comportamiento de la carta X es inestable; en condiciones normales el proceso debe ser estabilizado en el promedio para evaluar con precisión los indicadores de capacidad C_p .

Gráfica 2. Carta de control R para la variable pH, con estabilidad estadística.



Según la **Tabla 4** las especificaciones de esta variable **USL = 3.5; LSL = 2.5**, la desviación estándar es de **0.028**. Sin estabilizar estadísticamente el proceso, una vez encontradas las causas especiales que generan el comportamiento no aleatorio en la carta de control, son excluidos los puntos generadores de dicho comportamiento. Posteriormente, es recalculada la desviación estándar del proceso con un valor de **0.00591**

$$C_{p(\text{pH})} = \frac{3.5-2.5}{6 \times 0.00591} = 28.2$$

El índice de capacidad a corto plazo u óptimo, en la ecuación (1), es de **$C_p = 28.2$** , valor que permite inferir en el primer análisis un alto cumplimiento de las especificaciones. No obstante, se debe evaluar el indicador global para realizar un análisis más ajustado a la realidad. En este cálculo preliminar la estimación de la desviación estándar es a partir del rango móvil, asumiendo tamaño de subgrupos igual a dos, el centramiento del proceso se estima en **$\mu = 2.855$** , en la ecuación (4)

$$C_{pk(pH)} = \min \left\{ C_{pu} = \frac{3.5 - 2.885}{3 \times 0.00591}; C_{pl} = \frac{2.885 - 2.5}{3 \times 0.00591} \right\} \\ = \min\{34.685; 21.713\} = 21.713$$

El valor de $C_{pk} = 21.713$ permite establecer inicialmente que esta característica de calidad, una vez cumplida con las condiciones de estabilidad estadística, cumple también con las especificaciones de diseño, y posee un desplazamiento hacia el límite de especificación inferior **LSLLSL**.

Usando la ecuación (3), el índice de capacidad **a largo plazo** o **varianza global**, en este caso, presenta los siguientes resultados:

$$P_{p(pH)} = \frac{3.5 - 2.5}{6 \times 0.152361} = 1.09382$$

El valor del indicador con varianza global $P_{p(pH)} = 1.093$ en contraste con el indicador de capacidad óptimo $C_p = 28.2$ expone una diferencia importante. Así mismo, permite inferir inconvenientes en la estabilización estadística de la característica de calidad evaluada. Esto es confirmado con la evaluación del indicador de localización o centramiento del proceso de la variabilidad global, ecuación (5):

$$P_{pk(pH)} = \min \left\{ P_{pu} = \frac{3.5 - 2.885}{3 \times 0.152361}; P_{pl} = \frac{2.885 - 2.5}{3 \times 0.152361} \right\} \\ = \min\{1.3448; 0.842\} = 0.842$$

El resultado $P_{pk(pH)} = 0.842$ induce a valores de **pH** desplazados hacia el límite de especificación inferior. Aunque los indicadores óptimos y variabilidad global infieren un cumplimiento de esta característica de calidad, resulta inconveniente poseer un **pH** ubicado hacia el límite de especificación inferior, porque acidifica el producto y, por ende, no es comercialmente viable.

Finalmente, es pertinente destacar en la evaluación del pH, que los indicadores de capacidad evaluados $P_{p(\text{pH})}$ y $C_{p(\text{pH})}$ evidencian una diferencia considerable entre estos, es decir, el proceso muestra inestabilidad estadística, lo que presume dificultad en estimar los parámetros de esta variable.

En el caso de que la característica de calidad no cumpla con el supuesto de normalidad, el indicador de capacidad se puede evaluar mediante dos formas:

- a) Realizando una transformación matemática a la información. De esta manera, las pruebas de bondad de ajuste no rechazan la hipótesis nula de que los datos se ajustan a una distribución normal.
- b) Aplicando un indicador de capacidad no paramétrico en donde se requiere evaluar algunos percentiles necesarios para evaluar el indicador.

2.3. Estudio de caso: índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: humedad

Un sensor se ha diseñado para medir la humedad presente en la fabricación de hormigón. Los fabricantes deben producir siempre un hormigón de calidad siguiendo unas estrictas especificaciones y controlando también al máximo los costes. Las especificaciones de diseño inferior y superior son en su orden $LSL=0.9$ $USL=1.2$. La información de dichas mediciones se presenta en la **Tabla 5**, en la cual se evalúa el indicador P_p de esta característica de calidad.

Programa en lenguaje R para determinar el índice de capacidad Pp con valor objetivo T simulación

INDICE DE CAPACIDAD

USL=1.2

SL=1.05

LSL=0.9

p=0.025

n=48

x<-

PP<-((USL-LSL)/(6*(sd(xi))))

PPU<-((USL-mean(xi))/(3*(sd(xi))))

PPL<-((mean(xi)-LSL)/(3*(sd(xi))))

PPK<-min(PPU,PPL)

PP

PPK

Tabla 5. Información de la humedad en la fabricación de hormigón.

Humedad		
1	0,9980	0.9941
2	1,0816	1.0339
3	1,0403	1.0615
4	1,2663	1.0555
5	1,0385	1.0801
6	1,0152	0.9972
7	1,0913	1.0913
8	1,0668	1.0421
9	1,0458	1.0285
10	1,0762	1.2779
11	1,1324	1.0994
12	1,0969	1.0643

13	1,0377	1.1016
14	1,0588	1.0507
15	1,2760	1.0810
16	1,0252	1.0930
17	1,0345	1.1337
18	1,0712	1.3860
19	0,9971	1.0813
20	1,0432	1.1309
21	1,0809	1.0809
22	1,1046	1.0580
23	1,0633	1.0692
24	1,0955	1.2850

Fuente: Empresa cementera.

La información de la característica de calidad (humedad) del hormigón es sometida a una transformación matemática, $-0.309886 + 0.643924 \times A \operatorname{senh} \left[\frac{(X-1.05247)}{0.0211400} \right]$ con el propósito de asumir en la información transformada el supuesto de normalidad. Los datos estadísticos obtenidos en la transformación son los siguientes: $\hat{\mu} = 0.039318$, $\hat{\sigma} = 0.907056$. Los límites de especificaciones obtenidos mediante la transformación son, en su orden, **USL = 1.6089** y **LSL = -1.3662**. El indicador de capacidad de centramiento para la variabilidad total es calculado de la siguiente manera:

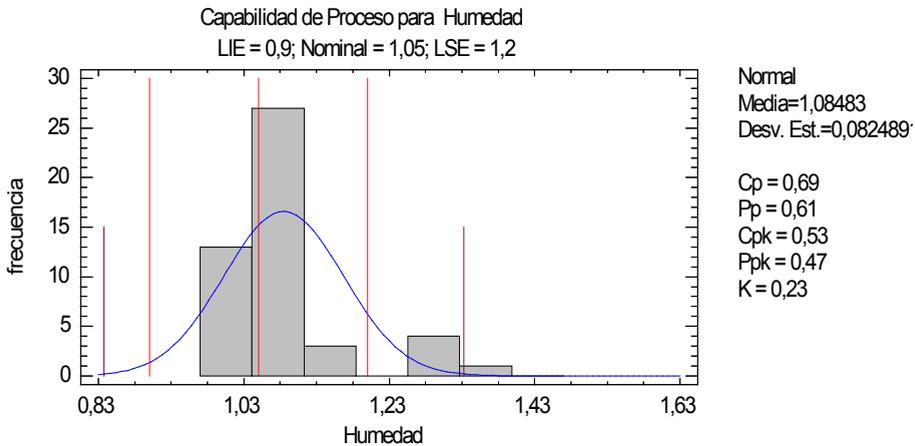
$$P_{p(\text{hum})} = \frac{1.6089 - (-1.36629)}{6 \times 0.907056} = 0.5466$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{pk}(\text{hum}) &= \min \left\{ \hat{P}_{pu} = \frac{1.6089 - 0.039318}{3(0.907056)}; \hat{P}_{pl} \right. \\ &= \left. \frac{0.039318 - (-1.3662)}{3(0.907056)} \right\} \end{aligned}$$

$$\hat{P}_{pk}(\text{hum}) = \min\{\hat{P}_{pu} = 0.5768; \hat{P}_{pl} = 0.5165\} = 0.5165$$

Por otro lado, $\hat{P}_{pl}(\text{hum}) = 0.5165$ indica valores descentrados hacia el límite de especificación inferior LSL e incumplimiento de las especificaciones, es decir, la existencia de unidades no conformes se presenta con una probabilidad mayor en el límite inferior, como se ilustra en la **Gráfica 3**.

Gráfica 3. Índice de capacidad de la característica humedad. Comportamiento sin transformación.



2.4. Estudio de caso: índice de capacidad univariado paramétrico. Característica de calidad: temperatura de motores

Una empresa del sector metalmeccánico fabrica motores para automóvil utilizados para una gama de funcionamiento. El departamento de control de calidad realiza un monitoreo de la temperatura de cada uno de los motores en una semana de producción. Esta temperatura tiene las siguientes especificaciones **LSL = 97.5** y **USL = 100.5** en grados centígrados, lo cual también depende de cómo esté configurado el sistema. En la **Tabla 6** se presenta la información registrada en ese periodo de tiempo.

Programa en lenguaje R para determinar el índice de capacidad Pp
con valor objetivo T simulación

INDICE DE CAPACIDAD VARIANZA GLOBAL

USL=100

SL=99

LSL=98

P=0.025

n=48

```
xi<-c(0.998 0.9941  1.0816 1.0339 1.0403 1.0615 1.2663 1.0555
1.0385      1.0801 1.0152 0.9972 1.0913 1.0497 1.0668 1.0421
1.0458      1.0285 1.0762 1.2779 1.1324 0.9943 1.0969 1.0643
1.0377      1.1016 1.0588 1.0507 1.276  1.081  1.0252 1.093
1.0345      1.1337 1.0712 1.386  0.9971 1.0813 1.0432 1.1309
1.0809      1.0852 1.1046 1.058  1.0633 1.0692 1.0955 1.285)
```

$Pp <- ((USL - LSL) / (6 * (sd(xi))))$

Pp

$Ppu <- ((USL - mean(xi)) / (3 * (sd(xi))))$

$Ppl <- ((mean(xi) - LSL) / (3 * (sd(xi))))$

$PpK <- \min(Ppu, Ppl)$

Ppk

INTERVALO DE CONFIANZA CP

$chs <- qchisq(p, n, lower.tail = T)$

$chi <- qchisq(1-p, n, lower.tail = T)$

$ICPpLS <- (Pp * \sqrt{chs / (n-1)})$

$ICPpLI <- (Pp * \sqrt{chi / (n-1)})$

ICPpLI

ICPpLS

Tabla 6. Especificaciones de la variable "temperatura de motores".

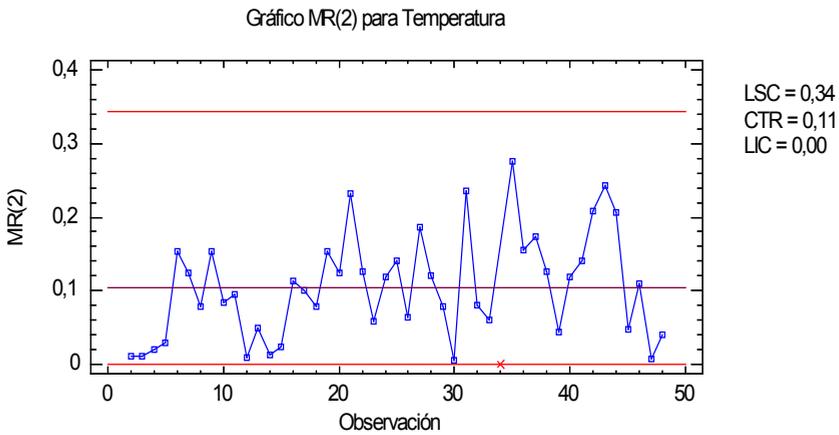
Subgrupo	Temperatura	Subgrupo	Temperatura
1	99,5340	25	99,4770
2	99,5230	26	99,4120
3	99,5120	27	99,5990
4	99,4920	28	99,4790
5	99,4620	29	99,5570
6	99,6160	30	99,5620
7	99,4920	31	99,3260
8	99,5710	32	99,4060
9	99,4170	33	99,3450
10	99,5020	34	99,6950
11	99,4060	35	99,6200
12	99,4160	36	99,4640
13	99,4650	37	99,2900
14	99,4510	38	99,4170
15	99,4260	39	99,3730
16	99,5400	40	99,4910
17	99,4390	41	99,3510
18	99,5170	42	99,5590
19	99,6700	43	99,3160
20	99,5460	44	99,5230
21	99,3150	45	99,5700
22	99,4410	46	99,4600
23	99,4990	47	99,4670
24	99,6170	48	99,5080

Fuente: Empresa metalmecánica.

Aplicando la prueba de bondad de ajuste de Anderson Darling (Cornel-Brizio & Hernández-Montoya, 2010), el supuesto de normalidad no es rechazado con un **p-valor** de 0.949. El índice de capacidad a corto plazo u óptimo se presenta estabilizando estadísticamente el proceso; en este caso es utilizada una carta de control de rango móvil, debido a que el tamaño del subgrupo es la unidad.

En la **Gráfica 4** se observa el comportamiento de la temperatura del motor, comportamiento que permite asegurar que esta característica de calidad posee un comportamiento aleatorio, es decir, solo existen causas comunes en el proceso. En este caso se estiman los parámetros del promedio y la desviación estándar.

Gráfica 4. Carta de control de rango móvil MR para la variable temperatura, con estabilidad estadística.



El índice de capacidad a corto u óptimo plazo para la temperatura de los motores se representa en:

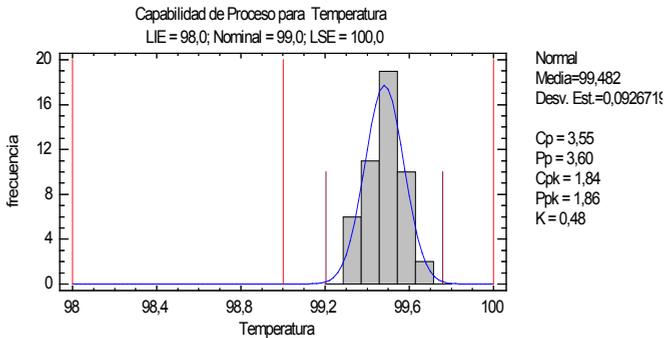
$$C_{p(\text{temp})} = \frac{100 - 98}{6 \times 0.0917} = 3.54$$

La estimación de la desviación estándar es a partir del rango móvil, $\sigma_{\text{opt}} = 0.0917$, el centramiento del proceso se estima en $\mu = 99.47$, en la ecuación (4)

$$C_{pk(\text{pH})} = \min \left\{ C_{pu} = \frac{100 - 99.47}{3 \times 0.0917}; C_{pl} = \frac{99.47 - 98}{3 \times 0.0917} \right\} = \min\{1.83; 5.25\} = 1.83$$

Los valores de $C_{p(\text{temp})} = 3.54$ y $C_{pk} = 1.83$ indican que la temperatura, característica de calidad, cumple con las especificaciones de diseño con amplitud; a pesar de estas condiciones, el centramiento de la información revela un desplazamiento hacia el límite de especificación superior USL , como muestra la **Gráfica 5**.

Gráfica 5. Índice de capacidad óptimo o a corto plazo. Temperatura de los motores.



Por otro lado, el anterior indicador presume ajustes en el proceso con el objetivo de centralizar la característica de calidad. En este sentido, el departamento de calidad de esta organización realizó modificaciones para corregir este desplazamiento. Entonces, ¿cuál es el procedimiento adecuado para verificar que dichas correcciones son las adecuadas? ¿permiten centralizar el proceso?

En este caso es necesario seleccionar una nueva información de la característica de calidad evaluada, en este caso la temperatura, con la intención de verificar si las acciones desarrolladas para este ajuste del desplazamiento son las adecuadas. En la **Tabla 7** se presenta la información posterior seleccionada en el caso de la temperatura.

Tabla 7. Información de verificación, ajustes en el centramiento de la temperatura de motores en la empresa metalmecánica.

Subgrupo	Temperatura
1	99,6109
2	99,456
3	99,349
4	99,4836
5	99,2927
6	99,4967
7	99,5075
8	99,5936
9	99,3739
10	99,5445
11	99,513
12	99,5037
13	99,6111
14	99,2771
15	99,4242
16	99,3424
17	99,6381
18	99,4983
19	99,7237
20	99,3786

Los índices de capacidad son estimaciones de las condiciones presentadas en la información de control, por lo que esta se contrasta con la información obtenida en la información histórica, es decir, la obtenida con la característica de calidad estabilizada estadísticamente.

La desviación estimada en esta información es de $\hat{\sigma}_{opt} = 0.13977$, lo que implica un índice de capacidad estimado de:

$$\hat{C}_{p(temp)} = \frac{100 - 98}{6 \times 0.13977} = 2.384$$

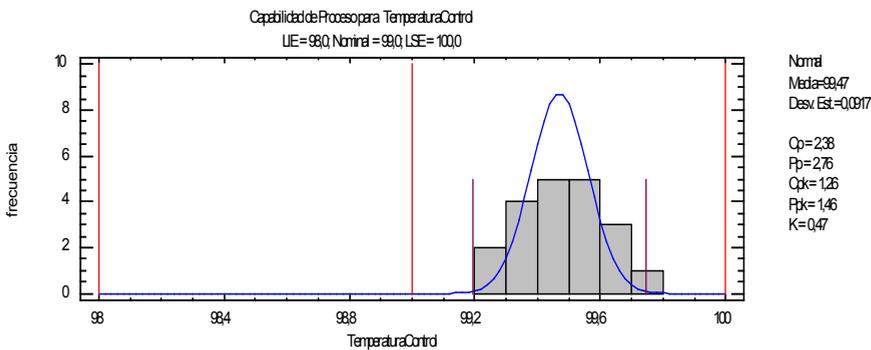
el centramiento del proceso estimado es de $\hat{\mu} = 99.47$, como se ubica en la ecuación (4):

$$C_{pk(pH)} = \min \left\{ C_{pu} = \frac{100 - 99.47}{3 \times 0.13977}; C_{pl} = \frac{99.47 - 98}{3 \times 0.13977} \right\} =$$

$$\min\{1.26; 3.50\} = 1.26$$

Estas estimaciones evidencian correcciones del proceso no adecuadas; obsérvese que el índice de capacidad estimado en la información de control o verificación posee un valor menor al obtenido en la fase I de estabilidad estadística. Además, la estimación de su centramiento no presentó cambios. En la **Gráfica 6** se observa un desplazamiento aún mayor hacia el límite de especificación superior USL.

Gráfica 6. Índice de capacidad una vez realizado el ajuste operativo del proceso para modificar el centramiento de la temperatura de los motores.



El índice de capacidad de variabilidad total es definido como:

$$\hat{P}_{p(\text{temp})} = \frac{100 - 98}{6 \times 0.1206} = 2.763$$

Entre tanto, los indicadores de centramiento:

$$\widehat{P}_{pk}(\text{temp}) = \min \left\{ \widehat{P}_{pu} = \frac{100 - 99.482}{3(0.1206)}; \widehat{P}_{pl} = \frac{99.482 - 90.000}{3(0.1206)} \right\}$$

$$\widehat{P}_{pk}(\text{temp}) = \min \{ \widehat{P}_{pu} = 1.4648; \widehat{P}_{pl} = 4.062 \} = 1.464$$

Se encuentra que la temperatura presentó un índice de capacidad de centramiento con un valor de $\widehat{P}_{pu}(\text{temp}) = 1.464$. Además, resalta el hecho de que haya un cumplimiento amplio de las especificaciones de diseño, y que se revela un desplazamiento pronunciado hacia el límite de especificación superior USL.

2.5. Intervalo de confianza de los índices de capacidad de procesos

Vargas (2006) define el intervalo de confianza para estos índices de capacidad univariados mediante la distribución chi cuadrado $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1, \alpha}^2$ de la siguiente forma:

$$P \left[\frac{(\text{USL}-\text{LSL})}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \leq \frac{1}{6\sigma} \leq \frac{(\text{USL}-\text{LSL})}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right] = 1 - \alpha \quad (16)$$

el intervalo $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para C_p es:

$$\left[\widehat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}}, \widehat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right] \left[\widehat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}}, \widehat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right] \quad (17)$$

El intervalo de confianza para el índice de capacidad de centramiento está definido de la siguiente forma:

$$P \left[\hat{C}_{pk} \left\{ 1 - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right\} \leq C_{pk} \right. \\ \left. \leq \hat{C}_{pk} \left\{ 1 + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right\} \right] = 1 - \alpha$$

el intervalo $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para C_{pk} es:

$$\left[\hat{C}_{pk} \left\{ 1 - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right\}; \hat{C}_{pk} \left\{ 1 + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right\} \right] \quad (18)$$

En el caso de la variable pH los intervalos de confianza evaluados para esta característica de calidad son:

El índice de capacidad **a largo plazo** o **varianza global**, que en el pH es:

$$P_{p(\text{pH})} = \frac{3.5 - 2.5}{6 \times 0.152361} = 1.09382$$

Y el intervalo $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para p_p es:

$$\left[1.09382 \sqrt{\frac{7.814}{24-1}}, 1.09382 \sqrt{\frac{38.075}{24-1}} \right]$$

Entonces, los valores del límite inferior y superior del intervalo de confianza son:

$$[0.779; 1.4073]$$

El índice de capacidad de este proceso se encuentra entre 0.7794 y 1.4073 con una confiabilidad del 95%.

2.5. Índice de capacidad univariado paramétrico con valor objetivo T

Chan *et al.* (1988^a) y Shinde & Khadse (2009) proponen un indicador de capacidad utilizando un valor objetivo T ,

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sigma^T} \quad (19)$$

Donde en $\sigma^T = [E(X - T)^2]^{\frac{1}{2}}$, T es el valor objetivo del proceso. El parámetro σ^T es conocido y evaluado en la fase I del monitoreo del proceso, mediante cartas de control.

$$\hat{\sigma}^T = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - T)^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Consecuentemente, un estimador para C_{pm} es el índice de capacidad,

$$\tilde{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}^T} \quad (21)$$

La demostración de la anterior formulación se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
C_{pm} &= \frac{USL - LSL}{6\sigma^T} = \frac{USL - LSL}{6[E(X - T)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{USL - LSL}{6[E(X - \mu + \mu - T)^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{USL - LSL}{6\{E[(X - \mu)^2 + (\mu - T)^2 - 2(X - \mu)(\mu - T)]\}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{USL - LSL}{6\{[E(X - \mu)^2 + (\mu - T)^2 - 2(\mu - T)E(X - \mu)]\}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{USL - LSL}{6\{[\sigma^2 + (\mu - T)^2 - 2(\mu - T)(E(X) - \mu)]\}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Por tanto, el indicador de capacidad con valor objetivo se define como:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad (22)$$

En cuanto al índice de capacidad de localización con valor objetivo, el esquema es similar a las propuestas clásicas de índices de capacidad:

$$C_{pmk} = \min\{C_{pmu} ; C_{pml}\} \quad (23)$$

$$\text{donde } C_{pmu} = \frac{USL - \mu}{3\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} \text{ y } C_{pml} = \frac{\mu - LSL}{3\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

La relación del índice de capacidad clásico C_p con respecto al índice de capacidad con valor objetivo C_{pm} se presenta en la siguiente demostración:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{USL - LSL}{\sigma}}{6\left\{\frac{\sigma^2 + (\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{USL - LSL}{6\sigma}}{\left\{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Entonces,

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\left\{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (23)$$

El desarrollo teórico muestra claramente un $C_{pm} < C_p$ para un valor T como referente.

2.6. Estudio de caso: evaluación del índice de capacidad univariado paramétrico.

Característica de calidad: valoración

En la producción de la cerveza algunos de los fabricantes utilizan como aditivo el azúcar (la cual produce un poco más de gas) en lugar de la dextrosa, aunque la diferencia sea poco significativa. En la **Tabla 8** se presenta la información codificada del contenido de sacarosa de una cervecera nacional. El propósito es evaluar la capacidad de cumplimiento de las especificaciones de diseño presentadas en la **Tabla 9**.

Tabla 8. Información codificada del contenido de sacarosa en la producción de cerveza.

Subgrupo	Contenido de sacarosa
1	62,072
2	63,939
3	65,045
4	67,261
5	68,022
6	68,075
7	68,103

8	67,965
9	67,827
10	68,021
11	68,212
12	68,394
13	68,883
14	67,972
15	68,049
16	67,789
17	67,902
18	67,759
19	67,063
20	67,259
21	67,850
22	67,936
23	67,959
24	68,198
25	68,459
26	68,625
27	68,816
28	68,953
29	69,006
30	69,062
31	69,742
32	69,919
33	70,294
34	71,013
35	70,863
36	70,212
37	70,158
38	69,899
39	68,112
40	67,927
41	67,873
42	67,032
43	66,873
44	66,902
45	67,945

46	68,009
47	67,887
48	70,044

Fuente: Empresa cervecera nacional.

Tabla 9. Especificaciones de la variable codificada del contenido de sacarosa en la producción de cerveza.

Contenido de sacarosa	Unidad
USL	70
LSL	65
T	68

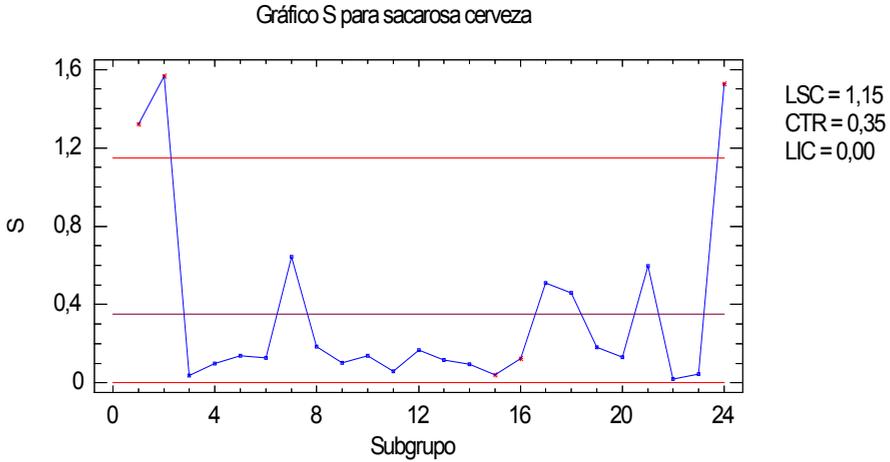
Fuente: Empresa cervecera nacional.

El resultado del índice de capacidad a corto plazo, denominado también como óptimo, parte inicialmente de estabilizar estadísticamente la característica de calidad. Esto se logra aplicando las cartas de control de Shewhart, específicamente en este caso de estudio, la carta X-S. La evaluación de la capacidad del contenido de sacarosa se determina mediante el siguiente procedimiento:

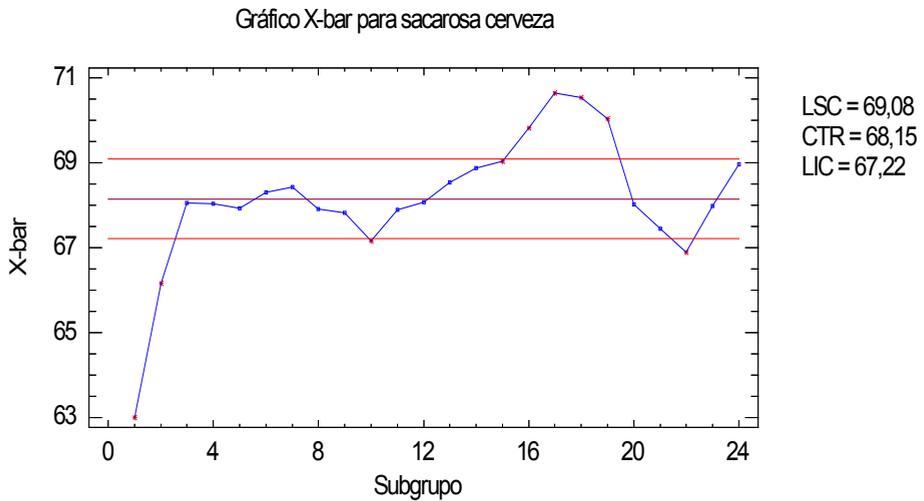
Inicialmente, se elabora la carta de control Shewhart para la medida de variabilidad, en este caso la carta de control S^2 . Las cartas de control inicial, fase I de control, se encuentran en la **Gráfica 7**, en la medida de variabilidad y la medida de localización. En la **Gráfica 8** se muestra inicialmente un proceso no estable; se asume una causa asignable en los subgrupos con comportamientos no aleatorios, recordando que esta estabilización debe presentarse inicialmente en la carta de control S; una vez estabilizada esta, se procede a estabilizar la carta de control de la medida de localización X, como se ve en la **Gráfica 9**.

2 Es de aclarar que este estadístico S no cumple con el supuesto de normalidad, por lo que se recomienda elaborar la carta de control de la varianza S^2 .

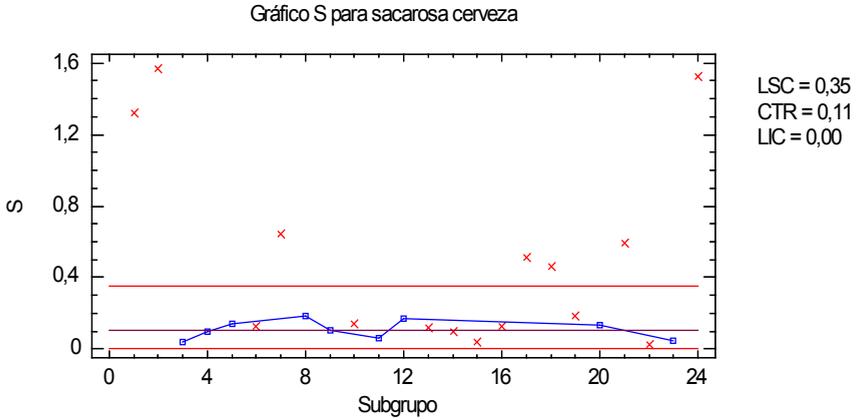
Gráfica 7. Carta de control de S para la variable contenido de sacarosa, con causas no aleatorias.



Gráfica 8. Carta de control de X para la variable contenido de sacarosa, con causas no aleatorias

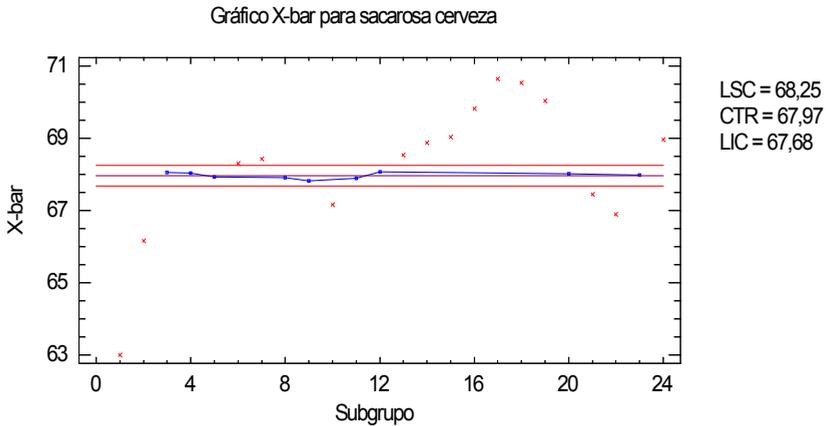


Gráfica 9. Carta de control de S para la variable contenido de sacarosa, estabilizada estadísticamente.



Estabilizada la carta S, se deben estimar los parámetros de esta característica de calidad. Es recomendable que de forma sistemática se excluyan los puntos considerados provenientes de causas especiales o asignables en la carta de la medida de localización. En este caso, en la **Gráfica 10** se muestra el promedio para el contenido de sacarosa en la cerveza.

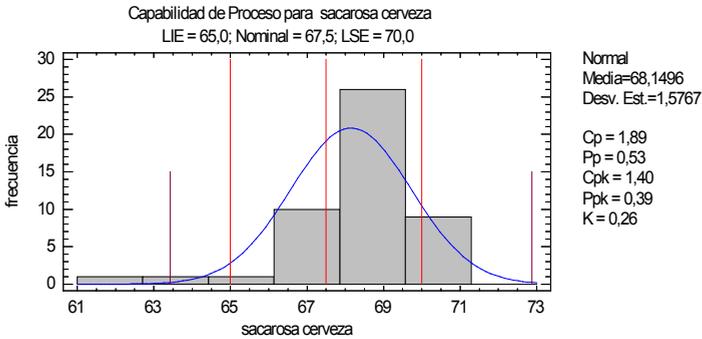
Gráfica 10. Carta de control de X para la variable contenido de sacarosa, estabilizada estadísticamente.



La estabilización estadística de ambos estadísticos de control permite realizar una estimación de los parámetros de esta característica de calidad. En el caso del contenido de sacarosa las estimaciones arrojadas son las siguientes: la desviación óptima o a corto plazo $\sigma_{op} = 0.1341$, el promedio del proceso $\mu = 67.96$

En este caso, se estiman los indicadores de capacidad con valor objetivo C_{pm} sujeta a los parámetros obtenidos anteriormente, véase **Gráfica 11**.

Gráfica 11. Índice de capacidad del contenido de sacarosa de la fabricación de cerveza.



Por tanto, el indicador de capacidad con valor objetivo del contenido de sacarosa se define como en la ecuación (21):

$$C_{pm} = \frac{70 - 65}{6\{0.1341^2 + (67.96 - 68)^2\}^{\frac{1}{2}}} = 5.5499$$

En el índice de capacidad de centramiento con valor objetivo C_{pmk} , el esquema es evaluado para el contenido de sacarosa de la siguiente forma, donde

$$C_{pmu} = \frac{70 - 67.96}{3\{0.1341^2 + (67.96 - 68)^2\}^{\frac{1}{2}}} = 4.859$$

$$C_{pml} = \frac{67.96 - 65}{3\{0.1341^2 + (67.96 - 68)^2\}^{\frac{1}{2}}} = 7.050$$

Entonces,

$$C_{pmk} = \min\{4.859 ; 7.050\} = 4.859$$

La cantidad de sacarosa en el proceso de fabricación de la cerveza indica que el desempeño del proceso es óptimo. El centramiento está desplazado hacia el límite de control superior, por lo que es recomendable ajustar este centramiento para disminuir el contenido de sacarosa en esta bebida.

3. Propuestas de indicadores de capacidad univariados paramétricos

Este capítulo aborda los indicadores de capacidad clásicos aplicados frecuentemente en los procesos productivos. Los indicadores univariados propuestos en la literatura parten del paradigma de la dualidad en los procesos productivos o de servicio. Existen productos conformes y no conformes, omitiendo de hecho algunas condiciones habituales. Algunos productos no cumplen con algunas de las especificaciones establecidas en el diseño, pero su funcionalidad se ajusta a las necesidades del cliente; este tipo bienes, el autor los denomina **producto con calidad comercial**.

3.1. Indicador con variabilidad global para K desviaciones

Desde otro punto de vista, una modificación del índice de capacidad clásico está definido como el índice del rendimiento o índice de capacidad a largo plazo, como muestra la siguiente ecuación:

$$P_p = \frac{USL - LSL}{k\sigma} P_p = \frac{USL - LSL}{k\sigma} \quad (24)$$

Una estimación de este indicador se define de la siguiente forma,

$$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{kS} \quad (25)$$

En esta propuesta el valor de k_k es condicionado por el investigador; un valor por encima de seis (valor tradicional) implica ser más conservadores en la evaluación del indicador.

3.2. Indicadores de capacidad de precisión

Algunos autores han realizado modificaciones de los índices de capacidad con el propósito de estimar un indicador de precisión, es decir, la diferencia entre el promedio del proceso μ y las especificaciones de diseño. Esta investigación se limita a casos con límites de especificación bilateral:

$$C_a = 1 - \frac{\left| \frac{\mu - \frac{[USL+LSL]}{2}}{\frac{[USL-LSL]}{2}} \right|}{d} = 1 - \frac{|\mu - m|}{d} \quad (25)$$

En las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) los parámetros μ y σ son respectivamente el promedio y la desviación estándar del proceso, USL y LSL son los límites de especificación superior e inferior, $m = (USL + LSL) / 2$, $d = (USL - LSL) / 2$ y T es el valor objetivo o *target*.

Juran (1974) propuso el índice $C_p C_p$, donde se considera la relación existente entre las tolerancias de ingeniería y la natural, es decir, este indicador expresa la precisión del proceso.

Chan *et al.* (1988a) agregan en la propuesta $C_{pm} C_{pm}$ – véase la ecuación (9) – una penalización para modificaciones del proceso cuando este se aleja del valor objetivo. Pearn *et al.* (1992) proponen el índice $C_{pmk} C_{pmk}$ más sensible al rendimiento de las mediciones tradicionales $C_p C_p$, $C_{pk} C_{pk}$ o $C_{pm} C_{pm}$, el cual calcula la desviación de la media con respecto al valor objetivo. Para medir el centramiento Pearn, Lin & Chen (1998) propusieron $C_a C_a$ como el índice de precisión. Lin & Pearn (2003) señalaron una relación entre los índices de las ecuaciones (2) y (4) como:

$$C_{pk} = C_p (1 - C_a) \quad (26)$$

3.3. Indicador de capacidad variabilidad global estandarizado

Entre los criterios para evaluar el índice de capacidad con variabilidad global P_p , se encuentra el uso de la estandarización Z de la siguiente forma:

$$Z_{USL} = \frac{USL - \hat{\bar{X}}}{\sigma_{OPT}} \quad (27)$$

$$Z_{LSL} = \frac{\hat{\bar{X}} - LSL}{\sigma_{OPT}} \quad (28)$$

Para el cálculo del índice de desempeño real del proceso se utiliza la siguiente formulación:

$$P_p = \frac{1}{3} \min(Z_{USL}, Z_{LSL}) \quad (29)$$

3.4. Indicador de capacidad con medida de probabilidad de producto conforme

Al aplicar las medidas de probabilidad en el caso univariado, es posible realizar la estimación del indicador de capacidad mediante

$$C_p = \frac{1}{3} \varphi^{-1}[P] \quad (30)$$

donde $\varphi^{-1}[\]$ es la inversa de la distribución normal estándar y P es la medida de probabilidad de cumplimiento de las especificaciones $P(LSL \leq X \leq USL)$.

$$C_{pk} = \frac{1}{6} \max [|\varphi^{-1}[P_{USL}]|, |\varphi^{-1}[P_{LSL}]|] \quad (31)$$

donde

$$P_{\text{USL}} = P(X > \text{USL}) \text{ y } P_{\text{USL}} = P(X < \text{LSL})$$

3.5. Estudio de caso: indicadores de capacidad univariados paramétricos con medida de probabilidad

El peso de un producto comercial en su etapa de estabilización estadística posee los siguientes parámetros: $\sigma = 2.5$ gramos y el promedio del proceso $\mu = 100$ gramos. Se procede a evaluar el desempeño del proceso con base en el índice de capacidad clásico si las especificaciones son las siguientes: $\text{USL} = 105$, $\text{LSL} = 98$.

$$\begin{aligned} P(98 \leq X \leq 105) &= P(X \leq 105) - P(X \leq 98) \\ &= P\left(Z \leq \frac{105 - 100}{2.5}\right) - P\left(Z \leq \frac{98 - 100}{2.5}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(98 \leq X \leq 105) &= P(Z \leq 2.0) - P(Z \leq -2.0) = 0.9772 - 0.022 \\ &= 0.9544 \end{aligned}$$

entonces según la ecuación (30) se muestra que el indicador es:

$$C_p = \frac{1}{3} \varphi^{-1}[0.9544] = \frac{1}{3} [1.6901] = 0.563$$

El $C_p = 0.563$ muestra que la característica de calidad peso del producto no cumple con las especificaciones de diseño.

El desplazamiento del centramiento según la ecuación (3) expone que las medidas de probabilidad son en su orden: $P_{\text{USL}} = P(X > 105) = 0.0227$ y $P_{\text{USL}} = P(X < \text{LSL}) = 0.0227$, lo que implica que es un proceso cen-

trado, es decir, sus medidas de probabilidad de no conformes son iguales para ambos límites de especificación.

$$C_{pk} = \frac{1}{6} \max [|\varphi^{-1}[0.0227]|, |\varphi^{-1}[0.0227]|] = \frac{1}{6} \times 2.0 = 0.333$$

Este valor de 0.333 muestra una característica de calidad incapaz de ajustarse a las condiciones establecidas en las especificaciones.

3.6. Índice de capacidad comercial univariado paramétrico

En esta propuesta, Herrera (2019) requiere obtener una medida de probabilidad w , o peso, en donde el no cumplimiento de una de las especificaciones no impediría la comercialización del producto.

El indicador paramétrico clásico presentado por Montgomery (2004a) considera un valor nominal centrado con respecto a la tolerancia establecida en el proceso. El nuevo **índice de capacidad comercial** propuesto es el resultado de adicionar al índice de capacidad clásico C_p y el incremento calculado a partir del índice unilateral asignado con **calidad comercial**. Este aumento se obtiene a través de una medida de probabilidad w determinada a partir de una distribución conocida paramétrica o estimada no paramétrica mediante aproximaciones a distribuciones conocidas.

Seguidamente, se presenta la modificación de la ecuación (2) presentada por Kane (1986) en el monitoreo y evaluación del desempeño de un producto, en procesos productivos descentrados. La estructura del **índice de capacidad comercial** propuesto en este trabajo de investigación se define de la siguiente forma:

$$C_{pCRk}(a, b) = \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sigma} \right\} + \left\{ (a - b)^2 w \times \left| \frac{a \times USL - \mu(a - b) - b \times LSL}{3\sigma} \right| \right\} \quad (32)$$

donde **USL** y **LSL** son los límites de especificaciones superior e inferior respectivamente, las constantes **a** y **b** se le asignan valores de cero o uno, si el límite de especificación superior posee **calidad comercial** $C_{pCR}(1,0) = C_p + w \times C_{pu}$, como en la ecuación (32); o en su defecto $C_{pCR}(0,1) = C_p + w \times C_{pl}$, como en la ecuación (31); cuando las constantes son de igual valor $C_{pCR}(1,1) = C_{pCR}(0,0) = C_p$ el índice es de capacidad clásico.

El peso **w**, asumiendo normalidad, es la medida de probabilidad del límite inferior de especificaciones.

$$w = F(\text{USL}) = P \left[Z \leq \frac{\text{LSL} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right] \quad (33)$$

Por otro lado, el indicador de capacidad del límite superior está dado por la siguiente ecuación:

$$C_{pCRu} = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6\sigma} + w \frac{\text{USL} - \mu}{3\sigma} = C_p + wC_{pu} = C_{pCRk}(1,0) \quad (34)$$

Donde **w** es el peso aportado por el **producto comercial**, definida como una medida de probabilidad, para el caso paramétrico por arriba de la tolerancia superior.

En caso de que el producto con **calidad comercial** se obtenga de una característica de calidad ubicada con valores inferiores (superiores) del límite de especificación inferior (superior), el esquema del índice de capacidad comercial para casos de un promedio descentrado es expresado en las ecuaciones (44) y (45):

$$C_{pCRI} = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{6\sigma} + w \frac{\mu - \text{LSL}}{3\sigma} = C_p + wC_{pl} = C_{pCRk}(0,1) \quad (35)$$

Donde **w** es el peso del producto comercial, asociado en este caso al indicador de capacidad unilateral superior, la cual es calculada a partir de

la medida de probabilidad acumulada para el límite inferior de especificación.

En la descomposición del indicador, bajo el concepto de **calidad comercial**, se asume un proceso **completamente centrado**. El promedio del proceso es denotado como μ_c y las ecuaciones (34) y (35) se desarrollan recordando que en este centramiento $\mu_c = USL + LSL/2$, lo que indica que $USL = 2\mu_c - LSL$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 C_{pCRu} &= \frac{USL - LSL}{6\sigma} + w \frac{2(USL - \mu_c)}{6\sigma} \\
 &= \frac{USL - LSL + 2wUSL - 2w\mu_c}{6\sigma} \\
 &= \frac{2\mu_c - LSL - LSL + 2w(2\mu_c - LSL) - 2w\mu_c}{6\sigma} \\
 &= \frac{2\mu_c - 2LSL + 4w\mu_c - 2wLSL - 2w\mu_c}{6\sigma} \\
 &= \frac{2\mu_c - 2LSL + 2w\mu_c - 2wLSL}{6\sigma} \\
 &= \frac{2(\mu_c - LSL) + 2w(\mu_c - LSL)}{6\sigma} \\
 &= \frac{(\mu_c - LSL)(2 + 2w)}{6\sigma} = \frac{(\mu_c - LSL)}{3\sigma} \times (1 + w) \\
 &= C_{pl}(1 + w)
 \end{aligned}$$

Donde la **calidad comercial** se presenta por encima del límite superior de especificación, el **índice de capacidad comercial** para procesos centrados es denotado en la ecuación (32):

$$C_{pCRu} = \frac{(\mu_c - LSL)}{3\sigma} (1 + w) = C_{pl}(1 + w) \quad (36)$$

Guevara & Vargas (2015) presentan una generalización de la región de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para el índice de capacidad C_{pm} tipo gaussiano. Basado en este intervalo, la propuesta del **indicador de capacidad comercial** con límite de especificación inferior con categoría de calidad comercial está definida de la siguiente forma:

$$\left[\tilde{C}_{pCRl}(1+w) \sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}{n-1}}, \tilde{C}_{pCRl}(1+w) \sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}}{n-1}} \right] \quad (37)$$

Donde el intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$, del índice de capacidad con calidad comercial limitada a la especificación superior USL es:

$$\left[\tilde{C}_{pCRu}(1+w) \sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}{n-1}}, \tilde{C}_{pCRu}(1+w) \sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}}{n-1}} \right] \quad (38)$$

En el caso del índice de capacidad con valor objetivo, la formulación de la ecuación (28) y(29) es modificada de la siguiente forma:

$$C_{pmCR} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+[T-\mu]^2}} + w \frac{USL-\mu}{3\sqrt{\sigma^2+[T-\mu]^2}} \quad (39)$$

El intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$, para el **índice de capacidad comercial** con valor objetivo, está definido en la ecuación (40):

$$\left[\tilde{C}_{pCRm}(1+w) \sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}{n-1}}, \tilde{C}_{pCRm}(1+w) \sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}}{n-1}} \right] \quad (40)$$

4. Índice de capacidad univariado no paramétrico

En los registros de calidad es frecuente encontrar información de ciertas características de calidad donde el supuesto de normalidad no se cumple. Estadísticamente es acertado realizar, por ejemplo, ciertas transformaciones de los datos seleccionados con la intención de ajustarlos a dicho comportamiento. Sin embargo, en los últimos años se han presentado propuestas de indicadores de capacidad no paramétricos que permiten obtener valores de cierto modo ajustados a la realidad de las condiciones del proceso. En este capítulo se presentan algunas de estas propuestas, así como modificaciones de estas, consideradas más conservadoras.

4.1. Indicador no paramétrico de Clements

El incumplimiento del supuesto de normalidad genera indicadores de capacidad poco fiables bajo las formulaciones clásicas, como las expuestas en Chan *et al.*, (1988b); Gunter (1989); Somerville & Montgomery (1996); Chen & Pearn (1997). Lo anterior ha resultado en nuevas propuestas de índices para datos no normales (Zwick, 1995; Pearn & Chen, 1995; Chen & Pearn, 1997; Tong & Chen, 1998).

En este orden, Clements (1989) propone un indicador de capacidad sencillo de aplicar, consistente en calcular percentiles a la información seleccionada. El cálculo de $C_{p(q)}$ y el $C_{pk(q)}$ se realiza mediante las siguientes expresiones:

$$C_{p(q)} = \frac{USL - LSL}{Y_{0.999665} - Y_{0.001335}} \quad (41)$$

Estimación del índice de capacidad caso de estudio

INDICE DE CAPACIDAD ESTIMADO EN LA FASE II, DATOS EN LÍNEA

xi<-c(2.51,2.58,2.63,2.72,2.74,2.74,2.82,2.76,2.75,2.75,2.78,2.78,2.79,2.79,2.79,2.80,2.81,2.81,2.81,2.82,2.83,2.83,2.84,2.85,2.86,2.86,2.87,2.88)

LES=3.5

LEI=2.5

p=0.025

n=48

CP<-((USL-LSL)/(6*(sd(xi))))

CP

CPU<-((USL-mean(xi))/(3*(sd(xi))))

CPL<-((mean(xi)-LSL)/(3*(sd(xi))))

CPK<-min(CPU,CPL)

CPK

INTERVALO DE CONFIANZA CP

chs<-qchisq(p, n, lower.tail = T)

chi<-qchisq(1-p, n, lower.tail = T)

ICCPLS<-((CP*sqrt(chs/(n-1))))

ICCPLI<-((CP*sqrt(chi/(n-1))))

ICCPLI

ICCPLS

$$C_{pk(q)} = \min\{C_{pu(q)}; C_{pl(q)}\} \quad (42)$$

Donde el índice de capacidad unilateral (límite de especificación superior) se expresa mediante:

$$C_{pu(q)} = \frac{USL - Y_{0.5}}{Y_{0.99865} - Y_{0.5}} \quad (43)$$

La expresión para el límite inferior de especificación se presenta como

$$C_{pl(q)} = \frac{Y_{0.5} - LSL}{Y_{0.5} - Y_{0.00135}} \quad (44)$$

Siendo $Y_p = p \times 100$ th valor del percentil de la información seleccionada.

Vännman (1995) propone una generalización de C_{Np} para datos normales aplicando dos parámetros no negativos u y v :

$$C_p(u, v) = \frac{e - u|\mu - m|}{3\{\sigma^2 + v(\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad (45)$$

Donde $e = USL - LSL$, μ es el promedio del proceso, T el valor objetivo $m = \frac{les + lei}{2}$ y los parámetros u y v toman los valores: $C_p(0, 0) = C_p$, $C_p(1, 0) = C_{pk}$, $C_p(0, 1) = C_{pm}$, y $C_p(1, 1) = C_{pmk}$.

4.2. Indicador de capacidad no paramétrico de Chen-Pern-Tong

Chen & Pearn (1997) y Tong & Chen (1998) modifican la ecuación (2) sugiriendo su empleo en informaciones donde el supuesto de normalidad no se cumple; la ecuación (21) de capacidad se presenta de la siguiente forma:

$$C_{Np}(u, v) = \frac{e^{-u|M-m|}}{3\left\{\left(\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right)^2 + v(M-T)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (46)$$

Donde $F_{99.865}$ y $F_{0.135}$ son los percentiles superior e inferior de la distribución de los datos y M es la mediana. Los indicadores clásicos de índice de capacidad no paramétricos se desprenden seleccionando la ecuación (46), reemplazando u y v por ceros, obteniendo la formulación de las ecuaciones (47), (48) y (49):

$$C_{Np} = \frac{USL - LSL}{(F_{99.865} - F_{0.135})} \quad (47)$$

Seguidamente, la evaluación del índice de capacidad de localización se establece mediante las ecuaciones (48), (49) y (50).

$$C_{Npk} = \frac{\min(USL - M, M - LSL)}{\frac{(F_{99.865} - F_{0.135})}{2}} \quad (48)$$

$$C_{Npm} = \frac{USL - LSL}{6\left\{\left(\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right)^2 + (M - T)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (49)$$

$$C_{Npmk} = \frac{\min(les - M, M - lei)}{3\left\{\left(\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right)^2 + (M - T)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (50)$$

Chen & Ding (2001) presentan un nuevo índice de capacidad extendido a diversas distribuciones, ecuación (51):

$$C_{Npmk} = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1 + F(USL) - F(LSL)}{2}\right)}{3\left\{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Phi^{-1}(1 - P/2)}{3\left\{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (51)$$

Donde $F(x)$ es la *fda* de la distribución del proceso. El índice de capacidad de localización aplicando la ecuación (51) obtiene la ecuación (52), definida como:

$$C_{pmk} = C_{pm}(1 - K) = \frac{C_p}{\left\{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} (1 - K) = \frac{C_{pk}}{\left\{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (52)$$

Según Chen (2000), C_{pk} la ecuación (13) puede reemplazarse, asumiendo una distribución, con $\Phi^{-1}\left(\frac{1 + F(\text{USL}) - F(\text{LSL})}{2}\right)$. El porcentaje de no conformes P puede ser evaluado a través de C_{pmk} por

$$2 \times \left(1 - \Phi \left[3 C_{pmk} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \right)$$

si el proceso cumple con el supuesto de normalidad y el valor promedio del proceso es $\mu = m$, entonces se obtiene la siguiente igualdad tomando como referente la ecuación (49): $C_{pmk} = C_{Npmk} = C_{pm}$.

En procesos con distribuciones pearsonianas, Pearn & Chen (1995) plantean un estimador para $C_{Np}(u, v)$, presentado en la ecuación (52):

$$\tilde{C}_{Np}(u, v) = \frac{e^{-u|\hat{M}-m|}}{3 \left\{ \left(\frac{F_{99.965} - F_{0.135}}{6} \right)^2 + v(\hat{M}-T)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (52)$$

donde $e = \text{USL} - \text{LSL}$, $m = \frac{\text{USL} + \text{LSL}}{2}$ u y v toman valores de 0 o 1 dependiendo de las consideraciones del proceso, $C_{Np}(1, 0) = C_{Npk}$, $C_{Np}(0, 1) = C_{pm}$.

4.3. Estudio de caso: evaluación del índice de capacidad univariado no paramétrico

En cuanto a la variable pH, la prueba de normalidad del estadístico W de Shapiro-Wilk se encuentra con un valor P de 0.0046, lo que indica que el supuesto de normalidad no se cumple. Es conveniente, por tanto, aplicar el procedimiento no paramétrico con el propósito de evaluar su capacidad, específicamente, el índice de capacidad. En este caso, se presenta la propuesta de Clements de las ecuaciones (41) y (42). Esta característica de calidad posee los siguientes límites de especificaciones: $USL = 3.5$, $LSL = 2.5$ con los percentiles superior e inferior de $Y_{0.99865} = 3.25$, $Y_{0.00135} = 2.51$ y $Y_{0.5} = 2.83$, respectivamente.

$$C_{p(q)} = \frac{3.5 - 2.5}{3.25 - 2.51} = 1.351$$

$$C_{pk(q)} = \min \left\{ C_{pu(q)} = \frac{3.5 - 2.83}{3.25 - 2.83}; C_{pl(q)} = \frac{2.83 - 2.5}{2.83 - 2.51} \right\}$$

$$C_{pk(q)} = \min \{ C_{pu(q)} = 1.59; C_{pl(q)} = 1.03 \} = 1.03$$

La característica de calidad evaluada del pH indica el cumplimiento de las especificaciones con un desplazamiento de su centramiento hacia el límite de especificación inferior LSL.

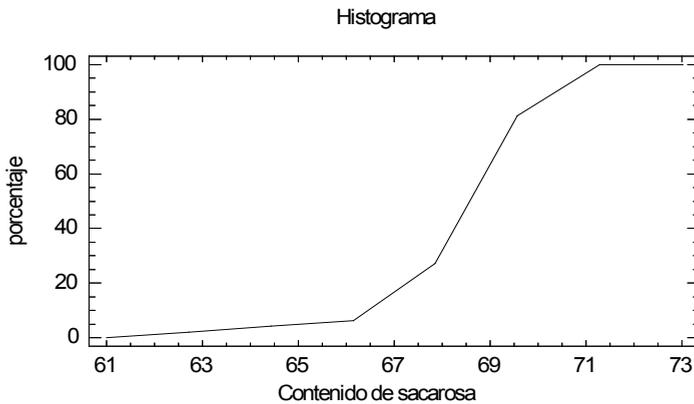
El índice de capacidad para datos no normales planteado anteriormente, en la propuesta de Clements (1989), también se presenta en la característica de calidad sacarosa, donde la muestra presenta los siguientes resultados para esta variable: $Y_{0.99865} = 71.11$, $Y_{0.5} = 68.93$ y $Y_{0.00135} = 62.09$, evaluado el índice de capacidad según las formulaciones dadas en las ecuaciones (41) y (42)

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{p(q)}(\text{cont. de sacarosa}) &= \frac{USL - LSL}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} = \frac{70 - 65}{71.11 - 62.09} \\ &= 0.5543 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{pk(q)}(\text{cont. de sacarosa}) \\ &= \min \left\{ \tilde{C}_{pu(q)} = \frac{70 - 68.93}{71.11 - 68.93}, \tilde{C}_{pl(q)} \right. \\ &= \left. \frac{68.93 - 65}{68.93 - 62.09} \right\}\end{aligned}$$

El desplazamiento de la **cantidad de sacarosa** $\tilde{C}_{pk(q)}(\text{cont. de sacarosa}) = \min\{0.4908; 0.5745\} = 0.4908$ evidencia una vecindad hacia el límite de especificación superior.

Gráfica 12. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en una distribución empírica.



4.4. Índice de capacidad comercial univariado no paramétrico

El índice de capacidad no paramétrico bajo el concepto de **calidad comercial** se obtiene de una modificación del indicador clásico propuesto por Clements (1989) definido en las ecuaciones (41) y (42). En el caso de la especificación inferior (superior) como criterio de **calidad comercial**, es decir, productos con valores por debajo (encima) de este límite, estos son considerados comercialmente viables. El índice de capacidad comercial no paramétrico planteado en este trabajo de investigación es el siguiente:

$$C_{pNCRk}(a, b) = \left\{ \frac{USL - LSL}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} \right\} + \left\{ (a - b)^2 w \times \left| \frac{a \times USL - Y_{0.5}(a - b) - b \times LSL}{Y_{0.5} - Y_{0.00135}} \right| \right\}$$

$$C_{pNCRk}(a, b) = C_{pN} + wC_{pNk} \quad (54)$$

Donde w es el peso del producto comercial asociado al indicador de capacidad unilateral superior y los percentiles $Y_{0.00135}$, $Y_{0.5}$, $Y_{0.99865}$, el inferior, el medio y el superior, respectivamente; USL y LSL son los límites de especificaciones superior e inferior; las constantes a y b toman valores cero o uno. Si el límite de especificación superior posee calidad comercial $C_{pNCR}(1,0) = C_{pN} + w \times C_{pNu}$, como en la ecuación (54). O en su defecto $C_{pNCR}(0,1) = C_{pN} + w \times C_{pNl}$, como en la ecuación (35b). Cuando las constantes poseen igual valor $C_{pCR}(1,1) = C_{pCR}(0,0) = C_p$ se obtiene el índice clásico.

En resumen, un producto con **calidad comercial**, donde los límites de especificación inferior (superior) son seleccionados dentro del criterio de calidad comercial en un proceso centrado, se presentan en las ecuaciones (55) y (56).

$$C_{pNCRl} = \frac{USL - LSL}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} + w \frac{Y_{0.5} - LSL}{Y_{0.5} - Y_{0.00135}} \quad (55)$$

$$C_{pNCRu} = \frac{USL - LSL}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} + w \frac{USL - Y_{0.5}}{Y_{0.99865} - Y_{0.5}} \quad (56)$$

Donde w es el peso aportado por el **producto comercial**, debe cumplirse con la siguiente desigualdad $USL > Y_{0.5}$.

Una simplificación de las ecuaciones de los indicadores presentes en la ecuación (54), asumiendo un comportamiento simétrico en la información, se presenta en la siguiente demostración:

$$C_{p\text{NCRI}} = \frac{USL - LSL}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} + w \frac{Y_{0.5} - LSL}{Y_{0.5} - Y_{0.00135}}$$

$$= \frac{(USL - LSL)(Y_{0.5} - Y_{0.00135})}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} + w \frac{(Y_{0.99865} - Y_{0.00135})(Y_{0.5} - LSL)}{Y_{0.5} - Y_{0.00135}}$$

El numerador se simplifica de la siguiente forma,

$$USL \times Y_{0.5} - (2Y_{0.5}Y_{0.5} - USL \times Y_{0.5}) - USL \times Y_{0.00135}$$

$$+ (2Y_{0.5}Y_{0.00135} - USL \times Y_{0.00135}) + wY_{0.99865}Y_{0.5}$$

$$- w \times Y_{0.00135}Y_{0.5}$$

$$- (2Y_{0.5}w \times Y_{0.99865} - USL \times w \times Y_{0.99865})$$

$$+ (2Y_{0.5}wY_{0.00135} - USL \times w \times Y_{0.00135})$$

$$= 2 \times USL \times Y_{0.5} - 2Y_{0.5}Y_{0.5} - 2 \times USL \times Y_{0.00135} + 2Y_{0.5}Y_{0.00135}$$

$$- w \times Y_{0.5}Y_{0.99865} + w \times USL \times Y_{0.99865}$$

$$+ w \times Y_{0.5}Y_{0.00135} - w \times USL \times Y_{0.00135}$$

$$= 2 \times USL(Y_{0.5} - Y_{0.00135}) - 2Y_{0.5}(Y_{0.5} - Y_{0.00135})$$

$$- wY_{0.5}(Y_{0.99865} - Y_{0.00135}) + w$$

$$\times USL(Y_{0.99865} - Y_{0.00135})$$

$$= 2(Y_{0.5} - Y_{0.00135})(USL - Y_{0.5})$$

$$+ w(Y_{0.99865} - Y_{0.00135})(USL - Y_{0.5})$$

$$= [2(Y_{0.5} - Y_{0.00135}) + w(Y_{0.99865} - Y_{0.00135})](USL - Y_{0.5})$$

$$= [2(Y_{0.5} - Y_{0.00135}) + 2w(Y_{0.5} - Y_{0.00135})](USL - Y_{0.5})$$

$$= 2(Y_{0.5} - Y_{0.00135})(1 + w)(USL - Y_{0.5})$$

Obteniendo la siguiente ecuación de índice de capacidad comercial:

$$C_{p\text{NCRI}} = \frac{2(Y_{0.5} - Y_{0.00135})(1 + w)(USL - Y_{0.5})}{2(Y_{0.99865} - Y_{0.5})(Y_{0.5} - Y_{0.00135})}$$

$$= \frac{USL - Y_{0.5}}{(Y_{0.99865} - Y_{0.5})} (1 + w)$$

El indicador no paramétrico de desempeño de procesos completamente centrados se determina basado en el índice de capacidad de localización en la ecuación (57) C_{pNCRk} , considerada con el criterio de **calidad comercial** en límite inferior.

$$C_{pNCRl} = \frac{USL - Y_{0.5}}{(Y_{0.999995} - Y_{0.5})} (1 + w) = C_{pu(q)} (1 + w) \quad (57)$$

Lo anterior supone un indicador no paramétrico para procesos con calidad comercial. Esta formulación se determina con base en el índice de capacidad de localización C_{pNCRk} considerando la tolerancia unilateral crítica de desempeño, en este caso el límite de especificación superior (inferior): $C_{pCR(q)} = C_{pCRu(q)} (1 + w)$ y $C_{pCR(q)} = C_{pCRl(q)} (1 + w)$, respectivamente.

El cálculo de la medida de probabilidad w se determina mediante la distribución generalizada de Pareto, propuesta por Pickands (1975) y aplicada por Davison & Smith (1990) en el análisis de valores extremos en el modelamiento de fenómenos socioeconómicos. Hosking & Wallis (1987) presentan la función acumulada de probabilidad **CDF** y la función de **densidad (fdp)** de esta distribución.

En el caso de estudio se seleccionará el límite inferior de especificación **LSL** de la cantidad de sacarosa como límite de calidad comercial; se requiere, por lo tanto, un valor mínimo de proceso. Este valor es ajeno a las especificaciones del proceso, pero es permisible en la venta del producto. En el caso de la característica de calidad sacarosa, el límite permisible es de 65.

Esta probabilidad w , bajo el supuesto de normalidad e independencia, se determina mediante la ecuación (33). En caso contrario, se realiza una transformación de los datos originales.

$$\begin{aligned} w &= P \left[Z \leq \frac{LSL - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right] = P \left[Z \leq \frac{-1.607 - (-0.04)}{0.8551} \right] \\ &= P[Z \leq -1.83] = 0.0336 \end{aligned}$$

Si el proceso se encuentra centrado, el **índice de calidad comercial** está dado por la ecuación (30);

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{pCR1} &= \frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}}(1 + w) = \frac{1.0282 - (-0.04)}{3 \times 0.8551}(1 + 0.0336) \\ &= 0.4303\end{aligned}$$

En procesos descentrados el resultado se obtiene aplicando las ecuaciones (54) y (55) para el caso paramétrico:

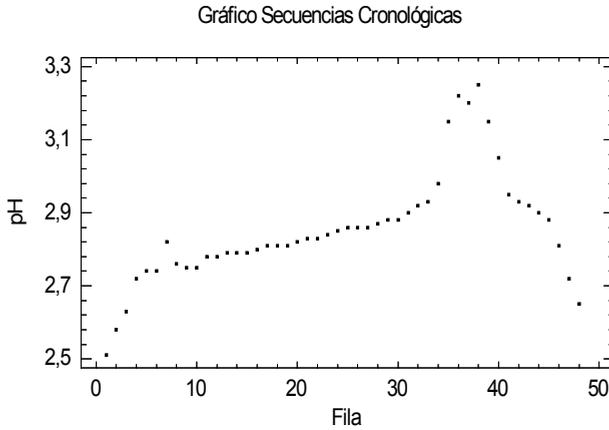
$$\begin{aligned}\tilde{C}_{pCR1} &= \frac{USL - lei}{6\hat{\sigma}} + w \frac{\hat{\mu} - LSL}{3\hat{\sigma}} \\ &= \frac{1.0282 - (-1.6073)}{6(0.8551)} \\ &\quad + (0.0336) \left[\frac{(-0.04) - (-1.6073)}{3 \times 0.8551} \right] \\ &= 0.5136 + (0.034) \times 0.6109 = 0.5341\end{aligned}$$

El valor obtenido de $\tilde{C}_{pCR1} = 0.5341$ muestra la poca capacidad de cumplimiento de esta característica de calidad, además de incluir en la medición las unidades con **contenido de sacarosa** por debajo de la especificación inferior.

Por tanto, este indicador además de considerar los productos ajustados a las especificaciones de diseño también agrega los de **calidad comercial**. En general, se espera que los valores de los índices de capacidad \tilde{C}_{pCR1} sean levemente superiores al índice tradicionalmente aplicado $\tilde{C}_p = 0.513$.

La **Gráfica 13** muestra el comportamiento del **pH** en intervalo equidistante de tiempo.

Gráfica 13. Comportamiento del pH.



La variable **pH** posee un comportamiento con perfil no lineal, por tanto, el cálculo del índice de capacidad se debe obtener mediante métodos no paramétricos. La propuesta de Clements (1989) resulta apropiada en esta situación, evidenciándose en las ecuaciones (41) y (42).

$$\tilde{C}_{p(q)}(\text{pH}) = \frac{\text{USL} - \text{LSL}}{Y_{0.99865} - Y_{0.00135}} = \frac{3.5 - 2.5}{3.25 - 2.51} = 1.35$$

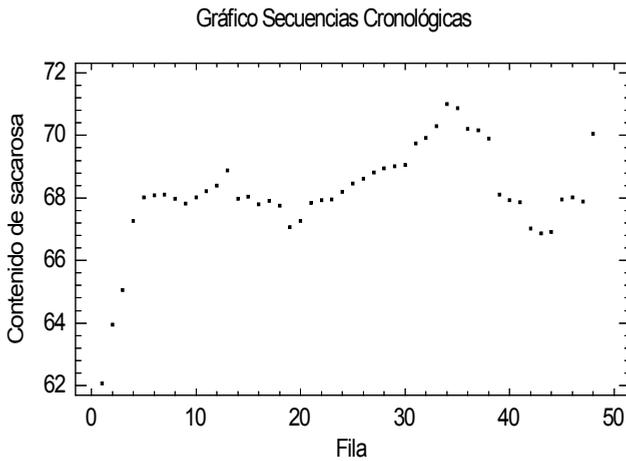
En cuanto al índice de capacidad de centramiento, los resultados de la variable pH son:

$$\tilde{C}_{pk(q)}(\text{pH}) = \min \left\{ \tilde{C}_{pu(q)} = \frac{3.5 - 2.83}{3.25 - 2.83}; \tilde{C}_{pl(q)} = \frac{2.83 - 2.50}{2.83 - 2.51} \right\}$$

Donde $\tilde{C}_{pk(q)} = \min\{1.59; 1.03\} = 1.03$. En general, el desempeño de la variable pH se ajusta a los requerimientos de diseño establecidos, con desplazamiento hacia el límite de especificación inferior.

Por otro lado, el monitoreo del comportamiento de la variable **contenido de sacarosa** presenta un perfil no lineal (ver **Gráfica 14**), lo que induce a utilizar procedimientos más robustos, por ejemplo, la metodología de datos funcionales.

Gráfica 14. Comportamiento de contenido de sacarosa.



4.5. Determinación del índice de capacidad comercial univariado no paramétrico

Por otra parte, asumiendo una distribución Gamma generalizada $(4.2, 0.019, 0.70)$ para el **contenido de sacarosa**, (ver **Gráfica 15**), el **índice de capacidad comercial** no paramétrica se define de acuerdo a la ecuación (55) y (56) y los percentiles seleccionados son los que a continuación se presentan:

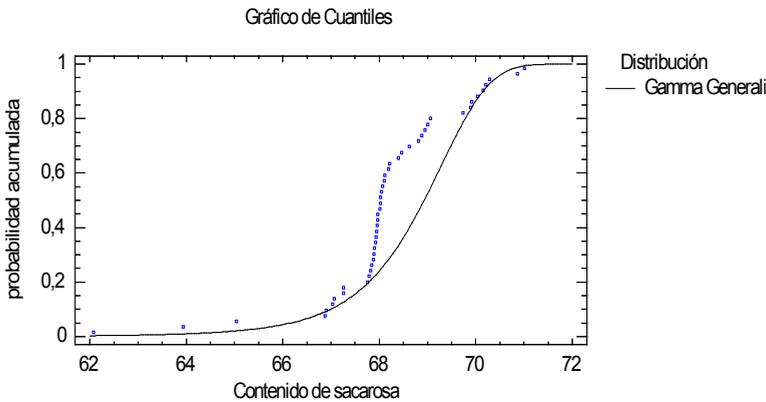
$$Y_{0.99865} = 71.11, \quad Y_{0.5} = 68.93 \quad Y_{0.00135} = 62.09$$

$$C_{pNCR} = \frac{USL - Y_{0.5}}{(Y_{0.99865} - Y_{0.5})} (1 + w) = \frac{70 - 68.93}{71.11 - 68.93} (1 + w)$$

El valor de la medida de probabilidad w para una medida de probabilidad acumulada para LSL, ajustada a una distribución Gamma generalizada, genera un valor de **0.024**, medida evaluada en el programa R. El índice de capacidad de la variable es:

$$C_{pNCR} = \frac{70 - 68.93}{71.11 - 68.93} (1 + 0.024) = 0.5026$$

Gráfica 15. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Gamma generalizada.



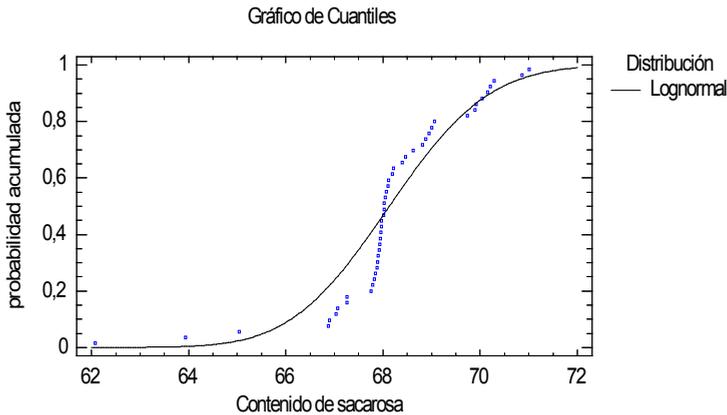
El ajuste del **contenido de sacarosa**, basado en una distribución log-normal con parámetros $(4.22, 0.023)$ y los percentiles $Y_{0.99865} = 73.113$, $Y_{0.5} = 68.1313$ y $Y_{0.00135} = 66.3861$, como se muestra:

$$C_{pNCR} = \frac{USL - Y_{0.5}}{(Y_{0.99865} - Y_{0.5})} (1 + w) = \frac{70 - 68.1313}{73.113 - 68.1313} (1 + w)$$

La medida de probabilidad w determinada mediante la función acumulada de cuantiles de la distribución log-normal (ver **Gráfica 16**), arroja un valor de 0.023; Por lo tanto, el índice está definido como:

$$C_{pNCR} = \frac{70 - 68.1313}{73.113 - 68.1313} (1 + 0.023) = 0.383$$

Gráfica 16. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución log-normal.



Asumiendo una distribución Weibull $(54.5175, 68.8561)$ para el **contenido de sacarosa** (ver Gráfica 17), los percentiles del **índice de capacidad comercial** no paramétrico son:

$$Y_{0.99865} = 71.2827, Y_{0.5} = 68.3947 \text{ y } Y_{0.00135} = 66.4601.$$

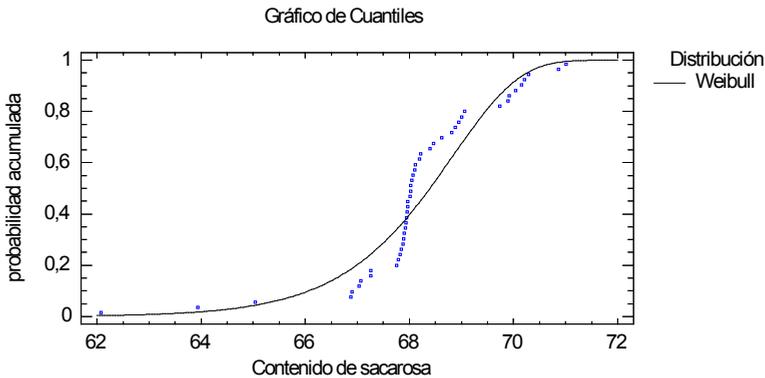
$$C_{pNCR} = \frac{USL - Y_{0.5}}{(Y_{0.99865} - Y_{0.5})} (1 + w) = \frac{70 - 68.3947}{71.2827 - 68.3947} (1 + w)$$

El cálculo de la medida de probabilidad w ajustada a esta distribución genera un valor de **0.043**; el índice de capacidad de la variable es:

$$C_{pNCR} = \frac{70 - 68.394}{71.11 - 68.394} (1 + 0.043) = 0.616$$

Este índice de capacidad comercial $C_{pNCR} = 0.616$ muestra un desempeño no adecuado de la característica de calidad evaluada si se tiene en cuenta que un porcentaje de estos productos infringe los requisitos comerciales establecidos en una de las especificaciones.

Gráfica 17. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Weibull.



El cálculo de la medida de probabilidad w , ajustando los datos a una distribución generalizada de Pareto propuesta por Pickands (1975), presenta un valor de **0.0255**; por tanto, el índice de capacidad no paramétrico para el **contenido de sacarosa** está dado como:

$$C_{pNCR} = \frac{70 - 68.0215}{71.013 - 68.0215} (1 + 0.0255) = 0.661(1.0255) = 0.677$$

El valor del **índice de capacidad comercial** es levemente mayor al índice de capacidad no paramétrico propuesto por Clements (1989). La información presente en la **Tabla 10**, a pesar de que muestra un proceso no capaz en donde se presentan valores menores a la unidad, evidencia un indicador comercial superior a los tradicionales.

Tabla 10. Resumen de resultados de las propuestas de indicadores univariados de las especificaciones de las variables cantidad de sacarosa del medicamento Levocetirizina.

Propuestas	Índice de capacidad	Proceso descentrado	Proceso centrado	Resultados
PARAMÉTRICO				
Índice de capacidad clásico Kane	C_p		0.5450	Estimación basada en límite bilateral
	C_{pk}	0.4040	0.5450	Estimación referente a un límite unilateral
Índice de capacidad comercial Herrera R.	C_{pCRk}	0.5593	0.5550	
NO PARAMÉTRICO				
Índice de capacidad Clements J.	$C_{p(q)}$	0.5543		
	$C_{pk(q)}$	0.4904		
Índice de capacidad comercial Herrera R.	C_{pNCR}			
Distribución Gamma generalizada		0.5020		
Distribución log-normal		0.3830		
Distribución Weibull		0.6160		
Distribución generalizada de Pareto		0.6770		

Es importante resaltar que, en este estudio de caso, previamente se realizó la prueba de normalidad del **contenido de sacarosa**, rechazada para

esta variable. Una vez realizada la transformación se determinó el indicador comercial, como se observa en la **Tabla 10**. Los índices comerciales obtenidos en las distribuciones Gamma generalizada y log-normal, arrojaron valores **0.5020** y **0.3830**, por debajo del índice referente de Clements, con 0.5543. Esto se explica, en ambas distribuciones, ya que se amplifica el intervalo de los percentiles lo que origina un aumento en la variabilidad, disminuyendo el valor del indicador propuesto.

El análisis anterior solo se debe limitar a los estudios de casos que se presentan en este texto de investigación, pero no se puede generalizar en otros estudios. Las simulaciones presentadas en la **Tabla 10** indican que, en todas las distribuciones simuladas en R, los valores de los indicadores de **calidad comercial** son siempre superiores a los obtenidos en los indicadores clásicos, tanto los paramétricos como los no paramétricos.

4.6. Indicadores de capacidad funcional univariados

Guevara & Vargas (2015) presentan dos procedimientos para calcular los indicadores de capacidad univariados no paramétricos mediante datos funcionales FDA.

- a) **El método (A)**: las observaciones no lineales del proceso se definen mediante una media aritmética estimada para cada uno de los t_i . Estos métodos se muestran en las siguientes ecuaciones:

$$C_{p(\text{prf})}^A = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{USL(t_i) - LSL(t_i)}{Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.00135}(t_i)} \quad (58)$$

$$C_{pu(\text{prf})}^A = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{USL(t_i) - Y_{0.5}(t_i)}{Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.5}(t_i)} \quad (59)$$

$$C_{pl(\text{prf})}^A = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{Y_{0.5}(t_i) - LSL(t_i)}{Y_{0.5}(t_i) - Y_{0.00135}(t_i)} \quad (60)$$

$$C_{pk(\text{prf})}^A = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \min\{C_{pu(\text{prf})}^A, C_{pl(\text{prf})}^A\} \quad (61)$$

- b) **El método (B):** están definidos cuando LSL , USL , $Y_{0.99865}(t_i)$, $Y_{0.00135}(t_i)$ y $Y_{0.5}(t_i)$ son funciones continuas.

Los indicadores antes mencionados son reemplazados en el numerador y denominador por la integración en un intervalo compacto I con respecto a t :

$$C_{pu}^B(\text{prf}) = \frac{\int (USL(t_i) - Y_{0.5}(t_i)) dt}{\int (Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.5}(t_i)) dt} \quad (62)$$

$$C_{pl}^B(\text{prf}) = \frac{\int (Y_{0.5}(t_i) - LSL(t_i)) dt}{\int (Y_{0.5}(t_i) - Y_{0.00135}(t_i)) dt} \quad (63)$$

$$C_{pk}^B(\text{prf}) = \min\{C_{pu}^B(\text{prf}), C_{pl}^B(\text{prf})\} \quad (64)$$

Guevara & Vargas (2015) presentan funciones no paramétricas para evaluar las especificaciones $[LSL(t_i), USL(t_i)]$, utilizando las siguientes expresiones:

$$USL(t) = C_{pu}[Y_{0.99865}(t) - Y_{0.5}(t)] + Y_{0.5}(t) \quad (65)$$

$$LSL(t) = Y_{0.5}(t) - C_{pl}[Y_{0.5}(t) - Y_{0.00135}(t)] \quad (66)$$

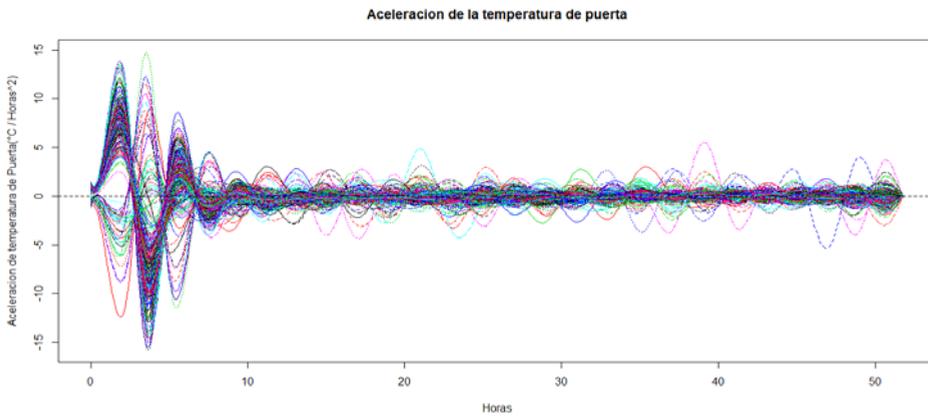
donde Y_p es el p th percentil, la distribución considerada y los límites de especificación superior e inferior son considerados como una función de profundidad.

4.7. Caso de estudio: evaluación del índice de capacidad univariado funcional

Garrido & Vásquez (2018) exponen una empresa fabricante de baterías de automóvil que maneja nueve cuartos de curado en forma manual. A partir de un sistema de monitoreo, se obtuvo una base con 15011 datos de temperatura de la termocupla de la puerta del cuarto de curado. Las

curvas se suavizaron con un parámetro de penalización de $\lambda = 0.01$ para las temperaturas de la puerta. La rugosidad es dada por la segunda derivada (ver **Gráfica 18**) con un orden IV de B-splines, 27 nodos internos y puntos de discretización en un rango de 0 a 51.8 horas. En la **Gráfica 18** se observa una estabilidad después de 10 horas de arranque del proceso, por lo que en este período se obtiene el menor grado de variabilidad.

Gráfica 18. Segunda derivada de las temperaturas de puerta.



Es claro que en las primeras horas se encuentran puntos de inflexión muy grandes, los cuales deben ser analizados para determinar las causas especiales para garantizar posteriormente la estabilidad de esta temperatura de la puerta.

Tabla 11. Sumas de errores, cuadrados de suavización de temperatura de puerta.

	Cuarto1	Cuarto 2	Cuarto3	Cuarto4	Cuarto5	Cuarto6	Cuarto7	Cuarto8	Cuarto9	Cuarto10	Cuarto11
Grados de libertad	27.483	27.483	27.483	27.483	27.483	27.483	27.483	27.483	27.483	27.483	13.736
Errores	3.8561	4.1113	3.0145	2.4437	3.9072	5.3683	2.9410	4.2582	5.0664	4.1937	2.9320

En la **Tabla 11**, se expone la desviación presente en las curvas de las temperaturas en cada uno de los cuartos con respecto a su media. Esta desviación es fundamental para la evaluación de la capacidad de esta característica. Entre las diversas formas de evaluar la calidad del ajuste de las curvas de temperaturas de la puerta se encuentra realizar un contraste entre los datos funcionales con respecto a los datos discretos, obteniendo de esta manera la varianza residual de las curvas.

En la **Tabla 12**, se muestra el valor cuadrático medio (RMS) de las curvas de temperaturas de la puerta. Por otro lado, la **Gráfica 19** muestra el ajuste del modelo a las mediciones de temperaturas tomadas por meses, cumpliendo con los requisitos del modelo b-splines suavizado.

Tabla 12. Media cuadrática de B-splines, cuarto 1 y cuarto 2 - temperatura de puerta

RMS Residual - Cuarto 1				RMS Residual - Cuarto 2			
0.00176	0.02922	0.0644	0.07625	0.05169	0.07428	0.04285	0.0508
0.04979	0.06941	0.0634	0.05437	0.03892	0.03799	0.06899	0.0411
0.09046	0.06825	0.04158	0.0378	0.06388	0.01469	0.07983	0.0322
0.10024	0.10521	0.03076	0.02762	0.00433	0.07933	0.02099	0.0250
0.02301	0.0569	0.04797	0.0387	0.03546	0.0823	0.0857	0.0502
0.02854	0.05665	0.0318	0.01817	0.06428	0.1045	0.0723	0.0684
0.06372	0.0915	0.0576	0.0135	0.04946	0.0531	0.0483	0.0910
0.0844	0.07411	0.0766	0.04976	0.0367	0.1110	0.0182	0.0679
0.02965	0.06802	0.10404	0.0662	0.0694	0.0652	0.0567	0.0684
0.05411				0.0434	0.0476	0.0842	

Gráfica 19. Ajuste B-splines, mes de mayo, cuarto 1 - temperatura de puerta

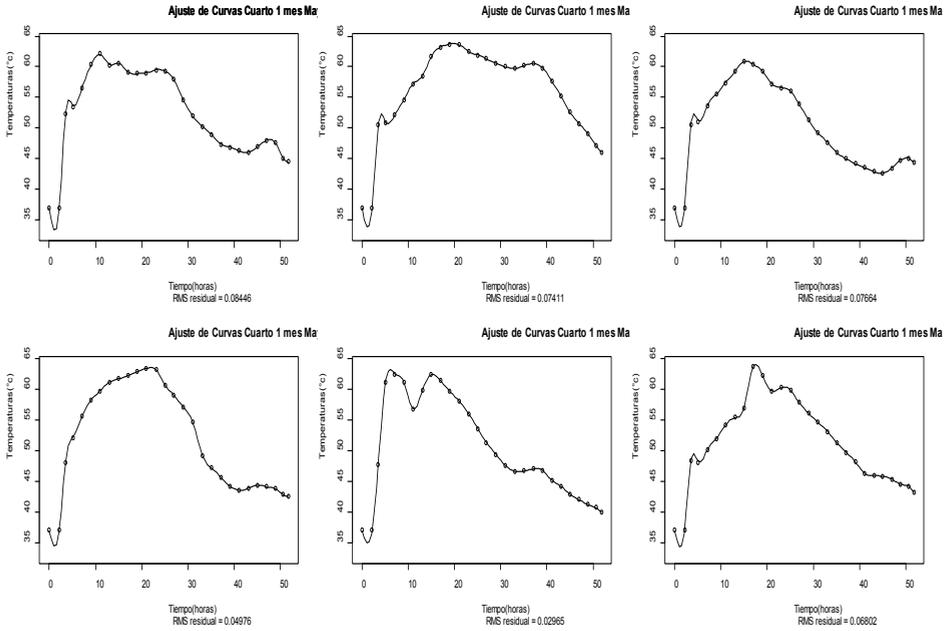


Tabla 13. Media cuadrática de B-splines, cuarto 3 y cuarto 4 - temperatura de puerta

RMS Residual - Cuarto 3				RMS Residual - Cuarto 4			
0.0727	0.0595	0.0941	0.0585	0.06537	0.02604	0.0537	0.04277
0.0702	0.0491	0.0544	0.05579	0.0213	0.0557	0.0174	0.05861
0.0567	0.0456	0.0524	0.0398	0.0552	0.0662	0.0577	0.0779
0.0402	0.0470	0.0502	0.04129	0.0510	0.0691	0.03859	0.10366
0.0507	0.0697	0.0421	0.04619	0.0594	0.0814	0.0705	0.05347
0.0394	0.0722	0.0426	0.0564	0.05799	0.07879	0.0614	0.04972
0.0191	0.0621	0.0178	0.0766				
0.0543	0.0444	0.0625	0.0301				
0.0387	0.0714	0.0342	0.065				

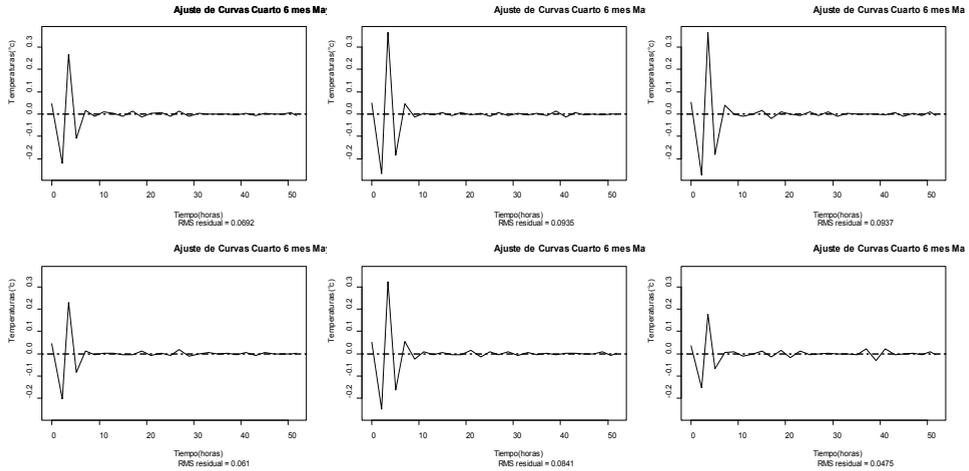
En la **Gráfica 19**, se aprecia el ajuste de los datos discretos a los datos funcionales del cuarto 1 en el mes de mayo, mostrando un buen ajuste de la información compilada de este cuarto.

Tabla 14. Media cuadrática de B-splines, cuarto 5 y cuarto 6 - temperatura de puerta

RMS Residual - Cuarto 5				RMS Residual - Cuarto 6			
0.0601	0.0426	0.0512	0.0344	0.0602	0.0688	0.0649	0.0606
0.0662	0.1159	0.0773	0.0325	0.1154	0.0594	0.0694	0.0631
0.0347	0.0679	0.0688	0.0627	0.0651	0.0652	0.0650	0.0580
0.0401	0.0791	0.0399	0.0445	0.0907	0.0691	0.1144	0.0453
0.0733	0.0551	0.0676	0.0836	0.0569	0.0561	0.0614	0.0570
0.0669	0.0746	0.0716	0.0322	0.0707	0.0942	0.0704	0.1055
0.0923	0.0864	0.0609	0.0383	0.0500	0.0131	0.0367	0.0692
0.068	0.1068	0.0388	0.0556	0.0935	0.0937	0.0609	0.0840
0.0392				0.0475	0.057	0.0649	0.1009

Por otro lado, en la **Gráfica 20**, se aprecia el análisis residual del modelo del cuarto 6 en el mes de mayo, donde cada proceso presenta una variación al modelo desde valores menores a $-0.2-0.2$ hasta valores mayores a $0.30.3$ y desviaciones en las primeras 10 horas. Luego, el ajuste se mantiene estable en el resto del proceso.

Gráfica 20. Ajuste residual B-splines, mes de mayo, cuarto 6 - temperatura de puerta.

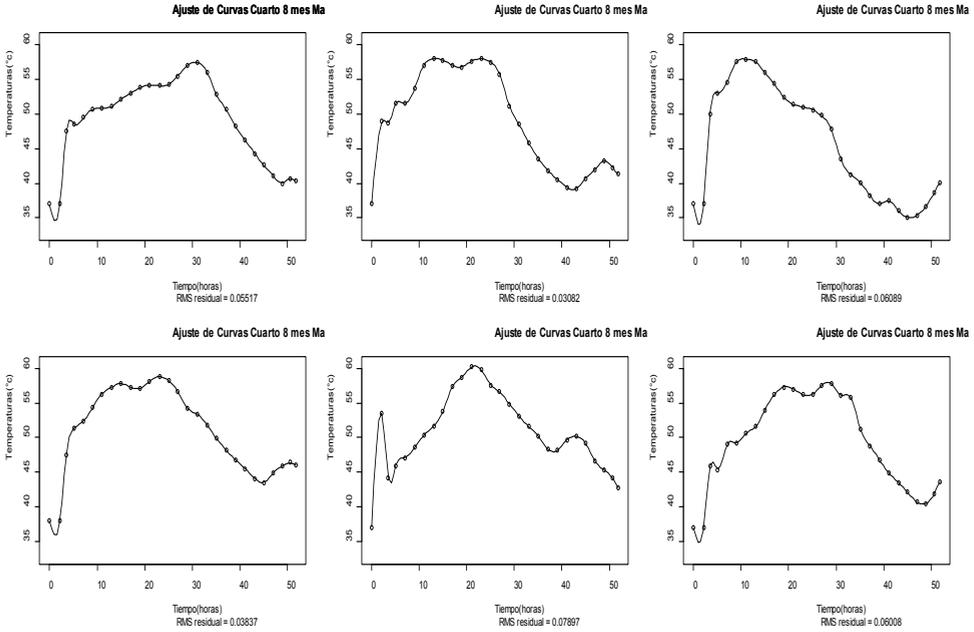


En las **Gráficas 21 y 22** se encuentra el ajuste de los datos discretos de temperatura del cuarto 8 en el mes de marzo y el cuarto 9 en el mes de mayo, respectivamente. Por ejemplo, en el mes de mayo (**Gráfica 22**) el tercer dato funcional presenta una variabilidad mayor de **RMS = 0.08349** durante las primeras horas.

Tabla 15. Media cuadrática de B-splines, cuarto 7 y cuarto 8 - temperatura de puerta

RMS Residual - Cuarto 7				RMS Residual - Cuarto 8			
0.0714	0.0571	0.0501	0.0707	0.04463	0.01434	0.08027	0.0698
0.0613	0.0489	0.0707	0.0763	0.03826	0.02790	0.06010	0.0290
0.0631	0.0562	0.0583	0.0785	0.0723	0.02619	0.05415	0.0626
0.0524	0.0643	0.1157	0.0498	0.05516	0.03082	0.06089	0.0383
0.0677	0.0555	0.0773	0.0766	0.07897	0.06008	0.08189	0.10462
0.0633	0.0629	0.0493	0.0534	0.07703	0.0970	0.0919	0.07690
				0.08349	0.07028	0.07730	0.08915
				0.06410	0.07113	0.08154	0.08635
				0.00729	0.05942		

Gráfica 21. Ajustes de curvas, mes de marzo, cuarto 8 - temperatura de puerta.



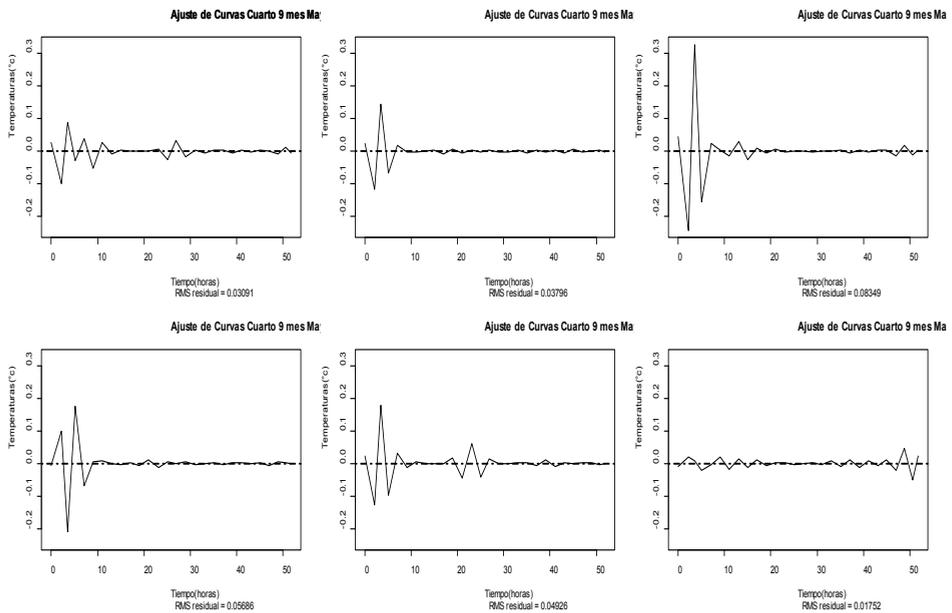
En la **Tabla 16** y el **Gráfico 22**, se encuentran los coeficientes de los **RMS residual** de los cuartos 9 y 10, los cuales presentan una diferencia mínima, mostrando un ajuste apropiado.

Tabla 16. Media cuadrática de B-splines, cuarto 9 y cuarto 10 - temperatura de puerta

RMS Residual -Cuarto 9				RMS Residual -Cuarto 10			
0.0431	0.0388	0.0756	0.0707	0.072	0.0515	0.1047	0.0616
0.0345	0.0279	0.0793	0.0316	0.0363	0.0263	0.0527	0.0513
0.0522	0.0661	0.0392	0.0524	0.0524	0.0603	0.1016	0.1205
0.0623	0.0625	0.0876	0.0765	0.1362	0.0319	0.0491	0.0581
0.1102	0.0634	0.0307	0.0524	0.0522	0.0484	0.0925	0.0305
0.0805	0.0735	0.0928	0.0329	0.0363	0.0350	0.1006	0.0444

0.1080	0.0644	0.0645	0.0793	0.0474	0.1035	0.0371	0.0797
0.0613	0.0309	0.0379	0.0834				
0.0568	0.0492	0.0175	0.0507				
0.0691	0.1118	0.0572					

Gráfica 22. Ajuste residual B-splines, mes de mayo, cuarto 9 - temperatura de puerta



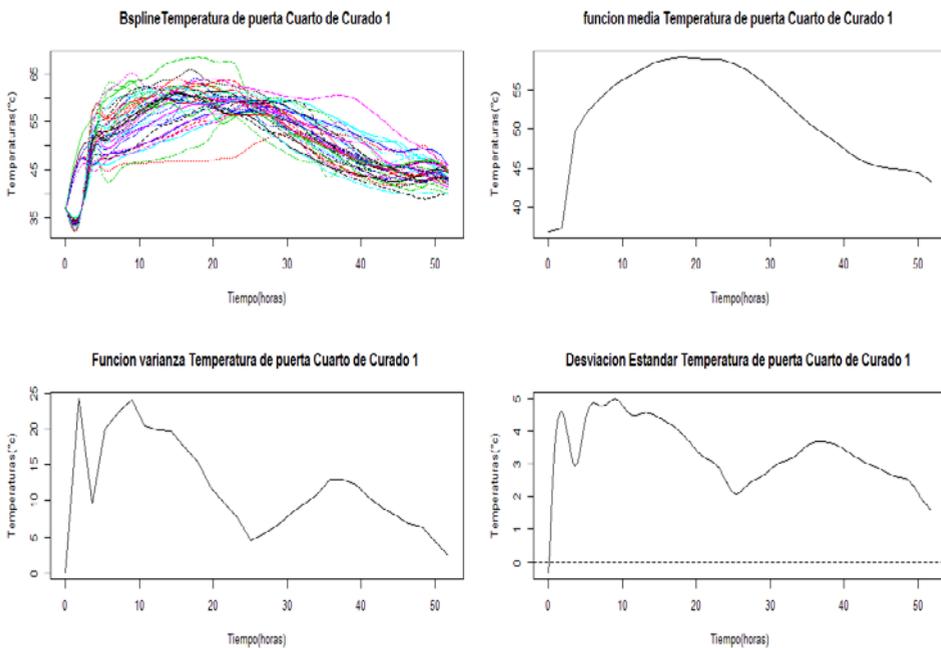
El análisis descriptivo (**Tabla 17**) presenta los diversos estadísticos funcionales en el caso de la media, varianza y desviación estándar funcional de los cuartos del proceso, además de los componentes principales y la covarianza funcional de las temperaturas.

Tabla 17. Media, varianza y desviación estándar del cuarto 1 y cuarto 2

Análisis descriptivo funcional Cuarto 1 - Temperatura de puerta				Análisis descriptivo funcional Cuarto 2 - Temperatura de puerta		
B-splines	Media	Varianza	Desviación	Media	Varianza	Desviación
bspl4.1	36.96752	0.000781	0.322080	36.9685	0.00079	0.415137
bspl4.2	37.29246	24.20699	4.546604	36.9561	20.1003	4.768463
bspl4.3	49.72969	9.549642	5.376590	48.6976	14.0718	3.926133
bspl4.4	52.37115	20.09360	1.936577	51.0048	15.3649	3.251822
bspl4.5	54.10220	22.43305	5.347957	52.3375	18.3095	4.24842
bspl4.6	55.67069	24.12499	4.474069	53.8791	20.1987	4.202572
bspl4.7	56.59065	20.50891	5.274271	55.0115	19.9469	4.701889
bspl4.8	57.59043	19.94352	4.289811	55.5370	17.7923	4.466870
bspl4.9	58.43921	19.74801	4.679320	55.8276	14.1133	4.262321
bspl4.10	58.89225	17.48506	4.382986	55.7620	11.2445	3.516097
bspl4.11	59.08148	15.45826	4.176640	55.5771	10.0919	3.269659
bspl4.12	58.96923	11.83985	3.709145	55.4541	9.73011	3.144861
bspl4.13	58.82121	9.782897	3.098280	55.0837	10.3075	3.167248
bspl4.14	58.86634	7.668505	3.101783	54.6272	11.4891	3.464446
bspl4.15	58.27434	4.466054	1.794099	54.2894	12.1865	3.512879
bspl4.16	57.47175	5.300285	2.477675	53.7199	13.0305	3.686736
bspl4.17	56.32635	6.500878	2.566412	52.7844	13.8230	3.766670
bspl4.18	54.86173	8.165386	3.092669	51.5948	14.7569	3.991624
bspl4.19	53.37276	9.413900	3.095420	50.1283	14.5607	3.763734
bspl4.20	51.76910	10.78216	3.670627	48.4167	13.4119	3.642306
bspl4.21	50.27365	13.05155	3.692285	46.9986	13.1471	3.702256
bspl4.22	49.17180	13.03053	3.610636	46.0810	13.4834	3.781837
bspl4.23	48.00215	12.27180	3.266619	45.1653	13.6392	3.638726
bspl4.24	46.75235	10.46688	3.003168	44.4747	13.4343	3.924659
bspl4.25	45.79008	9.011297	2.850298	43.9894	14.4683	3.889656
bspl4.26	45.25971	8.030063	2.550448	43.6502	14.5929	3.478724
bspl4.27	44.95991	6.817658	2.618066	43.4189	12.3990	2.819948
bspl4.28	44.76220	6.393552	1.903859	43.3485	8.98726	2.356432
bspl4.29	44.47852	4.311031	1.689606	43.3492	6.05769	2.235978
bspl4.30	43.38751	2.479096	1.586924	43.04513	4.84695	2.227483

Es así como los 30 nodos obtenidos del B-splines, para cada uno de los cuartos de curado, generan los estadísticos descriptivos funcionales; dichos estadísticos permiten comprender el comportamiento de la temperatura de la puerta. En estas medidas descriptivas se pueden observar los valores atípicos de desviación en los cuartos 1 y 2 de las curvas.

Gráfica 23. B-splines y estadística descriptiva del cuarto 1 - temperatura de puerta



La curva media de la temperatura de puerta para el cuarto de curado 1, así como las funciones de varianzas y desviacion estandar, se visualizan en la **Gráfica 23**.

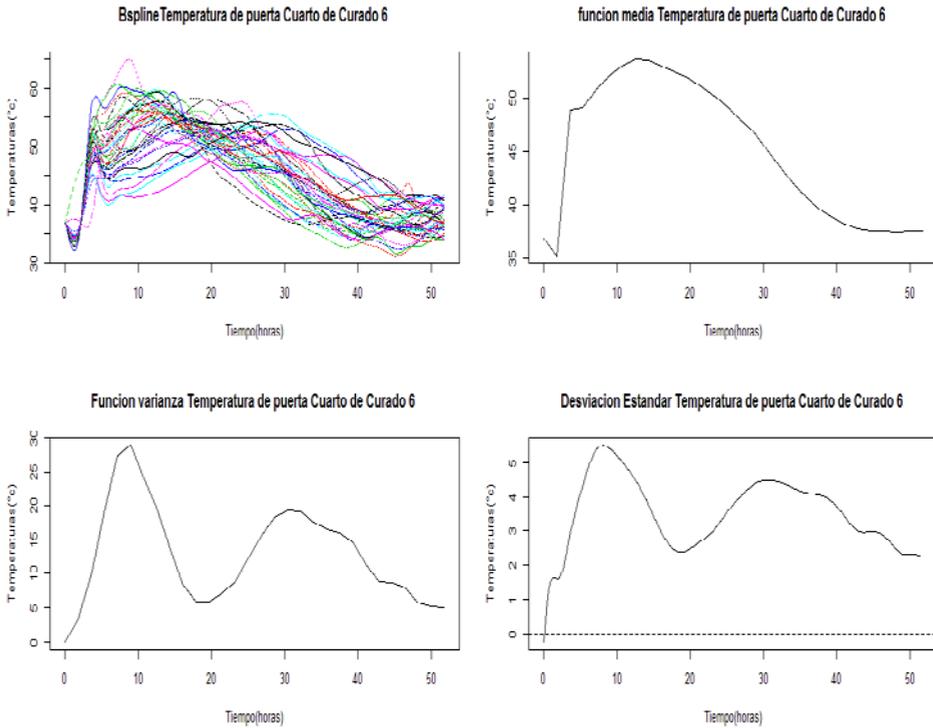
En la **Tabla 18**, se presentan las medidas descriptivas funcionales para el cuarto 5 de las temperaturas de puerta, enfocándonos en su desviación, la cual presenta un comportamiento heterogéneo.

Tabla 18. Media, varianza, desviación estándar funcional, cuarto 5 y cuarto 6 - temperatura de puerta

Análisis descriptivo funcional Cuarto 5 - Temperatura de puerta				Análisis descriptivo funcional Cuarto 6 - Temperatura de puerta		
B-splines	Medias	Varianza	Desviación	Medias	Varianza	Desviación
bspl4.1	37.02569	0.057611	0.226149	36.95822	0.000245	0.212090
bspl4.2	35.92147	8.039849	3.654446	35.31680	3.242420	2.366519
bspl4.3	47.72290	12.62198	1.578272	48.92430	9.901875	0.844653
bspl4.4	48.75618	17.54273	3.391879	49.08972	18.96788	3.070720
bspl4.5	50.02338	23.42331	4.212951	50.75289	27.34829	4.258774
bspl4.6	51.58547	27.51460	4.970396	52.17199	28.88078	5.613125
bspl4.7	52.78565	26.03067	5.453301	53.05660	24.17023	5.442362
bspl4.8	53.53394	20.48215	5.190856	53.64353	19.69038	4.925039
bspl4.9	53.66170	11.84958	4.426860	53.60214	13.68531	4.352947
bspl4.10	53.45857	6.492581	2.940389	53.04054	8.445066	3.412704
bspl4.11	53.20862	4.185399	2.215931	52.45785	5.832169	2.510748
bspl4.12	52.77469	4.351712	1.837941	51.89524	5.815884	2.304738
bspl4.13	52.28958	6.486539	2.564615	51.10536	7.140810	2.660702
bspl4.14	52.15714	8.421786	2.854216	50.22438	8.884822	2.918688
bspl4.15	51.92063	11.05512	3.466215	49.29584	12.26804	3.582684
bspl4.16	51.04427	12.33503	3.536600	48.04911	15.44665	4.038393
bspl4.17	50.06171	13.12841	3.818969	46.89785	18.35220	4.454713
bspl4.18	48.56780	11.79706	3.301717	45.30840	19.40043	4.499444
bspl4.19	46.81950	9.537753	3.007968	43.69660	19.11044	4.372890
bspl4.20	45.14755	8.891929	3.020714	42.20439	17.59716	4.122162
bspl4.21	43.67419	8.348737	2.798113	40.78846	16.55325	4.075897
bspl4.22	42.42697	7.090185	2.400721	39.72942	15.94733	3.980496
bspl4.23	41.27497	6.154278	2.729783	38.94965	14.56930	3.415983
bspl4.24	40.37981	6.749008	2.468939	38.30311	11.41694	2.865131
bspl4.25	39.80290	6.464204	2.895796	37.86310	8.797592	3.058924
bspl4.26	39.59760	7.879950	3.767453	37.59591	8.727774	2.821477
bspl4.27	39.71635	11.51118	3.300777	37.59750	7.977229	2.218744
bspl4.28	39.87869	11.42480	2.739655	37.44944	5.758402	2.379033
bspl4.29	40.30840	8.076757	2.445368	37.61749	5.212029	2.263085
bspl4.30	40.37572	5.371029	2.350453	37.64035	5.000632	2.266817

Para la curva media de la temperatura de puerta presente en el cuarto de curado 6, así como las funciones de varianza y desviación estándar, ver la **Gráfica 24**.

Gráfica 24. B-splines y estadística descriptiva del cuarto 6 - temperatura de puerta

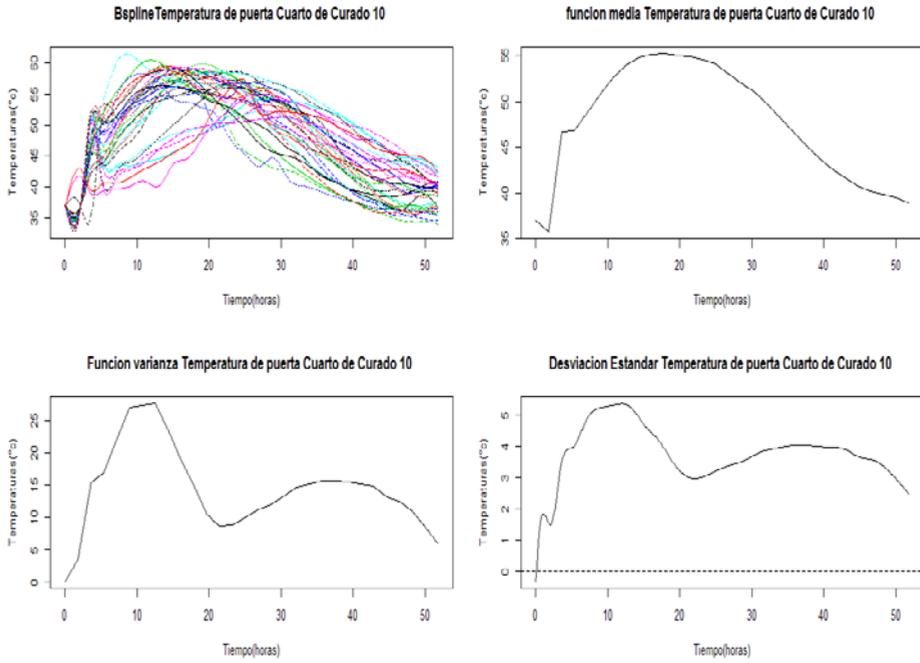


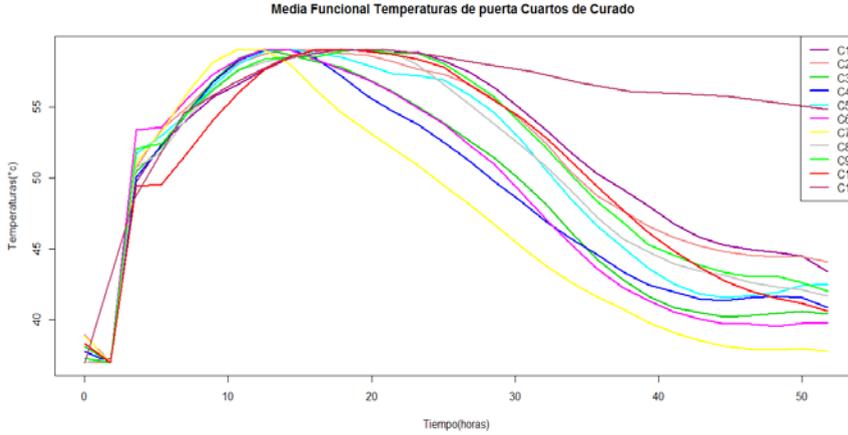
En la **Tabla 19**, se observan las medidas descriptivas funcionales para los cuartos 9 y 10 y se aprecia una desviación mayor con respecto a los cuartos de curado anteriormente evaluados.

Tabla 19. Media, varianza y desviación estándar funcional, cuarto 9 y cuarto 10 – temperatura de puerta

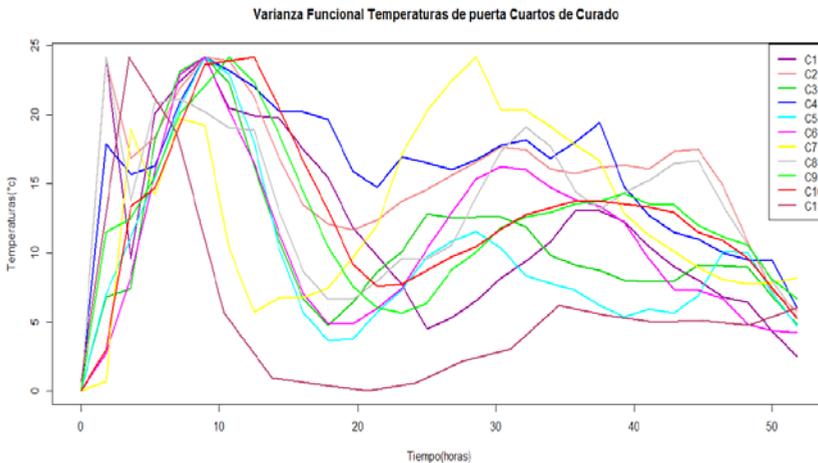
Análisis descriptivo funcional Cuarto 9 Temperatura de puerta				Análisis descriptivo funcional Cuarto 10 Temperatura de puerta		
B-splines	Medias	Varianza	Desviación	Medias	Varianza	Desviación
bspl4.1	36.97055	0.000656	0.338965	36.96648	0.000439	0.349846
bspl4.2	36.76927	14.89139	4.116193	35.75206	3.414041	3.310876
bspl4.3	47.17257	16.15607	3.217331	46.72344	15.23226	0.121550
bspl4.4	47.41189	20.17475	3.621233	46.83909	16.73248	4.189103
bspl4.5	48.87870	26.02317	4.544998	48.78047	21.97487	3.634271
bspl4.6	50.06000	28.60474	5.318838	50.82204	26.97506	5.118264
bspl4.7	50.99271	31.37100	5.323097	52.52612	27.26727	5.238735
bspl4.8	51.50490	28.96682	5.878343	53.94976	27.59764	5.332005
bspl4.9	51.60174	24.11055	5.281508	54.79327	23.44859	5.431758
bspl4.10	51.61504	18.72808	4.798534	55.17603	18.98799	4.589009
bspl4.11	51.89934	13.54340	4.014071	55.23695	14.92149	4.303798
bspl4.12	51.99981	9.816569	3.329086	55.10709	10.45072	3.441515
bspl4.13	51.76755	7.790146	2.834009	54.90760	8.652160	2.925408
bspl4.14	51.79955	7.305552	2.644770	54.59768	8.824068	2.961042
bspl4.15	51.29678	8.214794	2.821020	54.13545	9.954113	3.218092
bspl4.16	50.49227	11.35239	3.561123	53.01953	11.07445	3.405038
bspl4.17	49.64898	13.00425	3.622979	52.03442	11.90427	3.504036
bspl4.18	48.42128	15.31641	4.161498	50.98682	13.33641	3.835684
bspl4.19	47.19234	16.29039	4.033856	49.72634	14.56973	3.910645
bspl4.20	45.87522	16.7833	4.268595	48.25724	15.12334	4.016936
bspl4.21	44.59263	17.52607	4.214525	46.69132	15.69988	4.046867
bspl4.22	43.57350	17.80479	4.426193	45.21288	15.68711	3.986068
bspl4.23	42.51129	18.56880	4.161591	43.85547	15.41309	3.954589
bspl4.24	41.97668	17.50709	4.333394	42.67318	15.16646	3.941736
bspl4.25	41.51227	17.48966	3.836335	41.66994	14.74939	3.573279
bspl4.26	41.14686	15.55888	3.900027	40.80217	13.11585	3.618427
bspl4.27	40.93586	14.48509	3.677732	40.19921	12.41501	3.259373
bspl4.28	40.96247	13.68413	3.099343	39.77705	10.98741	2.862600
bspl4.29	40.64836	10.47752	3.070295	39.45292	8.492702	2.574626
bspl4.30	40.23605	8.666949	2.961403	38.95113	6.001603	2.488480

Gráfica 25. B-splines y estadística descriptiva del cuarto 10 - temperatura de puerta



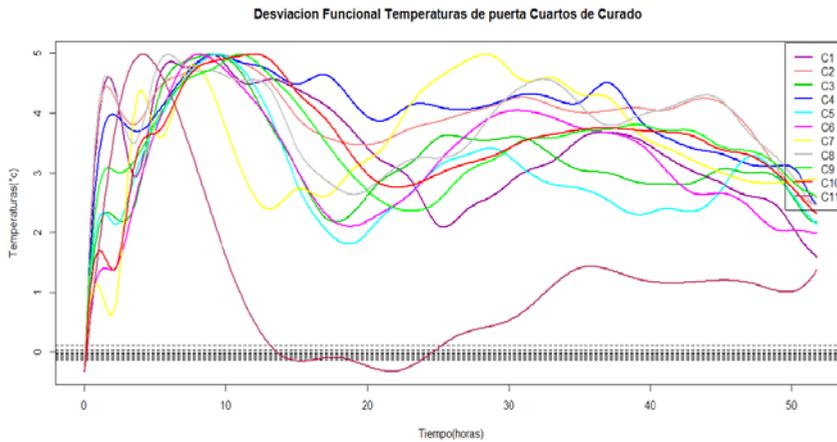
Gráfica 26. Medias funcionales de las temperaturas de puerta

Las medias funcionales de las temperaturas de la puerta, para cada uno de los cuartos, se pueden agrupar como se observa en las **Gráficas 25** y **26**, lo cual permite encontrar diferencias entre estas. La curva atípica muestra que en el cuarto 11 se presentó un comportamiento adecuado del proceso.

Gráfica 27. Varianza funcional temperaturas de puerta

A continuación, en la **Gráfica 28**, se encuentran las varianzas funcionales obtenidas de las temperaturas de puerta de cada uno de los cuartos. El comportamiento de las curvas muestra mayor variabilidad en los cuartos de curado 4 y 7.

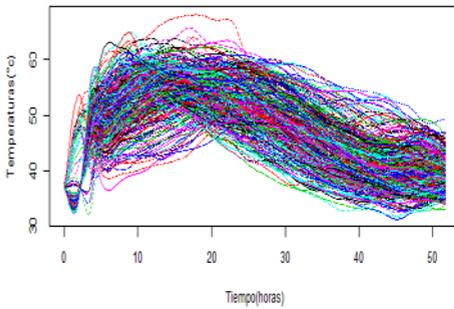
Gráfica 28. Desviación funcional de temperatura de puerta



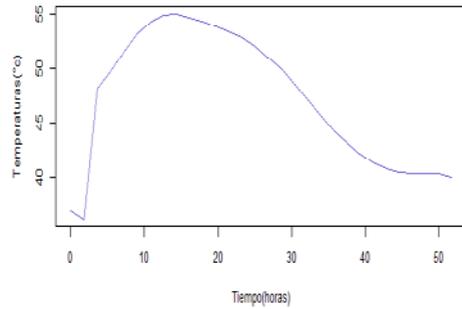
Por otro lado, la **Gráfica 29** resume el comportamiento del estadístico descriptivo funcional para los datos de temperatura de la puerta. La primera gráfica, parte superior-izquierda, muestra las curvas suavizadas mediante el análisis B-splines, teniendo así la totalidad de las curvas de temperaturas de puerta, correspondiente a los 6 meses en cada uno de los cuartos de curado. La **Gráfica 29** muestra la compilación de la función media de los datos de la temperatura de la puerta correspondiente a la varianza de los datos, así como la desviación estándar.

Gráfica 29. Análisis de estadística descriptiva funcional de la temperatura de puerta de cuarto de curado.

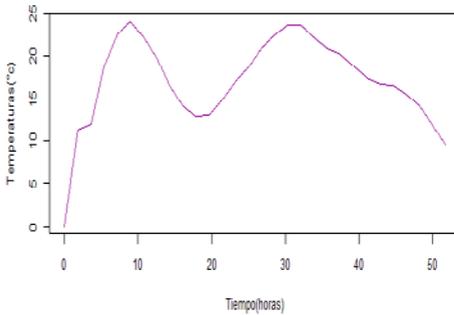
Bspline Temperatura de puerta Cuarto de Curado



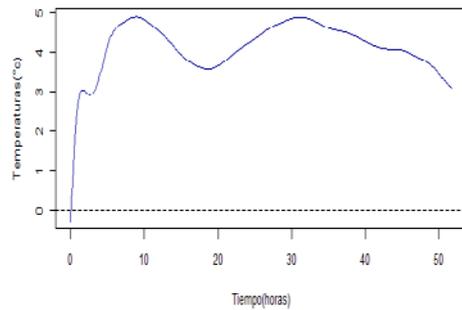
funcion media Temperatura de puerta Cuarto de Curado



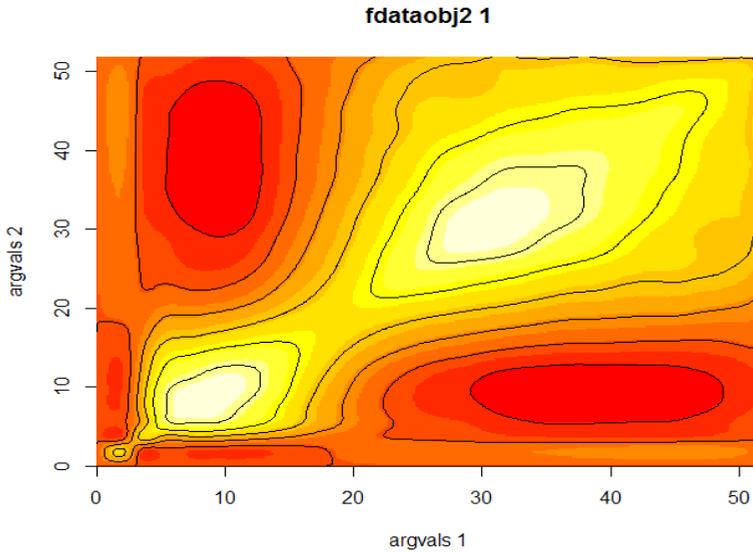
Funcion varianza Temperatura de puerta Cuarto de Curado



Desviacion Estandar Temperatura de puerta Cuarto de Curado

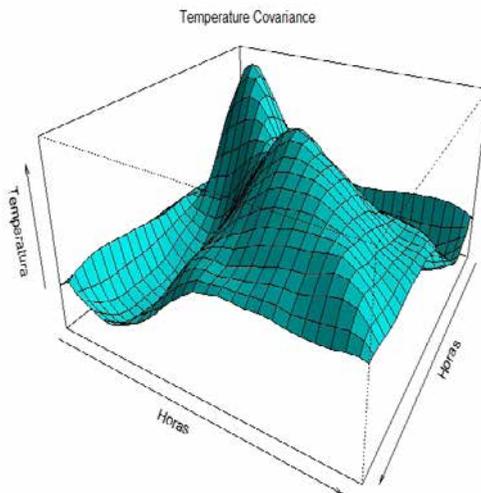


Gráfica 30. Superficie de varianza funcional - temperaturas de puerta



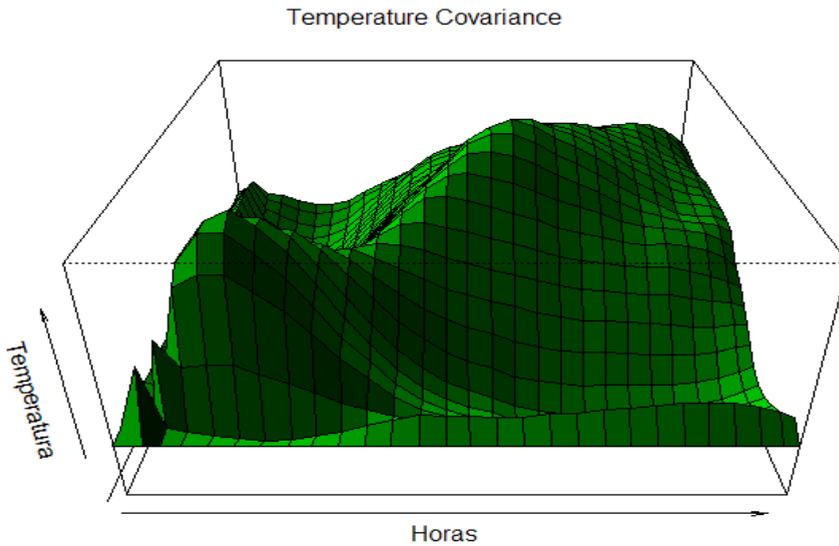
En la **Gráfica 30**, se ilustran con color amarillo aquellas zonas con mayor medida de dispersión de las temperaturas de la puerta que se encuentra en los cuartos de curado.

Gráfica 31. Covarianza 3D de los cuartos de temperatura de puerta

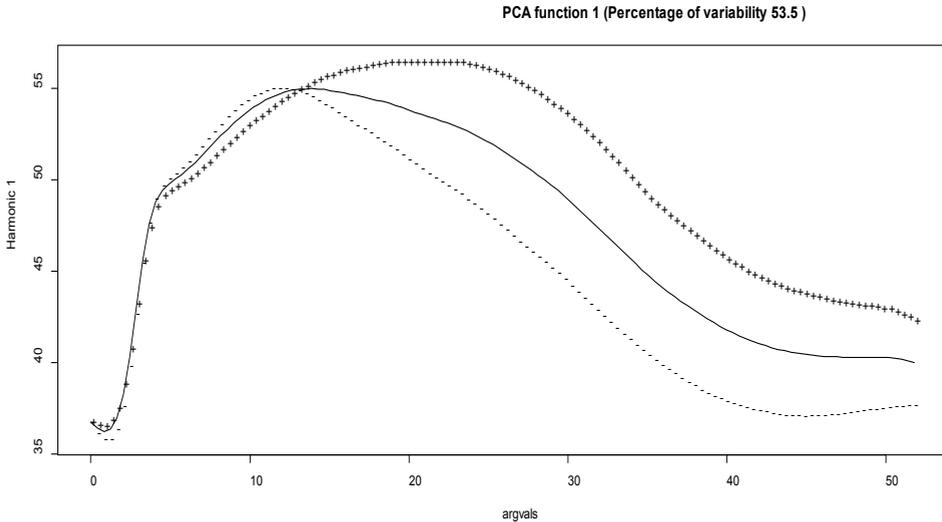


Las mayores medidas de variabilidad de las temperaturas de la puerta se concentran en las primeras horas del proceso de curado, disminuyendo progresivamente en la parte central del proceso. Se puede observar que, en las últimas horas de este proceso, la variabilidad se minimiza, como se presenta en la **Gráfica 24**.

Gráfica 32. Covarianza 3D de los cuartos de temperatura de puerta

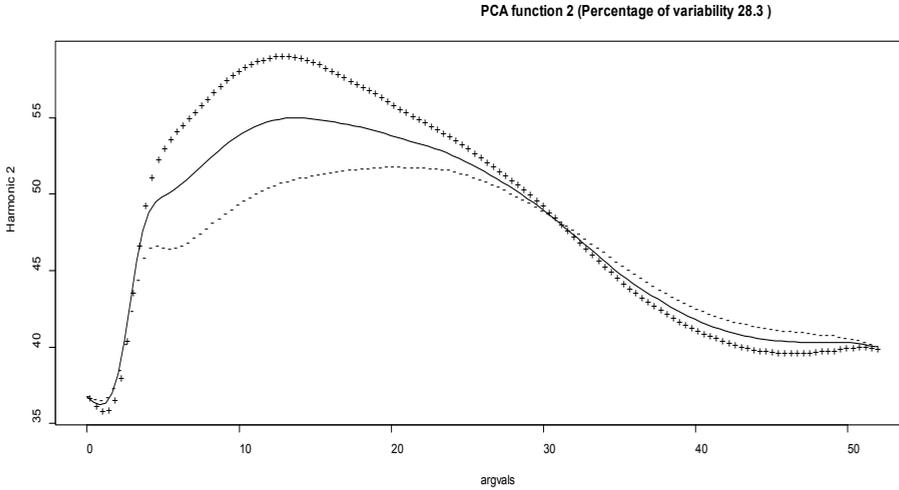


Gráfica 33. Primer componente principal funcional, 53.5% de variabilidad en los cuartos de temperatura de puerta



Por otra parte, aplicando el análisis de los componentes principales y funcionales para reducir la dimensionalidad, se puede proporcionar información más exhaustiva en cuanto a la variabilidad del proceso. Estos componentes (**Gráficas 33 y 34**) representan la variabilidad encontrada alrededor de la media funcional. Este método propone examinar las gráficas de la media global y de las funciones que se obtienen al sumar y sustraer un múltiplo conveniente para cada uno de los componentes. La mayor parte de la variabilidad se presenta en el primer componente con el 53.5%, como se ve en la **Gráfica 33**. Por otro lado, en la **Gráfica 34** se aprecia el segundo componente funcional, con el 28.3%.

Gráfica 34. Segundo componente principal funcional, 28.3% de variabilidad de los cuartos de temperatura de la puerta.



4.8. Profundidad funcional y detección de curvas atípicas por cuarto

La profundidad funcional es la expresión de orden en los datos funcionales. El diagrama *boxplot* funcional muestra las profundidades de las curvas por cuarto de curado, como se encuentra en la **Gráfica 35**. Además, es importante señalar que una curva de mayor profundidad corresponde a la mediana funcional $Y_{0.5}$ del cuarto de curado 1, línea de trazado de color negro; en contraste con la de menor profundidad, las curvas atípicas, de color rojizo. Estas últimas curvas se diferencian estadísticamente del resto de la información, para este caso de estudio, debido a su menor profundidad, véase **Tabla 20**. Las curvas atípicas son presentadas en los meses de febrero y mayo, específicamente, en su orden, curvaF1 y curvaMY2. Además, este análisis muestra como mediana funcional la curvaE6.

Gráfica 35. Curvas atípicas B-splines, cuarto 1 - temperatura de puerta

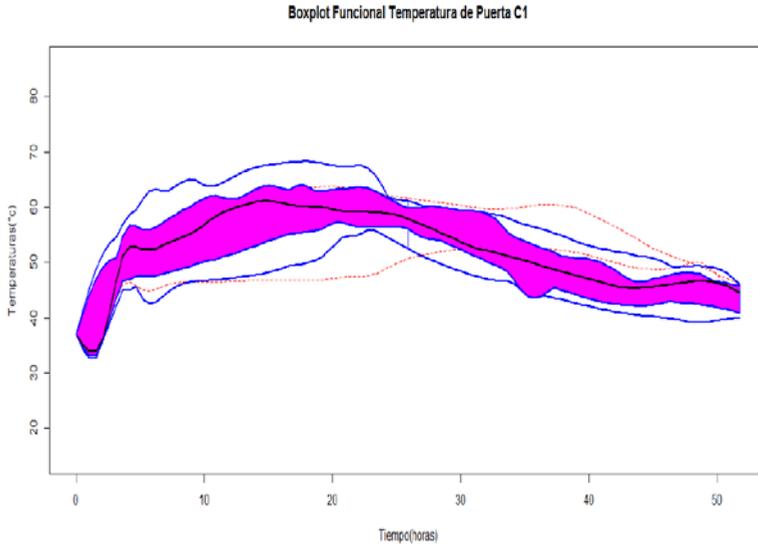


Tabla 20. Profundidades de las curvas (depth), curvas atípicas (outpoint) y curva mediana (medcurve) de la puerta del cuarto 1.

\$depth							
CuevaE1	CurvaE2	CurvaE3	CurvaE4	CurvaE5	CurvaE6	CurvaE7	CurvaF1
0.4629828	0.3744537	0.4094045	0.4584039	0.3694734	0.4995243	0.2548093	0.1945411
CuevaF2	CurvaF3	CurvaF4	CurvaF5	CurvaF6	CurvaF7	CurvaM1	CurvaM2
0.2591205	0.4425267	0.2169447	0.2925103	0.2859840	0.3516635	0.2557607	0.2837243
CuevaM3	CurvaM4	CurvaM5	CurvaM6	CurvaM7	CurvaA1	CurvaA2	CurvaA3
0.3544138	0.3544882	0.4245681	0.4088247	0.3507567	0.4856094	0.4227544	0.4274522
CuevaA4	CurvaA5	CurvaA6	CurvaA7	CurvaMY1	CurvaMY2	CurvaMY3	CurvaMY4
0.4591473	0.4471947	0.4065352	0.4645586	0.4313175	0.2126483	0.3764309	0.3833437
CuevaMY5	CurvaMY6	CurvaMY7	CurvaJ1	CurvaJ2			
0.2896263	0.4561889	0.2454435	0.4551482	0.3983885			
\$outpoint							
[1]	8	30					
\$medcurve							
CurvaE6							
6							

En el caso de las temperaturas de la puerta del cuarto de curado 10 (presentadas anteriormente en la **Gráfica 37**), se observaron seis curvas atípicas en los meses de febrero, marzo, abril, mayo y junio, expuestas en la **Tabla 21**. Las curvas atípicas son curvaF1, curvaM1, curvaM2, curvaA7, curvaMY2, curvaJ2, teniendo como mediana funcional la curvaA2.

Gráfica 36. Curvas atípicas B-splines cuarto 10 - temperatura de puerta

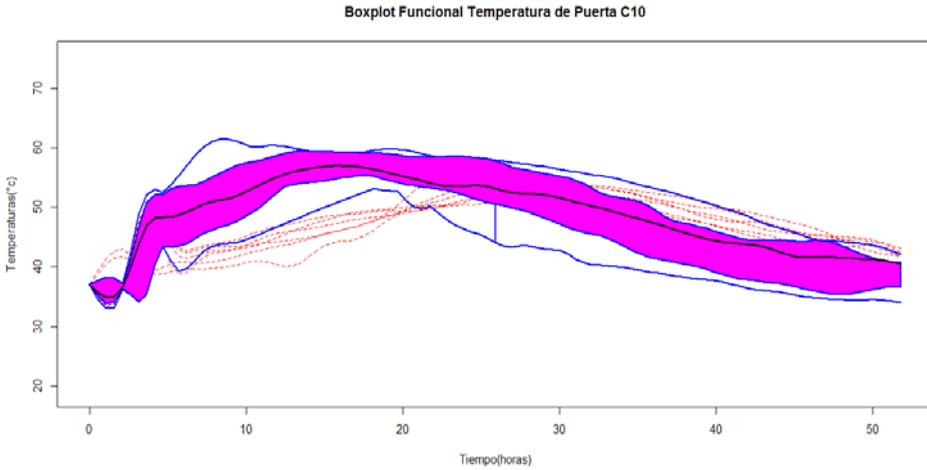


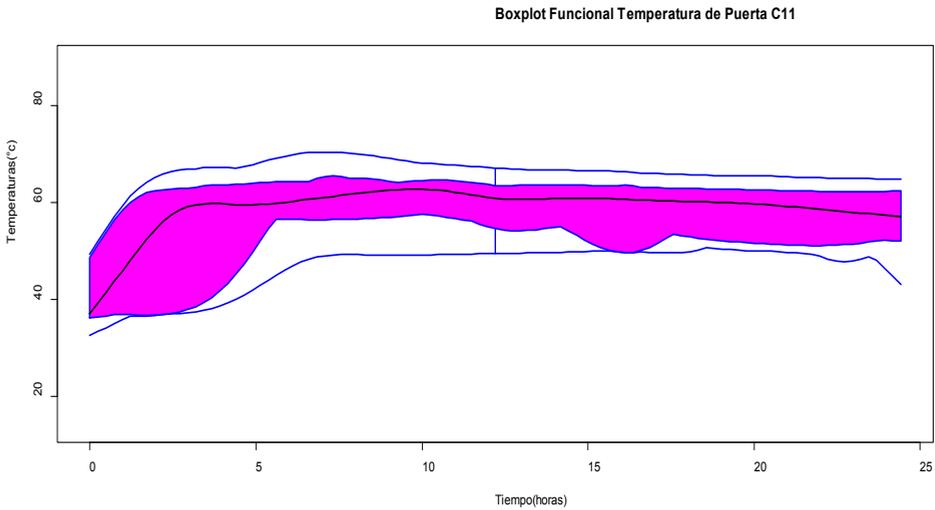
Tabla 21. Profundidades de las curvas (depth), curvas atípicas (outpoint) y curva mediana (medcurve) de la puerta del cuarto 10

\$depth							
CuevaE1	CurvaE2	CurvaE3	CurvaE4	CurvaE5	CurvaF1	CurvaF2	CurvaF3
0.4068389	0.4133464	0.3513853	0.4011298	0.4448858	0.2148076	0.3931452	0.5105597
CuevaF4	CurvaF5	CurvaM1	CurvaM2	CurvaM3	CurvaM4	CurvaM5	CurvaM6
0.4434885	0.4409334	0.2533735	0.2469459	0.2724968	0.4050423	0.4528705	0.5014173
CuevaA1	CurvaA2	CurvaA3	CurvaA4	CurvaA5	CurvaA6	CurvaA7	CurvaA8
0.2786849	0.5238143	0.4787807	0.4509941	0.2870289	0.3926262	0.3675543	0.4337871
CuevaMY1	CurvaMY2	CurvaMY3	CurvaMY4	CurvaJ1	CurvaJ2	CurvaJ3	CurvaJ4
0.4602563	0.2614780	0.2811602	0.2228721	0.3612065	0.3709478	0.3676741	0.3084677
\$outpoint							
[1]	6	11	12	23	26	30	

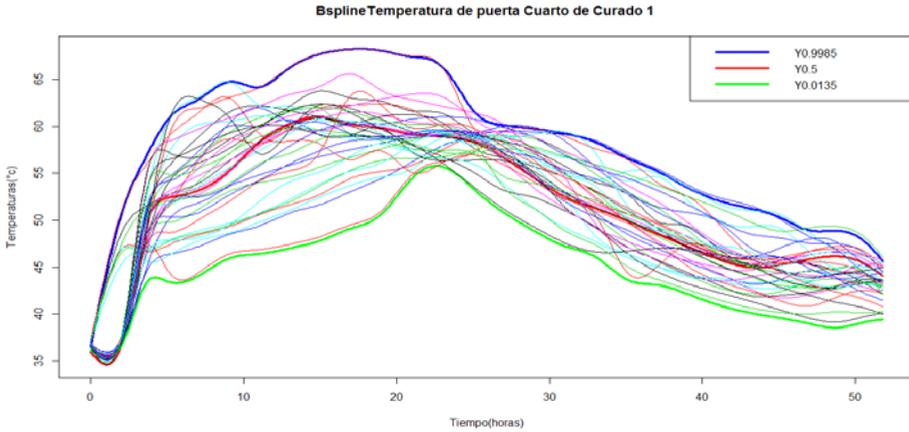
\$medcurve							
CurvaA2							
18							

Por otro lado, el análisis en el cuarto once (véase **Gráfica 37**) es el proceso automatizado de la temperatura de la puerta. Se observó que no presenta ninguna curva atípica, lo cual indica que seguramente sus procesos de curado son más eficientes a los cuartos manuales. Por tanto, este cuarto es tomado como referencia para el análisis comparativo.

Gráfica 37. Curvas atípicas B-splines cuarto 11 - temperatura de puerta

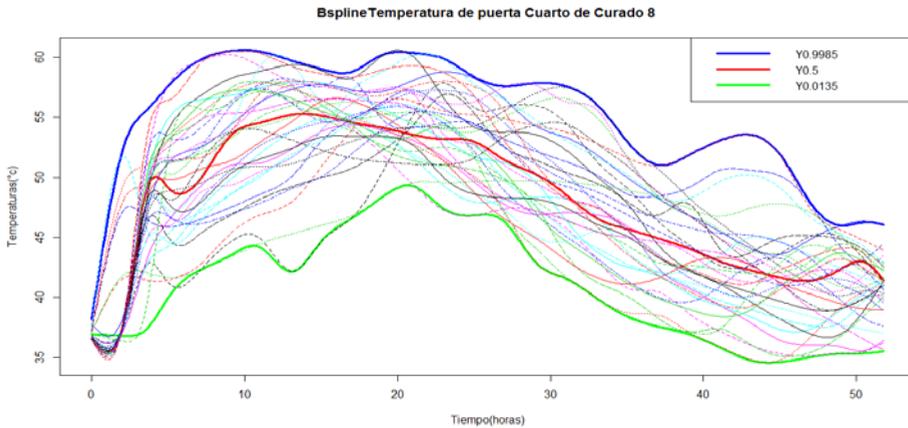


Posteriormente, se obtuvieron los percentiles $Y_{0.0135}$, $Y_{0.5}$ y $Y_{0.9985}$ funcionales de cada cuarto a partir de sus profundidades, siendo estos percentiles las curvas encontradas en la periferia de nubes de las curvas.

Gráfica 38. Percentiles funcionales cuarto 1 - temperatura de puerta

Las temperaturas del cuarto de curado 1 y 8 (**Gráficas 38 y 39**, respectivamente) están localizadas en la entrada o puerta del cuarto. El percentil funcional superior se demarcó de color azul, siendo las bases de mayor temperatura en cada instante de tiempo. De forma idéntica, se presentaron en el percentil inferior de color verde, siendo las temperaturas más bajas en ese mismo lapso. En el caso de la mediana funcional, demarcada con color rojo, la curva está constituida de bases, con profundidad mayor a las otras, lo que implica la mitad de la información funcional. Se puede evidenciar que los percentiles de los cuartos de curado experimentaron un comportamiento diferente; en cada cuarto de curado se determinaron los percentiles funcionales.

Gráfica 39. Percentiles funcionales cuarto 8 - temperaturas de puerta



4.9. Indicadores de capacidad del proceso de curado con límites de especificación discretos

En este caso de estudio, se obtuvieron las ecuaciones polinómicas grado tres de los límites de especificaciones y de los respectivos percentiles de los cuartos de curado. Dichos límites, en este estudio, poseen un comportamiento discreto, es decir, en cada instante de tiempo sus especificaciones serán fijas y no tendrán en cuenta el comportamiento propio del proceso, ni la información funcional de los datos.

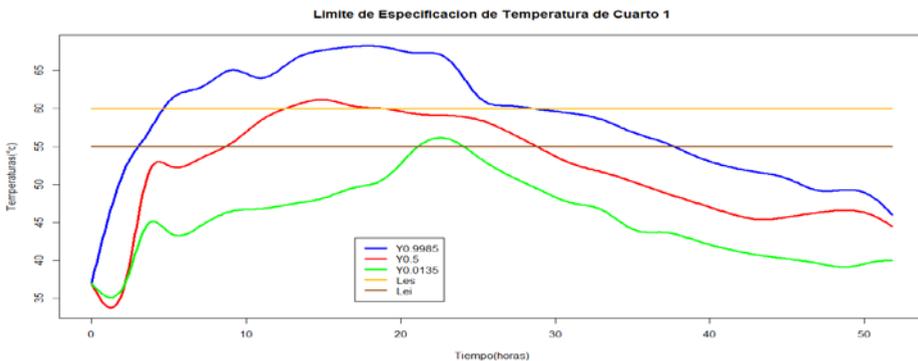
Tabla 22. Ecuaciones polinómicas grado 3 de los límites de especificación.

Límites de especificación		
Forma discreta	Ecuación polinómica	Integral (Área bajo la curva) u^2
USL:60 °C	$4 \times 10^{-14} X^2 - 7 \times 10^{-13} X + 60$	1800
LSL:55 °C	$2 \times 10^{-16} X^3 + 4 \times 10^{-14} X^2 - 8 \times 10^{-13} X + 55$	1650

Las especificaciones se obtienen integrando el área bajo la curva de las ecuaciones polinómicas de los límites de especificación USL, LSL. Estas áreas son de 1800 unidades cuadradas y 1650 unidades cuadradas, respectivamente. En la **Gráfica 40**, se observó que en instantes de tiempo los límites de especificación naturales son superados por los percentiles de la curva funcional, es decir, se presentan temperaturas mayores a 60°C. Lo anterior provoca, en teoría, el fortalecimiento de los ciclos de vida de la batería y la disminución del tiempo de arranque.

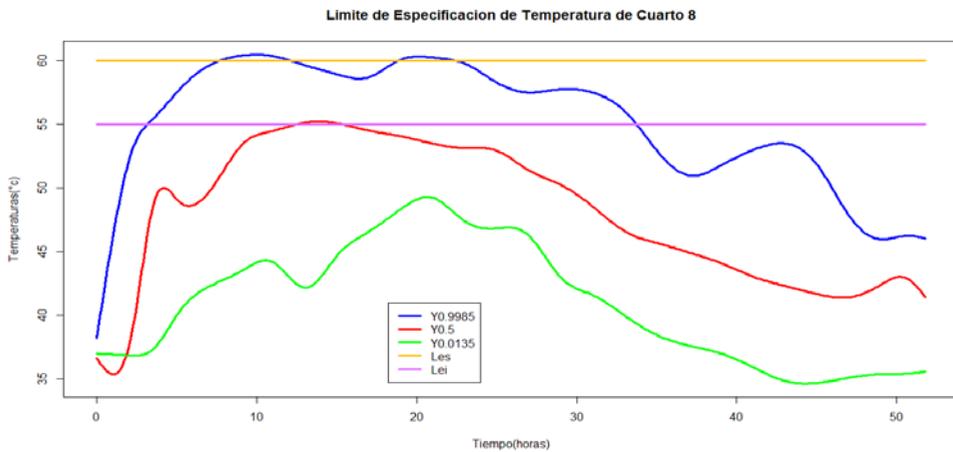
La variabilidad del proceso con respecto al límite inferior LSL, el cual estuvo, la mayor parte del tiempo, por debajo de la especificación inferior con temperaturas entre 35°C y 55°C. Estas temperaturas, al contrario de los valores elevados, mejoran el arranque, pero disminuyen el ciclo de vida de la batería.

Gráfica 40. Percentiles funcionales con límites de especificación superior e inferior de temperatura, cuarto 1



A continuación, se muestra el cuarto ocho (**Gráfica 41**), en el cual la distancia de la mediana funcional a la especificación inferior LSL es considerablemente menor que la dispersión unilateral inferior del proceso. Por tanto, el indicador C_{pi} será bajo, y en algunos casos, con valores negativos. En el indicador C_{pu} se valora la distancia entre la mediana funcional y la especificación superior USL; esta es considerablemente mayor comparada con la dispersión unilateral superior del proceso, lo que dará relativamente un índice de mejores condiciones de capacidad.

Gráfica 41. Percentiles funcionales con límites de especificación superior e inferior de temperatura, cuarto 8



Posteriormente, se evaluaron las áreas de las curvas del total de los cuartos y se extendió la expresión matemática de la propuesta de Vargas a los cuartos de curado, veáse **Tabla 23**.

Tabla 23. Índices de capacidad de la temperatura de la puerta del cuarto de curado con límites de especificaciones lineales de temperatura

Índice de capacidad por cuartos de temperatura de puerta				
	cp	cpu	cpl	cpk
Cuarto 1	0.40	1.52	-0.71	-0.71
Cuarto 2	0.33	1.59	-0.86	-0.86
Cuarto 3	0.38	2.46	-1.56	-1.56
Cuarto 4	0.42	1.91	-2.43	-2.43
Cuarto 5	0.49	3.11	-1.72	-1.72
Cuarto 6	0.34	2.11	-1.36	-1.36
Cuarto 7	0.50	3.00	-2.37	-2.37
Cuarto 8	0.35	1.76	-1.31	-1.31
Cuarto 9	0.32	1.90	-1.04	-1.04
Cuarto 10	0.51	2.77	-1.59	-1.59

Aplicado en este estudio de caso, la capacidad tradicional o clásica muestran indicadores muy bajos e incluso negativos. Este tipo de indicadores de capacidad no son los adecuados en este tipo de comportamiento; tal y como se evidencia, el desempeño de los cuartos de curado muestra un incumplimiento frente a las especificaciones de diseño. El estudio de caso muestra una dispersión natural del proceso: en todos los cuartos es mayor a las especificaciones establecidas en el proceso. La amplitud de las especificaciones muestra un valor de aproximadamente 50% de la variación de esta característica de calidad, presente en los datos de la temperatura de la puerta. Por otro lado, se presentaron casos donde no se calculó la capacidad, debido a la presencia de altos números de curvas atípicas en el estudio de la profundidad funcional. De este modo, en la región intercuantil del *boxplot*, la determinación de los percentiles fueron inviables.

5. Contraste mediante simulación de indicadores de capacidad univariados

En el presente capítulo se expone, mediante simulación en lenguaje R, un contraste de algunos de los indicadores clásicos propuestos en este texto de investigación. La simulación parte de asumir algunas de las distribuciones de probabilidad conocidas, con parámetros previamente dados. Estas distribuciones de probabilidad asumidas se condicionan de forma que posean sesgamiento positivo o negativo, es decir, un comportamiento asimétrico del proceso, como suele presentarse comúnmente en muchos de los procesos productivos; en últimas, comportamientos alejados del supuesto de normalidad frecuentemente utilizado para evaluar estos indicadores.

5.1. Procedimiento para calcular el índice de capacidad univariado

El proceso de simulación de estos índices se lleva a cabo mediante programas de computación diseñado en lenguaje R, véanse anexos A, B, C y D.

En el caso univariado se consideran procesos con las siguientes consideraciones iniciales:

- a) las distribuciones aplicadas son en su orden: la distribución Normal con parámetros $N \sim (2.5, 0.5)$, la distribución Wei-

bull con parámetros $W \sim (8,3)$ y la distribución Gamma con parámetros $G \sim (2, 3)$

- b) Suponiendo que los errores ε_i son independientes, con varianza conocida y distribución normal con parámetros $N \sim (0, \sigma^2)$, se establecen los límites de especificaciones superior e inferior, considerados en esta simulación, respectivamente como $USL = 3, LSL = 1$.

Las etapas desarrolladas en el proceso de simulación son las siguientes:

1. En cada una de las distribuciones asumidas, se evalúan los indicadores de capacidad paramétrico y no paramétrico de tipo univariado para un tamaño de muestra de mil (1000) y un número de repeticiones de treinta mil (30000).
2. Se evalúa, basado en la distribución asumida por el porcentaje w de calidad comercial, si este porcentaje puede ubicarse por encima o por debajo del límite superior o del límite inferior de especificación, respectivamente.
3. Se presenta, a continuación, una comparación desde el punto de vista descriptivo e inferencial de los indicadores de capacidad clásicos frente al propuesto, para evaluar las diferencias significativas entre estos. En la parte descriptiva se presentan los promedios de cada uno de los indicadores, visualizados en diagramas *box-plots*, intervalos de confianza y análisis de varianza en el paramétrico; mientras en el caso no paramétrico la prueba aplicada es la de Kruskal Wallis (Montgomery, 2004b).
4. Se presenta, posteriormente, un caso de estudio con la intención de contrastar los indicadores de capacidad tradicionales con los indicadores de capacidad propuestos.

5.2. Simulación

La **Tabla 24** muestra la simulación obtenida de los indicadores de capacidad clásicos y la nueva propuesta de los indicadores de capacidad con **calidad comercial**. Se presenta información de la característica de calidad de interés, tanto en los casos paramétricos como los no paramétricos.

Tabla 24. Simulación de los índices de capacidad clásicos en contraste con el índice de capacidad comercial, seleccionando el límite de especificación inferior como productos con calidad comercial.

	Incremento de la desviación delta δ	Índice de capacidad Normal C_p	Índice de capacidad con valor objetivo C_{pm}	Índice de capacidad de centramiento C_{pk}	Índice de capacidad de Clements	Índice de capacidad de calidad comercial C_{PCR}
	0.00	0.483	0.447	0.464		0.899
	0.05	0.441	0.414	0.450		0.798
Paramétrico	0.10	0.431	0.415	0.424		0.793
	0.15	0.393	0.381	0.388		0.721
	0.20	0.381	0.374	0.391		0.687
No paramétrico						
Normal (2,2,0.5)					0.6670	0.6736
Weibull (8,3)					0.8105	0.8107
Gamma (2, 3)					0.7320	1.3430

Se observan valores de índices de capacidad comercial superiores a los clásicos C_p y C_{pk} . Esta situación permanece invariante para incrementos de la desviación estándar del proceso; por ejemplo, si esta se incrementa un cinco por ciento (**5%**), el índice de capacidad clásico poseería un valor de **0.441**, en contraste con el comercial que es de **0.798**. Esto implica, de hecho, un incremento significativo en el desempeño. Los esfuerzos de calidad se deben centrar en eliminar los factores causantes de no conformidades encima del límite superior de especificación.

En el caso no paramétrico se observa una diferencia significativa cuando el proceso se desplaza hacia el límite inferior de especificación, distribución Gamma (2,3). Es en esta localización en donde se encuentra el producto con calidad comercial, por lo que el índice no paramétrico de Clements (1989) consideraría estos productos como no conformes con un índice de capacidad de **0.7320**, mientras el indicador propuesto en esta investigación no lo hace, arrojando un indicador de **1.3430**.

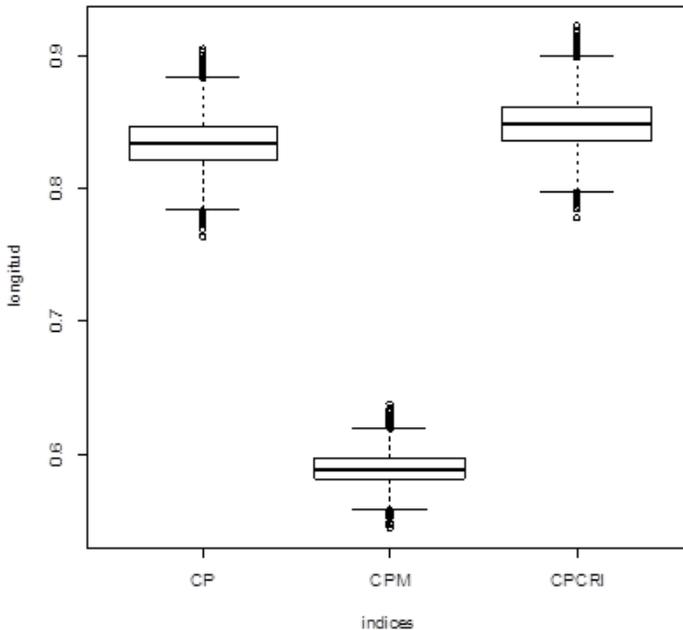
La **Tabla 25** muestra el contraste entre los intervalos de confianza de los índices clásicos con respecto al **comercial**, observando una diferencia significativa entre ellos. Para el caso de un incremento de la variabilidad del 15%, bajo las mismas condiciones, el intervalo para el C_{pm} está entre 0.37517 y 0.4255, mientras que el C_{pCR} posee valores entre 0.6780 y 0.7678.

Tabla 25. Simulación de los intervalos de confianza para el índice de capacidad clásico, en contraste con el índice de capacidad comercial, seleccionando el límite de especificación inferior, como productos con calidad comercial.

Incremento de la desviación delta δ	Índice de capacidad con valor objetivo C_{pm}		Índice de capacidad de calidad comercial C_{pCR}	
	Intervalo de confianza		Intervalo de confianza	
	Límite inferior	Límite superior	Límite inferior	Límite superior
0.00	0.3795	0.4298	0.6867	0.7778
0.05	0.4287	0.4855	0.7937	0.8989
0.10	0.4104	0.4648	0.7566	0.8569
0.15	0.3757	0.4255	0.6780	0.7678
0.20	0.3460	0.3919	0.6317	0.7155
0.25	0.3433	0.3889	0.6276	0.7108
0.30	0.3314	0.3754	0.5921	0.6706
0.35	0.3332	0.3774	0.6169	0.6987
0.40	0.3238	0.3665	0.5843	0.6618

Una comparación descriptiva de los indicadores paramétricos, como se presenta en la **Gráfica 42**, muestra una diferencia significativa entre las capacidades de los procesos, ratificada en el proceso de simulación, véase **Anexo C**. Al aplicar técnicas estadísticas inferenciales, en este caso, el análisis de varianza (Montgomery, 2004b) se obtienen, mediante este método, un p-valor debajo del nivel de significancia establecido de 0.05 y un p-valor de $2.0e - 16$, lo que implica una discrepancia entre los índices de capacidad paramétricos.

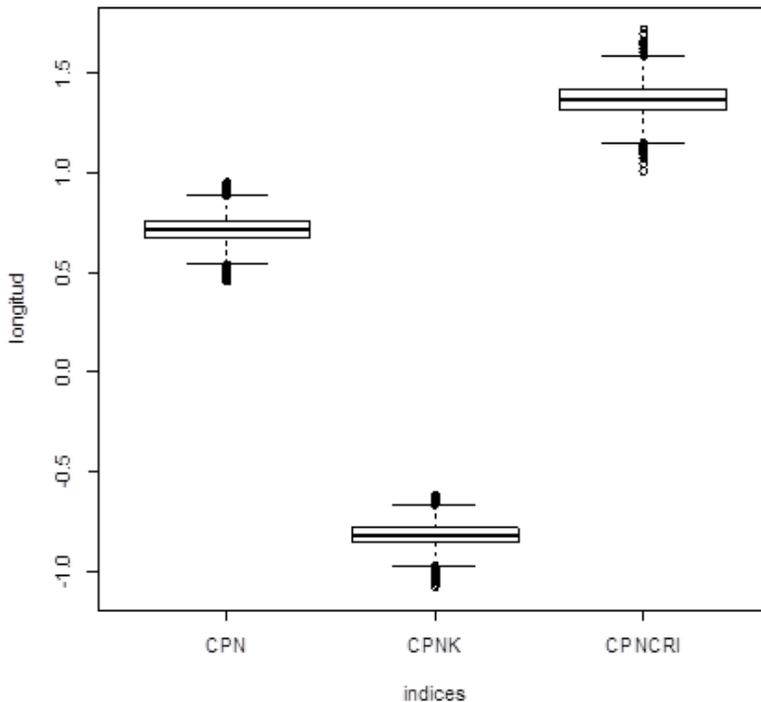
Gráfica 42. Comparación de los índices de capacidad paramétricos para una muestra simulada de $n=1000$, k réplicas=30000



En cuanto a los indicadores no paramétricos (véase **Gráfica 43**), se observa claramente una diferencia significativa entre los indicadores y la simulación en R encontrada en el **Anexo D**. Asimismo, se muestra una comparación de los índices de capacidad no paramétricos, empleando la prueba de Kruskal Wallis (Montgomery, 2004b). El estadístico de prueba posee un valor importante $\chi^2 = 81385$, es decir, la evidencia estadística indica una diferencia significativa entre los indicadores no paramétri-

cos con un p-valor menor a $2.2e - 16$, valor que se encuentra por debajo del nivel de significancia establecido de 0.05.

Gráfica 43. Comparación de los índices de capacidad no paramétricos para muestra simulada de $n=1000$, k réplicas=30000



5.3. Discusiones futuras

Las formulaciones teóricas presentadas en este trabajo de investigación muestran indicadores de **calidad comercial** superiores a los valores expuestos en las ecuaciones clásicas de capacidad. Estas diferencias entre los propuestos, con respecto a los tradicionales, se evidencian en el proceso de simulación en el programa R.

El resultado de asumir la calidad de un producto con una dualidad, cumplir o no las especificaciones, es errónea. En contraste, en la realidad se presentan productos no conformes con relación a algunos criterios técnicos de diseño, pero comercialmente válidos para el mercado. Es imperativo que, en el área de control estadístico, se tenga a corto plazo un indicador consensuado, además de práctico, con la intención de evaluar el comportamiento de los procesos acorde con los criterios de calidad actualmente esgrimidos en el rendimiento o desempeño de este.

Por otra parte, un desplazamiento completo del proceso, en algunos de los límites de especificaciones, ocurre cuando el promedio estimado se encuentra por debajo de la especificación inferior o por encima de la superior; esto induce a valores negativos en los índices de centramiento. En tal caso, se sugiere aplicar el valor absoluto en este indicador. Las simulaciones evidencian, para todas las distribuciones simuladas en R, que los indicadores de **calidad comercial** son siempre superiores a los obtenidos, tanto en los indicadores clásicos paramétricos, como en los no paramétricos.

Esta propuesta se puede generalizar para indicadores de capacidad multivariante, casos paramétricos y no paramétricos, en donde se presente la evaluación de p variables simultáneamente. Requiere, por lo tanto, de una argumentación estadística más elaborada con el propósito de implementar estos nuevos conceptos.

Referencias

- Boyles, R.A. (1994). Process Capability with Asymmetric Tolerances. *Communications in Statistics: Computation and Simulation*, 23 (3), 615-635. DOI:[10.1080/03610919408813190](https://doi.org/10.1080/03610919408813190)
- Chan, L. K., Cheng, S.W. & Spiring, F.A. (1988a) A New Measure of Process Capability: C_{pm} . *Journal of Quality Technology*, 20(3), 162-175. DOI:[10.1080/00224065.1988.11979102](https://doi.org/10.1080/00224065.1988.11979102)
- Chan, L. K., Cheng, S. W. & Spiring, F. A. (1988b). The Robustness of the Process Capability Index C_p to Departures from Normality. In Matusita, K. (Ed.), *Statistical Theory and Data Analysis II* (pp. 637-647) Amsterdam: North Holland: Elsevier Science Ltd.
- Chen S. & Hsu, N. (1995) The Asymptotic Distribution of the Process Capability Index C_{pmk} . *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 24(5), 1279-1291. DOI:[10.1080/03610929508831553](https://doi.org/10.1080/03610929508831553)
- Chen, J. (2000). Re-evaluating the Process Capability Indices for Non-normal Distributions. *International Journal of Production Research*, 38(6) 2000, 1311-24. DOI:[10.1080/002075400188861](https://doi.org/10.1080/002075400188861)
- Chen, J. & Ding, C. G. (2001). A New Process Capability Index for Non-Normal Distributions. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 18(7), 762-770. DOI:[10.1108/02656710110396076](https://doi.org/10.1108/02656710110396076)
- Chen, K.S. & Pearn, W.L. (1997) An Application of Non-Normal Process Capability Indices. *Quality and Reliability Engineering International*, 13, p. 355-360.

- Choi, B. & Owen, D.B. (1990) A Study of a New Process Capability Index. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19(4), 1231-1245. DOI:[10.1080/03610929008830258](https://doi.org/10.1080/03610929008830258)
- Clements, J.A. (1989) Process Capability Calculations for Non-normal Distributions. *Quality Progress*, 22, 95-100.
- Coronel-Brizio, H. F. & Hernández-Montoya, A. R. (2010). The Anderson-Darling Test of Fit for the Power-Law Distribution from Left-Censored Samples. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(17), 3508-3515. DOI:[10.1016/j.physa.2010.03.041](https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.03.041)
- Davinson, A. C. & Smith, R. L. (1990) Models for Exceedances over High Thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 52(3), 393-442.
- Deming, W. (1989) *Calidad, productividad y competitividad: La salida de la crisis*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.
- Drake, P. (2016). *Dimensioning and Tolerancing*. New York: McGraw-Hill.
- Garrido, A. y Vásquez, J. (2018). *Modelamiento estadístico del proceso de curado en la producción de baterías plomo ácido de la empresa baterías Willard S.A.* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.
- Guevara, R. D. & Vargas, J. A. (2015). Process Capability Analysis for Nonlinear Profiles Using Depth Functions. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(3), 465-487. DOI:[10.1002/qre.1605](https://doi.org/10.1002/qre.1605)
- Guevara, R. D. y Vargas, J. A. (2006). Intervalos de confianza para los índices de capacidad C_{pm} y C_{pmk} en procesos estacionarios gaussianos. *Revista Colombiana de Estadística*, 29(2), 153-162.
- Gunter, B. H. (1989). The Use and Abuse of C_{pk} Part 2. *Quality Progress*, 22(3), 108-109.
- Herrera R. (2019). Propuesta de índice de capacidad univariado con calidad comercial (Investigación para ascenso docente). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.
- Hosking, J. R. M. & Wallis, J. R. (1987) Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*, 29(3), 339-349. DOI:[10.2307/1269343](https://doi.org/10.2307/1269343)

- Hsiang, T. & Taguchi, G. (1995) A Tutorial on Quality Control and Assurance - The Taguchi Methods. ASA Annual Meeting. Las Vegas: ASA Annual Meeting
- Ishikawa, K. (1997). ¿Qué es el control total de calidad? La modalidad japonesa (11ª edición). Madrid: Norma
- Kane, V. E. (1986). Process Capability Index. *Journal of Quality Technology*, 18(1), 41-52. DOI:[10.1080/00224065.1986.11978984](https://doi.org/10.1080/00224065.1986.11978984)
- Pan, J. & Li, C. (2014). New Capability Indices For Measuring the Performance of a Multidimensional Machining Process. *Expert Systems with Applications*, 41(5), 2409-2414. DOI:[10.1016/j.eswa.2013.09.039](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.09.039)
- Juran, M. (1974). *Juran's Quality Control Handbook* (3rd Edition). New York: McGraw-Hill.
- Lin, G. H. & Pearn, W. L. (2003). Distributions of the Estimated Process Capability Index Cpk. *Stochastics and Quality Control*, 18(2), 263-279. DOI:[10.1515/EQC.2003.263](https://doi.org/10.1515/EQC.2003.263)
- Montgomery, D. (2004a). *Control estadístico de la calidad (Tercera Edición)*. México: Limusa Wiley
- Montgomery, D. (2004b). *Diseño y análisis de experimentos (segunda edición)*. México: Limusa Wiley.
- Pearn, W. L., Kotz, S. & Johnson, N.L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 24(4). 216-233. DOI:[10.1080/00224065.1992.11979403](https://doi.org/10.1080/00224065.1992.11979403)
- Pearn, W. L., Lin, G. H. & Chen, K. S. (1998). Distributional and Inferential Properties Of Process Accuracy And Process Precision Indices. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(4), 985-1000. DOI:[10.1080/03610929808832139](https://doi.org/10.1080/03610929808832139)
- Pearn, W. L. & Wu, C. (2006). Production Quality and Yield Assurance For Processes With Multiple Independent Characteristics. *European Journal of Operational Research*, 173(2), 637-647. DOI:[10.1016/j.ejor.2005.02.050](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.02.050)
- Pearn, W. L. & Chen, K. S. (1995). Estimating Process Capability Indices for Non-Normal Pearsonian Populations. *Quality and Reliability Engineering International*, 11(5), 386-388. DOI:[10.1002/qre.4680110510](https://doi.org/10.1002/qre.4680110510)

- Pickands, J. (1975) Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Ann. Statist*, 3(1), 119-131. DOI:10.1214/aos/1176343003
- Pignatiello, J. J., Ramberg, J. S. (1993) Process capability indices: just say no! In *Transactions of ASQC 47th Annual Quality Congress* (pp. 92-104). Boston, USA: Amer Society for Quality.
- Schneider, H., Pruett, J. & Lagrange, C. (1995). Uses of Process Capability Indices in the Supplier Certification Process. *Quality Engineering*, 8(2), 225-235. DOI:[10.1080/08982119508904621](https://doi.org/10.1080/08982119508904621)
- Shewhart, W. (1939). *Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control*. Nueva York: Dover.
- Shinde, R. L. & Khadse, K. G. (2009). Multivariate Process Capability Using Principal Component Analysis. *Quality and Reliability Engineering International*, 25(1), 69-77. DOI:[10.1002/qre.954](https://doi.org/10.1002/qre.954)
- Smirnov, N. (1960). *Tables of the Normal Integrals of Probabilities, Normal Densities and Normalized Derivatives*. Moscow: USRR Academy of Sciences Publishing House.
- Somerville, S. E. & Montgomery, D. C. (1996). Process Capability Indices and Non-Normal Distributions. *Quality Engineering*, 9(2), 305-316. DOI:[10.1080/08982119608919047](https://doi.org/10.1080/08982119608919047)
- Taguchi, G. (1986) *Introduction to Quality Engineering*. Tokyo: Asian Productivity Organization
- Tong, L. & Chen, J. (1998). Lower Confidence Limits of Process Capability Indices for Non-Normal Process Distributions. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 15(8-1), 907-919. DOI:[10.1108/02656719810199006](https://doi.org/10.1108/02656719810199006)
- Vännman, K. (1995) A Unified Approach to Capability Indices. *Statistica Sinica*, 5, 805-820.
- Vargas, J. (2006). *Control estadístico de calidad*. Bogotá, Colombia: Universidad del Nacional de Colombia.
- Zeiss / Applied Geometrics Inc. (2003). GD&T ASME Y14.5M-1994 Dimensioning and Tolerancing. Recuperado de http://members.marticonet.sk/jkuba/normy/ASME_Geometry_Dimension%20and%20Tolerances_Handouts.pdf

Zwick, D. (1995). A Hybrid Method for Fitting Distributions to Data and Its Use in Computing Process Capability Indices. *Quality Engineering*, 7(3), 601-613. DOI:[10.1080/08982119508918806](https://doi.org/10.1080/08982119508918806)

Glosario

A continuación, se presentan algunas de las definiciones y anotaciones expuestas en la presente investigación, con el objetivo de facilitar la comprensión e interpretación de los diferentes aspectos desarrollados en la presente propuesta de investigación:

Capacidad de proceso

Es el rendimiento o desempeño de un proceso, medible a través de un indicador que relaciona las especificaciones establecidas en el diseño de un(os) productos(s) con respecto a una variabilidad intrínseca 6σ (desviación estándar) o conjunta Σ (matriz de varianza covarianza para \mathbf{v} variables), monitoreado en línea con la intención de direccionarlo a condiciones óptimas de calidad, mediante ajustes sistemáticos.

Especificaciones

Intervalo o valor de tolerancia establecida por el diseño para cualquier característica de calidad medible de un producto.

Índice de capacidad univariante C_p

Es una medida adimensional establecida para determinar la capacidad del producto en el cumplimiento de las especificaciones.

Valor objetivo

Un valor ideal establecido en el proceso que permite un ajuste más real a las condiciones naturales del proceso, denotado como T .

Índice de capacidad de centramiento caso univariado

Es una medida adimensional de la capacidad cuyo objetivo es determinar el desplazamiento de las especificaciones con respecto a una de las características de calidad del producto y a su vez con respecto a la media C_{pk} . Un ejemplo de desplazamiento hacia la especificación superior **USL**: el índice de capacidad de centramiento es C_{pu} , si este desplazamiento es hacia el límite de especificación inferior **LSL**, el índice de capacidad de centramiento seleccionado es C_{pl} .

Producto con calidad comercial

Este enfoque de calidad es referente a productos con alguna deficiencia o incumplimiento parcial, con respecto a ciertas especificaciones de diseño. Sin embargo, para algunos clientes estos productos satisfacen las necesidades de funcionalidad.

ANEXO A. Programa de simulación en lenguaje R para indicadores de capacidad paramétricos.

Límite de especificación inferior posee calidad comercial.

```
##### INDICE DE
CAPACIDAD COMERCIAL UNIVARIADO
PARAMETRICO#####
```

```
n<-1000
miu<-67.5
delta<-0.20
sigma<-1.8
LES<-70
LSL<-65
T<-67
#####
xi<-rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
w<-pnorm(LSL,sd(xi),mean(xi))
#####
```

```
CP<-((LES-LSL)/(6*(sd(xi))))
CPU<-((LES-mean(xi))/(3*(sd(xi))))
CPM<-((LES-LSL)/(6*sqrt((sd(xi)^2+(T-mean(xi))^2)))
CPCRI<-(((LES-LSL)/(6*(sd(xi)))+w*abs((mean(xi)-LSL)/(3*(sd(xi)))))
CPCRI
```

```
#####INTERVALO DE CONFIANZA CP#####
#####
```

```
chs<-qchisq(p, n, lower.tail = T)
chi<-qchisq(1-p, n, lower.tail = T)
ICCPLS<-(CP*sqrt(chs/(n-1)))
ICCPLI<-(CP*sqrt(chi/(n-1)))
ICCPLI
ICCPLS
```

```
#####INTERVALO DE CONFIANZA CPR#####
#####
```

```
chs<-qchisq(p, n, lower.tail = T)  
chi<-qchisq(1-p, n, lower.tail = T)  
ICCPLS<-(CPCRI*sqrt(chs/(n-1)))  
ICCPLI<-(CPCRI*sqrt(chi/(n-1)))  
ICCPLI  
ICCPLS
```

ANEXO B. Programa de simulación en lenguaje R para indicadores de capacidad no paramétricos.

Límite de especificación inferior posee calidad comercial.

```
##### INDICE DE CAPACIDAD  
COMERCIAL UNIVARIADO NO PARAMETRICO-GAM  
MA#####  
  
n<-1000  
rate<-3  
shape<-2  
delta<-0.0  
LES<-3.0  
LSL<-1.0  
#####  
  
xi<-rgamma(n,shape,(1+delta)*rate)  
w<-pgamma(LSL,shape=2,rate=3)  
  
#####  
  
CPN<-((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))  
CPNU<-(LES-median(xi))/(quantile(xi,0.99865)-median(xi))  
CPNL<-(median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))  
CPNK<-min(CPNL,CPNU)  
CPNCRI<-((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))+w*abs(  
((median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))))  
  
##### INDICE DE CAPACIDAD  
COMERCIAL UNIVARIADO NO PARAMETRICO-WEIBU  
LL#####
```

```

n<-1000
rate<-3
shape<-8
delta<-0.0
LES<-3.0
LSL<-1.0
#####
xi<-rweibull(n,shape,(1+delta)*rate)
k<-pweibull(LSL,8,3)

CPN<-((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))
CPNU<-(LES-median(xi))/(quantile(xi,0.99865)-median(xi))
CPNL<-(median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))
CPNK<-min(CPNL,CPNU)
CPNCRI<-((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))+k*abs
(((median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))))

##### INDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL
UNIVARIADO NO PARAMETRICO-NORMAL #####
#####

n<-1000
miu<-2.2
sigma<-0.5
delta<-0.0
LES<-3.0
LSL<-1.0
#####
xi<-rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
m<-pnorm(LSL,miu,sigma)
#####

CPN<-((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))
CPNU<-(LES-median(xi))/(quantile(xi,0.99865)-median(xi))

```

```
CPNL<-((median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135)))  
CPNK<-min(CPNL,CPNU)  
CPNCRI<-(((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))+m*ab  
s(((median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))))  
#####
```

ANEXO C. Programa de simulación en lenguaje R para comparar indicadores de capacidad paramétricos.

```
#####ENTRADA DE DATOS
#####
n=1000
miu=2.2
delta=0
sigma=0.2
LES=2.8
LSL=1.8
T=2.0
k=30000
#####
x<-rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma)
CP=((LES-LSL)/(6*sd(x)))
CPM=((LES-LSL)/(6*sqrt((sd(x)^2+(T-mean(x))^2)))) #Calculo indice
de capacidad con valor objetivo
w=pnorm(LSL, mean = miu, sd = sigma, lower.tail = T, log.p = F) #
Peso del limite con calidad comercial
CPCRI<-((LES-LSL)/(6*sd(x))+ w *(mean(x)-LSL)/(3*sd(x)))
#####
for(j in 1:k)
{
x<-rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma) # Generamos las observaciones de
los subgrupos
CP[j]<-((LES-LSL)/(6*sd(x)))
CPM[j]<-((LES-LSL)/(6*sqrt((sd(x)^2+(T-mean(x))^2)))) #Calculo
indice de capacidad con valor objetivo
```

```
CPCRI[j]<-((LES-LSL)/(6*sd(x))+ w *(mean(x)-LSL)/(3*sd(x))) #Calculo
del indice de capacidad comercial indice de capacidad comercial
}
#####
longitud <- c(CP, CPM, CPCRI)
indices <- rep(1:3, each = k)
indices <- factor(indices, labels = c("CP", "CPM", "CPCRI"))
indices <- gl(3, k, labels = c("CP", "CPM", "CPCRI"))
split(longitud, indices)
tapply(longitud, indices, summary)
plot(longitud ~ indices)

p.aov <- aov(longitud ~ indices)
summary(p.aov)

#####
```

ANEXO D. Programa de simulación en lenguaje R para comparar indicadores de capacidad no paramétricos.

```
#####
##### ENTRADA DE DATOS #####
#####
k=30000
n<-1000
rate<-3
shape<-2
delta<-0.0
LES<-3.0
LSL<-1.0
#####
x<-rgamma(n,shape,(1+delta)*rate)
CPN=((LES-LSL)/(quantile(x,0.99865)-quantile(x,0.00135)))
CPNU=(LES-median(x))/(quantile(x,0.99865)-median(x))
CPNL=(median(x)-LSL)/(median(x)-quantile(x,0.00135))
CPNK=min(CPNL,CPNU)
W=pgamma(LSL,shape=2,rate=3)
CPNCRI=((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))+w*abs
(((median(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))))
#####
for(j in 1:k)
{
x<-rnorm(n,miu,(1+delta)*sigma) # Generamos las observaciones de
los subgrupos
CPN[j]<-((LES-LSL)/(quantile(x,0.99865)-quantile(x,0.00135)))
CPNU[j]<-(LES-median(x))/(quantile(x,0.99865)-median(x))
CPNL[j]<-(median(x)-LSL)/(median(x)-quantile(x,0.00135))
CPNK[j]<-min(CPNL,CPNU)
CPNCRI[j]=((LES-LSL)/(quantile(xi,0.99865)-quantile(xi,0.00135)))+w*abs(((me
dian(xi)-LSL)/(median(xi)-quantile(xi,0.00135))))
}
#####
longitud <- c(CPN, CPNL, CPNCRI)
indices <- rep(1:3, each = k)
indices <- factor(indices, labels = c("CPN", "CPNK", "CPNCRI"))
indices <- gl(3, k, labels = c("CPN", "CPNK", "CPNCRI"))
```

```
split(longitud, indices)  
tapply(longitud, indices, summary)  
plot(longitud ~ indices)
```

```
kruskal.test(list(CPN,CPNK,CPNCRI))
```

```
#####
```

Anexo 1. Tabla de la distribución normal estandar

Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-4.5	0,00000340	0,00000324	0,00000309	0,00000295	0,00000281	0,00000268	0,00000256	0,00000244	0,00000232	0,00000222
-4.4	0,00000429	0,00000517	0,00000494	0,00000471	0,00000450	0,00000429	0,00000410	0,00000391	0,00000373	0,00000356
-4.3	0,00000854	0,00000816	0,00000780	0,00000746	0,00000712	0,00000681	0,00000650	0,00000621	0,00000593	0,00000567
-4.2	0,00001335	0,00001277	0,00001222	0,00001168	0,00001118	0,00001069	0,00001022	0,00000977	0,00000934	0,00000893
-4.1	0,00002066	0,00001978	0,00001894	0,00001814	0,00001737	0,00001662	0,00001591	0,00001523	0,00001458	0,00001395
-4.0	0,00003167	0,00003036	0,00002910	0,00002789	0,00002673	0,00002561	0,00002454	0,00002351	0,00002252	0,00002157
-3.9	0,00004810	0,00004615	0,00004427	0,00004247	0,00004074	0,00003908	0,00003747	0,00003594	0,00003446	0,00003304
-3.8	0,00007235	0,00006948	0,00006673	0,00006407	0,00006152	0,00005906	0,00005669	0,00005442	0,00005223	0,00005012
-3.7	0,00010780	0,00010363	0,00009961	0,00009574	0,00009201	0,00008842	0,00008496	0,00008162	0,00007841	0,00007532
-3.6	0,00015911	0,00015310	0,00014730	0,00014171	0,00013632	0,00013112	0,00012611	0,00012128	0,00011662	0,00011213
-3.5	0,00023263	0,00022405	0,00021577	0,00020778	0,00020006	0,00019262	0,00018543	0,00017849	0,00017180	0,00016534
-3.4	0,00033693	0,00032481	0,00031311	0,00030179	0,00029086	0,00028029	0,00027009	0,00026023	0,00025071	0,00024151
-3.3	0,00048342	0,00046648	0,00045009	0,00043423	0,00041889	0,00040406	0,00038971	0,00037584	0,00036243	0,00034946
-3.2	0,00068714	0,00066367	0,00064095	0,00061895	0,00059765	0,00057703	0,00055706	0,00053774	0,00051904	0,00050094
-3.1	0,00096760	0,00093544	0,00090426	0,00087403	0,00084474	0,000816915	0,00078885	0,00076219	0,00073638	0,00071136

**Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar
(Continuación)**

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0,00134990	0,00130624	0,00126387	0,00122277	0,00118289	0,00114421	0,00110668	0,00107029	0,00103500	0,00100078
-2.9	0,00186581	0,00180714	0,00175016	0,00169481	0,00164106	0,00158887	0,00153820	0,00148900	0,00144124	0,00139489
-2.8	0,00255513	0,00247707	0,00240118	0,00232740	0,00225568	0,00218596	0,00211821	0,00205236	0,00198838	0,00192621
-2.7	0,00346697	0,00336416	0,00326410	0,00316672	0,00307196	0,00297976	0,00289007	0,00280281	0,00271794	0,00263540
-2.6	0,00466119	0,00452711	0,00439649	0,00426924	0,00414530	0,00402459	0,00390703	0,00379256	0,00368111	0,00357260
-2.5	0,00620967	0,00603656	0,00586774	0,00570313	0,00554262	0,00538615	0,00523361	0,00508493	0,00494002	0,00479880
-2.4	0,00819754	0,00797626	0,00776025	0,00754941	0,00734363	0,00714281	0,00694685	0,00675565	0,00656912	0,00638715
-2.3	0,01072411	0,01044408	0,01017044	0,00990308	0,00964187	0,00938671	0,00913747	0,00889404	0,00865632	0,00842419
-2.2	0,01390345	0,01355258	0,01320938	0,01287372	0,01254546	0,01222447	0,01191063	0,01160379	0,01130384	0,01101066
-2.1	0,01786442	0,01742918	0,01700302	0,01658581	0,01617738	0,01577761	0,01538633	0,01500342	0,01462873	0,01426212
-2.0	0,02275013	0,02221559	0,02169169	0,02117827	0,02067516	0,02018222	0,01969927	0,01922617	0,01876277	0,01830890
-1.9	0,02871656	0,02806661	0,02742895	0,02680342	0,02618984	0,02558806	0,02499790	0,02441919	0,02385176	0,02329547
-1.8	0,03593032	0,03514789	0,03437950	0,03362497	0,03288412	0,03215677	0,03144276	0,03074191	0,03005404	0,02937898
-1.7	0,04456546	0,04363294	0,04271622	0,04181514	0,04092951	0,04005916	0,03920390	0,03836357	0,03753798	0,03672696
-1.6	0,05479929	0,05369893	0,05261614	0,05155075	0,05050258	0,04947147	0,04845723	0,04745968	0,04647866	0,04551398
-1.5	0,00134990	0,00130624	0,00126387	0,00122277	0,00118289	0,00114421	0,00110668	0,00107029	0,00103500	0,00100078
-1.4	0,00186581	0,00180714	0,00175016	0,00169481	0,00164106	0,00158887	0,00153820	0,00148900	0,00144124	0,00139489

Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar (Continuación)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-1.3	0,0968005	0,0950979	0,0934175	0,0917591	0,0901227	0,0885080	0,0869150	0,0853435	0,0837933	0,0822644
-1.2	0,1150697	0,1131394	0,1112324	0,1093486	0,1074877	0,1056498	0,1038347	0,1020423	0,1002726	0,0985253
-1.1	0,1356661	0,1334995	0,1313569	0,1292381	0,1271432	0,1250719	0,1230244	0,1210005	0,1190001	0,1170232
-1.0	0,1586553	0,1562476	0,1538642	0,1515050	0,1491700	0,1468591	0,1445723	0,1423097	0,1400711	0,1378566
-0.9	0,1840601	0,1814113	0,1787864	0,1761855	0,1736088	0,1710561	0,1685276	0,1660232	0,1635431	0,1610871
-0.8	0,2118554	0,2089701	0,2061081	0,2032694	0,2004542	0,1976625	0,1948945	0,1921502	0,1894297	0,1867329
-0.7	0,2419637	0,2388521	0,2357625	0,2326951	0,2296500	0,2266274	0,2236273	0,2206499	0,2176954	0,2147639
-0.6	0,2742531	0,2709309	0,2676289	0,2643473	0,2610863	0,2578461	0,2546269	0,2514289	0,2482522	0,2450971
-0.5	0,3085375	0,3050257	0,3015318	0,2980560	0,2945985	0,2911597	0,2877397	0,2843388	0,2809573	0,2775953
-0.4	0,3445783	0,3409030	0,3372427	0,3335978	0,3299686	0,3263552	0,3227581	0,3191775	0,3156137	0,3120669
-0.3	0,3820886	0,3782805	0,3744842	0,3707000	0,3669283	0,3631693	0,3594236	0,3556912	0,3519727	0,3482683
-0.2	0,4207403	0,4168338	0,4129356	0,4090459	0,4051651	0,4012937	0,3974319	0,3935801	0,3897388	0,3859081
-0.1	0,4601722	0,4562047	0,4522416	0,4482832	0,4443300	0,4403823	0,4364405	0,4325051	0,4285763	0,4246546
-0.0	0,5000000	0,4960106	0,4920217	0,4880335	0,4840466	0,4800612	0,4760778	0,4720968	0,4681186	0,4641436

**Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar
(Continuación)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0,50000000	0,50398936	0,50797831	0,51196647	0,51595344	0,51993881	0,52392218	0,52790317	0,53188137	0,53585639
0.1	0,53982784	0,54379531	0,54775843	0,55171679	0,55567000	0,55961769	0,56355946	0,56749493	0,57142372	0,57534543
0.2	0,57925971	0,58316616	0,58706442	0,59095412	0,59483487	0,59870633	0,60256811	0,60641987	0,61026125	0,61409188
0.3	0,61791142	0,62171952	0,62551583	0,62930002	0,63307174	0,63683065	0,64057643	0,64430875	0,64802729	0,65173173
0.4	0,65542174	0,65909703	0,66275727	0,66640218	0,67003145	0,67364478	0,67724189	0,68082249	0,68438630	0,68793305
0.5	0,69146246	0,69497427	0,69846821	0,70194403	0,70540148	0,70884031	0,71226028	0,71566115	0,71904269	0,72240468
0.6	0,72574688	0,72906910	0,73237111	0,73565271	0,73891370	0,74215389	0,74537309	0,74857110	0,75174777	0,75490291
0.7	0,75803635	0,76114793	0,76423750	0,76730491	0,77035000	0,77337265	0,77637271	0,77935005	0,78230456	0,78523612
0.8	0,78814460	0,79102991	0,79389195	0,79673061	0,79954581	0,80233746	0,80510548	0,80784980	0,81057035	0,81326706
0.9	0,81593987	0,81858875	0,82121362	0,82381446	0,82639122	0,82894387	0,83147239	0,83397675	0,83645694	0,83891294
1.0	0,84134475	0,84375235	0,84613577	0,84849500	0,85083005	0,85314094	0,85542770	0,85769035	0,85992891	0,86214343
1.1	0,86433394	0,86650049	0,86864312	0,87076189	0,87285685	0,87492806	0,87697560	0,87899952	0,88099989	0,88297680
1.2	0,88493033	0,88686055	0,88876756	0,89065145	0,89251230	0,89435023	0,89616532	0,89795768	0,89972743	0,90147467
1.3	0,90319952	0,90490208	0,90658249	0,90824086	0,90987733	0,91149201	0,91308504	0,91465655	0,91620668	0,91773556
1.4	0,91924334	0,92073016	0,92219616	0,92364149	0,92506630	0,92647074	0,92785496	0,92921912	0,93056338	0,93188788
1.5	0,93319280	0,93447829	0,93574451	0,93699164	0,93821982	0,93942924	0,94062006	0,94179244	0,94294657	0,94408260
1.6	0,94520071	0,94630107	0,94738386	0,94844925	0,94949742	0,95052853	0,95154277	0,95254032	0,95352134	0,95448602
1.7	0,95543454	0,95636706	0,95728378	0,95818486	0,95907049	0,95994084	0,96079610	0,96163643	0,96246202	0,96327304
1.8	0,96406968	0,96485211	0,96562050	0,96637503	0,96711588	0,96784323	0,96855724	0,96925809	0,96994596	0,97062102
1.9	0,97128344	0,97193339	0,97257105	0,97319658	0,97381016	0,97441194	0,97500210	0,97558081	0,97614824	0,97670453
2.0	0,97724987	0,97778441	0,97830831	0,97882173	0,97932484	0,97981778	0,98030073	0,98077383	0,98123723	0,98169110
2.1	0,98213558	0,98257082	0,98299698	0,98341419	0,98382262	0,98422239	0,98461367	0,98499658	0,98537127	0,98573788
2.2	0,98609655	0,98644742	0,98679062	0,98712628	0,98745454	0,98777553	0,98808937	0,98839621	0,98869616	0,98898934

Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar (Continuación)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.3	0,9892759	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903581	0,9906133	0,9908625	0,9911060	0,9913437	0,9915758
2.4	0,9918025	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2.5	0,9937903	0,9939634	0,9941323	0,9942969	0,9944574	0,9946139	0,9947664	0,9949151	0,9950600	0,9952012
2.6	0,9953388	0,9954729	0,9956035	0,9957308	0,9958547	0,9959754	0,9960930	0,9962074	0,9963189	0,9964274
2.7	0,9965330	0,9966358	0,9967359	0,9968333	0,9969280	0,9970202	0,9971099	0,9971972	0,9972821	0,9973646
2.8	0,9974449	0,9975229	0,9975988	0,9976726	0,9977443	0,9978140	0,9978818	0,9979476	0,9980116	0,9980738
2.9	0,9981342	0,9981929	0,9982498	0,9983052	0,9983589	0,9984111	0,9984618	0,9985110	0,9985588	0,9986051
3.0	0,9986501	0,9986938	0,9987361	0,9987772	0,9988171	0,9988558	0,9988933	0,9989297	0,9989650	0,9989992
3.1	0,9990324	0,9990646	0,9990957	0,9991260	0,9991553	0,9991838	0,9992112	0,9992378	0,9992636	0,9992886
3.2	0,9993129	0,9993363	0,9993590	0,9993810	0,9994024	0,9994230	0,9994429	0,9994623	0,9994810	0,9994991
3.3	0,9995166	0,9995335	0,9995499	0,9995658	0,9995811	0,9995959	0,9996103	0,9996242	0,9996376	0,9996505
3.4	0,9996631	0,9996752	0,9996869	0,9996982	0,9997091	0,9997197	0,9997299	0,9997398	0,9997493	0,9997585
3.5	0,9997674	0,9997759	0,9997842	0,9997922	0,9997999	0,9998074	0,9998146	0,9998215	0,9998282	0,9998347
3.6	0,9998409	0,9998469	0,9998527	0,9998583	0,9998637	0,9998689	0,9998739	0,9998787	0,9998834	0,9998879
3.7	0,9998922	0,9998964	0,9999004	0,9999043	0,9999080	0,9999116	0,9999150	0,9999184	0,9999216	0,9999247
3.8	0,9999277	0,9999305	0,9999333	0,9999359	0,9999385	0,9999409	0,9999433	0,9999456	0,9999478	0,9999499
3.9	0,9999519	0,9999539	0,9999557	0,9999575	0,9999593	0,9999609	0,9999625	0,9999641	0,9999655	0,9999670
4.0	0,9999683	0,9999696	0,9999709	0,9999721	0,9999733	0,9999744	0,9999755	0,9999765	0,9999775	0,9999784
4.1	0,9999793	0,9999802	0,9999811	0,9999819	0,9999826	0,9999834	0,9999841	0,9999848	0,9999854	0,9999861
4.2	0,9999867	0,9999872	0,9999878	0,9999883	0,9999888	0,9999893	0,9999898	0,9999902	0,9999907	0,9999911
4.3	0,9999915	0,9999918	0,9999922	0,9999925	0,9999929	0,9999932	0,9999935	0,9999938	0,9999941	0,9999943
4.4	0,9999957	0,9999948	0,9999951	0,9999953	0,9999955	0,9999957	0,9999959	0,9999961	0,9999963	0,9999964
4.5	0,9999966	0,9999968	0,9999969	0,9999971	0,9999972	0,9999973	0,9999974	0,9999976	0,9999977	0,9999978

Anexo 2. Distribucion Ji-Cuadrada

Valores de la función de distribución acumulativa chi-cuadrado

v	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,1015	0,4549	1,3233	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	7,8794	10,8276
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,3863	2,7726	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	10,5966	13,8155
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,2125	2,3660	4,1083	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	12,8382	16,2662
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,9226	3,3567	5,3853	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	14,8603	18,4668
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,6746	4,3515	6,6257	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496	20,5150
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,4546	5,3481	7,8408	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476	22,4577
7	0,9893	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	4,2549	6,3458	9,0371	12,1070	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777	24,3219
8	1,3444	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	5,0706	7,3441	10,2189	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9550	26,1245
9	1,7349	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,8988	8,3428	11,3888	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5894	27,8772
10	2,1559	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	6,7372	9,3418	12,5489	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1882	29,5883
11	2,6032	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	7,5841	10,3410	13,7007	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7568	31,2641
12	3,0738	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	8,4384	11,3403	14,8454	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995	32,9095
13	3,5650	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	9,2991	12,3398	15,9839	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8195	34,5282
14	4,0747	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	10,1653	13,3393	17,1169	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	31,3193	36,1233
15	4,6009	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	11,0365	14,3389	18,2451	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013	37,6973
16	5,1422	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	11,9122	15,3385	19,3689	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672	39,2524
17	5,6972	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	12,7919	16,3382	20,4887	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185	40,7902
18	6,2648	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	13,6753	17,3379	21,6049	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1565	42,3124
19	6,8440	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	14,5620	18,3377	22,7178	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909	38,5823	43,8202
20	7,4338	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	15,4518	19,3374	23,8277	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968	45,3147
21	8,0337	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	16,3444	20,3372	24,9348	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	41,4011	46,7970
22	8,6427	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	17,2396	21,3370	26,0393	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7957	48,2679
23	9,2604	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	18,1373	22,3369	27,1413	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384	44,1813	49,7282
24	9,8862	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	19,0373	23,3367	28,2412	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	45,5585	51,1786
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	19,9393	24,3366	29,3389	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9279	52,6197
26	11,1602	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	20,8434	25,3365	30,4346	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417	48,2899	54,0520
27	11,8076	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	21,7494	26,3363	31,5284	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629	49,6449	55,4760
28	12,4613	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	22,6572	27,3362	32,6205	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782	50,9934	56,8923

Valores de la función de distribución acumulativa distribución chi-cuadrado

v	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
30	13,787	14,954	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	29,054	34,336	40,223	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,759	59,342	63,691	66,766	73,402
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661
60	35,535	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,982	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607
80	51,172	53,540	57,153	60,392	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,880	106,629	112,329	116,321	124,839
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208
100	67,328	70,065	74,222	77,930	82,358	90,133	99,334	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,170	149,449
200	152,241	156,432	162,728	168,279	174,835	186,172	199,334	213,102	226,021	233,994	241,058	249,445	255,264	267,541
300	240,663	245,973	253,912	260,878	269,068	283,135	299,334	316,138	331,789	341,395	349,875	359,906	366,844	381,425
400	330,903	337,155	346,482	354,641	364,207	380,577	399,334	418,697	436,649	447,633	457,306	468,725	476,606	493,132
500	422,303	429,388	439,936	449,147	459,926	478,323	499,334	520,951	540,930	553,127	563,852	576,493	585,207	603,446
600	514,529	522,365	534,019	544,180	556,056	576,286	599,334	622,988	644,800	658,094	669,769	683,516	692,982	712,771
700	607,380	615,908	628,577	639,613	652,497	674,413	699,334	724,861	748,359	762,661	775,211	789,974	800,131	821,347
800	700,725	709,897	723,513	735,362	749,185	772,669		826,604	851,671	866,911	880,275	895,984	906,786	929,329
900	794,475	804,252	818,756	831,370	846,075	871,032		928,241	954,782	970,904	985,032	1001,62	1013,03	1036,82
1000	888,564	898,913		927,594	943,133				1057,72	1074,67	1089,53	1106,96	1118,94	1143,91